

# SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

## Accouplement des distributions à valeurs vectorielles

*Séminaire Schwartz*, tome 1 (1953-1954), exp. n° 23, p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SLS\\_1953-1954\\_\\_1\\_\\_A24\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A24_0)

© Séminaire Schwartz  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 23

ACCOUPLLEMENT DES DISTRIBUTIONS À VALEURS VECTORIELLES

1.- POSITION DU PROBLÈME.

Soient  $E, F, G$  trois espaces de Banach,  $v$  une application bilinéaire continue  $E \times F \rightarrow G$ .

Problème : Peut-on définir un accouplement  $(\vec{T}, \vec{\varphi}) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} v(\vec{T}, \vec{\varphi}) dx$

application bilinéaire hypocontinue (relativement à des familles de parties convenables) de  $\mathcal{D}'^m(E) \times \mathcal{D}^{m_1}(F)$  dans  $G$ , ayant les propriétés suivantes :

1°) Si  $\vec{T}$  est une fonction continue  $\vec{f}(x)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(\vec{T}, \vec{\varphi}) dx = \int_{\mathbb{R}^n} v(\vec{f}(x), \vec{\varphi}(x)) dx$$

2°) Si  $\vec{T} = T \vec{e}$ ,  $T \in \mathcal{D}'^m$ ,  $\vec{e} \in E$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(\vec{T}, \vec{\varphi}) dx = v(\vec{e}, T(\vec{\varphi}))$$

3°) Si  $\vec{\varphi} = \varphi \vec{f}$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}^{m_1}$ ,  $\vec{f} \in F$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(\vec{T}, \vec{\varphi}) dx = v(\vec{T}(\varphi), \vec{f})$$

1°/ Cas où  $m_1 = m = \infty$ . On peut considérer  $\vec{T}$  comme élément de  $\mathcal{L}(\mathcal{D}; E)$ , et  $\vec{\varphi}$  comme élément de  $\mathcal{D} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} F$ ; alors le couple  $(\vec{T}, \vec{\varphi})$  définit un élément de  $E \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} F$ , soit  $\langle \vec{T} \otimes \vec{\varphi} \rangle = (T \otimes 1_F)(\vec{\varphi})$ ;  $v$  se prolonge en une application  $\bar{v} \in \mathcal{L}(E \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} F; G)$ ; et  $\bar{v}(\langle T \otimes \varphi \rangle)$  répond à la question.

$$\begin{array}{ccc} \vec{\varphi} \in \mathcal{D} & \widehat{\otimes}_{\pi} & F \\ \vec{T} \downarrow & & \downarrow \pi \\ E & & F \end{array}$$

2°/Cas où  $m_1$  est fini et  $m = m_1$ .

On considère  $\vec{T}$  comme élément de  $\mathcal{L}(\mathcal{D}^m; E)$ , et  $\vec{\varphi}$  comme élément de  $\mathcal{D}^m \widehat{\otimes}_{\varepsilon} F$ ; le couple  $(\vec{T}, \vec{\varphi})$  définit alors un élément de  $E \widehat{\otimes}_{\varepsilon} F$ ; mais en général  $v$  ne se prolonge pas en une application  $E \widehat{\otimes}_{\varepsilon} T \rightarrow G$ . Pour pouvoir définir l'accouplement, nous sommes amenés :

- a) ou bien à supposer  $v$  intégrale
- b) ou bien à faire des hypothèses de régularité supplémentaires sur  $T$  ou  $\vec{\varphi}$ , de manière que le couple  $(\vec{T}, \vec{\varphi})$  définisse un élément de  $E \widehat{\otimes}_{\pi} F$ .

C'est ce dont nous nous occuperons dans la suite de l'exposé.

## 2.- ACCOUPLEMENT DANS LE CAS OÙ $E$ et $F$ SONT DES ESPACES DE BANACH.

Comme  $\vec{\varphi}$  est à support compact, on peut se placer sur le tore ( le problème est local ). On utilise la proposition suivante :

Proposition 1 . L'injection  $i : \mathcal{D}_{\mathbb{T}^n}^{m+n+1} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{T}^n}^m$  est nucléaire.

Soit  $e_p$  la base de  $\mathcal{D}_{\mathbb{T}^n}^m$  formée des vecteurs trigonométriques ;

$\|e_p\|_{\mathcal{D}^m} = (1 + 2\pi |p|)^m$  ( à un facteur fixe près, dépendant de la norme choisie sur  $\mathcal{D}^m$  ).

Soit  $e'_p$  la base duale de  $\mathcal{D}'^m_{\mathbb{T}^n}$  ( $\langle e'_p, \varphi \rangle$  est le  $p$ -ième coefficient de Fourier.)

$$\|e'_p\|_{\mathcal{D}'^m} = \frac{1}{(1+2\pi |p|)^m}$$

La série

$$\sum \frac{1}{(1+2\pi|\xi|)^{n+1}} (1+2\pi|\xi|)^{m+n+1} e^{i\xi} \otimes \frac{e^{i\xi}}{(1+2\pi|\xi|)^m}$$

définit un élément de  $\mathcal{D}'_{T^n}{}^{m+n+1} \widehat{\otimes}_{\pi} \mathcal{D}^m_{T^n}$ , donc un opérateur nucléaire  $i$  :

$$\mathcal{D}^{m+n+1}_{T^n} \longrightarrow \mathcal{D}^m_{T^n}, \text{ qui est précisément l'injection cherchée.}$$

Comme  $\mathcal{D}^m_{T^n}$  vérifie la propriété d'approximation, l'injection  $i$  provient d'un élément unique  $i$  de  $\mathcal{D}'^{m+n+1}_{T^n} \widehat{\otimes}_{\pi} \mathcal{D}^m_{T^n}$

THEOREME 1 - Si  $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}'^{m+n+1}(F)$  et  $\vec{T} \in \widetilde{\mathcal{D}}^m(E)$ , il existe un accouplement  $(\vec{T}, \vec{\varphi}) \in \langle \widetilde{\mathcal{D}}^m \otimes \mathcal{D}'^{m+n+1} \rangle$  qui possède les propriétés voulues.

$\vec{\varphi}$  étant à support compact, on peut passer sur le tore : il suffit donc de démontrer le théorème pour  $\mathcal{D}'^{m+n+1}_{T^n}(F)$  et  $\mathcal{D}^m_{T^n}(E)$ .

$$\begin{array}{ccc} \alpha = i \in \mathcal{D}'^{m+n+1}_{T^n} \widehat{\otimes}_{\pi} \mathcal{D}^m_{T^n} & & \\ \vec{\varphi} \downarrow & & \downarrow \vec{T} \\ F & \widehat{\otimes}_{\pi} & E \end{array}$$

On considère  $\vec{T}$  comme élément de  $\mathcal{L}(\mathcal{D}^m_{T^n}; E)$  et  $\vec{\varphi}$  comme élément de  $\mathcal{L}(\mathcal{D}'^{m+n+1}_{T^n}; F)$  ; alors  $(\vec{T} \otimes \vec{\varphi})(i) \in E \widehat{\otimes}_{\pi} F$  et  $\vec{v} [(\vec{T} \otimes \vec{\varphi})(i)]$  est l'accouplement cherché.

On a immédiatement :

$$\|\vec{v} [(\vec{T} \otimes \vec{\varphi})(i)]\| \leq \| \vec{v} \| \|\vec{T}\| \|\varphi\| \|\mathcal{D}^{m+n+1}_{T^n} i\|_{\pi}$$

### 3. - CAS OÙ $E, F, G$ SONT DES E.V.T. COMPLETS QUELCONQUES.

Les raisonnements précédents sont encore valables, si  $v$  est une application bilinéaire continue de  $E \times F$  dans  $G$ . Mais dans la pratique, les applications bilinéaires sont seulement hypocontinues.

Posons  $\|i\|_{\pi} = k$ . Supposons toujours  $\vec{T} \in \widetilde{\mathcal{D}}^m(E)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}^{m+n+1}(F)$ ,

donc à support compact (l'hypothèse  $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^{m+n+1}(F)$  est insuffisante,  $\vec{\varphi}$  serait seulement scalairement à support compact), ce qui permet ici encore de raisonner le tore.

Soient  $A_1$  (resp.  $B_1$ ) la boule unité de  $\mathcal{D}_{T^n}^m$  (resp.  $\mathcal{D}_{T^n}^{m+n+1}$ ). L'image par  $T$  de  $A_1$  est contenue dans une partie bornée complète  $A$  de  $E$ , donc  $T$  est continue de  $\mathcal{D}_{T^n}^m$  dans  $E_A$  : de même l'image par  $\vec{\varphi}$  de  $B_1$  est contenue dans une partie bornée complète  $B$  de  $F$ ,  $\vec{\varphi}$  est continue de  $\mathcal{D}_{T^n}^{m+n+1}$  dans  $F_B$ . L'image par  $\vec{T} \otimes \vec{\varphi}$  de  $i \in \mathcal{D}^{m+n+1} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} \mathcal{D}^m$  est un élément de  $E_A \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} F_B$  ; mais si  $v$  est supposée séparément continue sur  $E \times F$ , elle l'est a fortiori sur  $E_A \times F_B$ , mais comme ce sont des Banach, elle est continue, donc se prolonge en  $\bar{v}$  sur  $E_A \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} F_B$ , et on peut définir l'accouplement par  $\bar{v}((\vec{T} \otimes \vec{\varphi})(i))$  qui est aussi la valeur sur  $i$  de l'image réciproque de  $v$  par  $T$  et  $\varphi$  ; cette image réciproque est séparément continue sur les Banach  $\mathcal{D}^{m+n+1}$  et  $\mathcal{D}^m$  donc continue.

L'accouplement ainsi défini ne possède de bonnes propriétés (ne serait-ce que la continuité séparée) que si  $v$  est hypocontinue par rapport à des ensembles assez vastes de parties de  $E$  et  $F$ . Nous supposons  $v$  hypocontinue à la fois par rapport aux parties bornées de  $E$  et  $F$ . Alors :

Proposition 2. Si  $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^{m+n+1}(F)$  et  $\vec{T} \in \mathcal{D}^m(E)$ , et si  $v$  est une application bilinéaire  $E \times F \rightarrow G$  séparément continue, on peut définir un accouplement  $(\vec{T}, \vec{\varphi}) \rightarrow \int v(\vec{T}, \vec{\varphi}) dx$ . Si  $v$  est hypocontinue relativement aux parties bornées de  $E$  et  $F$ , l'accouplement  $(\vec{T}, \vec{\varphi}) \rightarrow \int v(\vec{T}, \vec{\varphi}) dx$  est hypocontinu relativement aux parties bornées de  $\mathcal{D}^{m+n+1}(F)$  et aux parties bornées de  $\tilde{\mathcal{D}}^m(E)$

Raisonnons d'abord sur le tore. Si  $\vec{T}$  reste bornée,  $\vec{T}(A_1)$  reste dans une partie bornée fixe  $A$  de  $E$ . Soit  $W$  voisinage de  $0$  dans  $G$ . Comme  $v$  est hypocontinue relativement aux parties bornées de  $E$ , il existe un voisinage de  $0$ ,  $U$ , de  $F$ , tel que  $v(A \times U) \subset W$ .

Alors  $v$  définit une application bilinéaire continue de  $E_A \times \hat{F}_U$  dans  $\hat{G}_W$ , de norme  $\leq 1$ , donc une application linéaire continue de norme  $\leq 1$  de  $E_A \hat{\otimes}_\pi F_U$  dans  $\hat{G}_W$ .

Comme  $\vec{\varphi}_i$  converge vers  $0$  dans  $\mathcal{D}^{m+n+1}(F)$  à partir d'un certain moment on a  $\vec{\varphi}_i(B_1) \subset U$ , donc  $\vec{\varphi}_i$  est de norme  $\leq 1$  de  $\mathcal{D}^{m+n+1}$  dans  $\hat{F}_U$ ; alors  $(T \otimes \varphi)(i)$  est dans  $E_A \hat{\otimes}_\pi F_U$ , de norme  $\leq k = \|i\|_\pi$ ; alors l'image de  $\int v(\vec{T}, \vec{\varphi}) dx$  dans  $\hat{G}_W$  est de norme  $\leq k$ , donc cet élément de  $G$  est dans  $kW$ .

C.Q.F.D.

Supposons maintenant qu'on remplace  $T^n$  par  $R^n$ . On veut démontrer que, si  $T$  parcourt une partie bornée de  $\mathcal{D}^m(E)$ , les applications

$$\vec{\varphi} \longrightarrow \int v(\vec{T}, \vec{\varphi}) dx \text{ de } \mathcal{D}_{R^n}^{m+n+1}(F) \text{ dans } G \text{ sont équi continues. Comme}$$

$\mathcal{D}_{R^n}^{m+n+1}(F)$  (contrairement à  $\tilde{\mathcal{D}}_{R^n}^{m+n+1}(F)$ ) a la topologie limite inductive des  $\mathcal{D}_K^{m+n+1}(F)$ ,  $K$  compact  $\subset R^n$ , il suffit de montrer que les applications précédentes sont équi continues lorsque  $\vec{\varphi}$  garde son support dans un compact fixe. On est alors ramené au tore.

On démontrera de même que si  $\vec{\varphi}$  reste bornée dans  $\mathcal{D}^{m+n+1}(F)$  et que  $\vec{T}$  converge vers  $0$  dans  $\tilde{\mathcal{D}}^m(E)$ ,  $\int v(T, \varphi) dx$  converge vers  $0$  dans  $G$ , à cause de l'hypocontinuité de  $v$  relativement aux parties bornées de  $F$ . Donc l'application étudiée est bien hypocontinue.

REMARQUE

L'hypocontinuité de  $v$  par rapport aux parties bornées de  $E$  seulement ne suffit pas à entraîner l'hypocontinuité de

$$(\vec{T}, \vec{\varphi}) \longrightarrow \int_{R^n} v(\vec{T}, \vec{\varphi}) dx \text{ par rapport aux parties bornées de } \tilde{\mathcal{D}}^m(E),$$

car "hypocontinu" implique, dans sa définition, la continuité séparée par rapport à chaque variable.

---