SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

A. Définition intégrale de la convolution de deux distributions

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 22, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A23_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

A. DÉFINITION INTÉGRALE DE LA CONVOLUTION DE DEUX
DISTRIBUTIONS

Dans cet exposé, une distribution S , dépendant de la variable $x \in \mathbb{R}^n$, sera notée $S(x)$; on écrira ainsi $T(\xi)$, $T(\eta)$, $U(y)$, etc ...

Il est utile, pour ce qui suit immédiatement, d'adopter la convention suivante: soit T une distribution; on considérera aussi $T(y)$ comme une distribution à 2 variables x, y , en identifiant $T(y)$ à $1(x) \otimes T(y)$, où $1(x)$ est la distribution égale à la fonction constante 1 de la variable x ,

Soit S une distribution; on définira la distribution $S(x - y)$ par les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} \langle S(x - y), \varphi(x, y) \rangle &= \langle S(\xi) \otimes 1(\eta), \varphi(\xi + \eta, \eta) \rangle = \\ &= \langle S(\xi), \int \varphi(\xi + \eta, \eta) d\eta \rangle = \int \langle S(\xi), \varphi(\xi + \eta, \eta) \rangle d\eta \end{aligned}$$

On pourra, de la même façon, définir le produit multiplicatif de deux distributions $S(x)$ et $T(y)$, dépendant de deux variables différentes:

$$S(x) T(y) = [S(x) \otimes 1(y)] [1(x) \otimes T(y)] = S(x) \otimes T(y)$$

Alors on voit que, pour n'importe quelles distributions S et T , le produit $S(x - y) T(y)$ a un sens, qui est donné par:

$$\langle S(x - y) T(y), \varphi(x, y) \rangle = \langle S(\xi) \otimes T(\eta), \varphi(\xi + \eta, \eta) \rangle$$

Si l'on cherche maintenant à donner un sens à l'intégrale

$$\int S(x - y) T(y) dy$$

la question se pose de savoir quand $S(x - y) T(y)$ est sommable par rapport à y , i.e. quand $S(x - y) T(y) \in (\mathcal{D}'_{L^1_y}) (\mathcal{D}'_x)$

On vérifie tout de suite que cela est vrai dans les cas usuels où la convolution a un sens.

Il peut arriver cependant que $\int S(x - y) T(y) dy$ ait un sens sans que l'on ait pu définir $S * T$ de la manière ordinaire ; mais on peut s'attendre alors aux pires canulars. Par exemple, on ignore s'il y a encore commutativité :

$$\int S(x - y) T(y) dy \stackrel{?}{=} \int S(y) T(x - y) dy$$

En effet, $S(x - y) T(y)$ et $S(y) T(x - y)$ sont deux distributions bien distinctes.

On peut donner une autre définition de la convolution de S et T . Si pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, la distribution $S(\xi) T(\eta) \varphi(\xi + \eta) \in (\mathcal{D}'_{L^1})_{\xi, \eta}$, alors on pourra écrire l'intégrale :

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \iint S(\xi) T(\eta) \varphi(\xi + \eta) d\xi d\eta$$

Cette intégrale définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$, en vertu du théorème de Banach-Steinhaus, puisqu'elle est limite d'intégrales :

$$\iint \alpha(\xi) \beta(\eta) S(\xi) T(\eta) (\xi + \eta) d\xi d\eta$$

[où $\alpha(\xi)$ (resp. $\beta(\eta)$) sont à support compact et convergent vers $1(\xi)$ (resp. $1(\eta)$) au sens de $\mathcal{E}_{\xi}$ (resp. $\mathcal{E}_{\eta}$) en restant bornées dans $\mathcal{B}_{\xi}$ (resp. $\mathcal{B}_{\eta}$)] définissant des formes linéaires continues.

Cette définition paraît être celle qui recouvre les cas les plus nombreux. Si $S * T$ a un sens d'après cette définition, il a un sens pour les définitions antérieures, car on doit avoir, d'après Fubini

$$\begin{aligned} \langle S * T, \varphi \rangle &= \iint S(\xi) T(\eta) \varphi(\xi + \eta) d\xi d\eta = \iint S(x - y) T(y) \varphi(x) dx dy \\ &= \int dy \int S(x - y) T(y) \varphi(x) dx, \text{ ce qui signifie que } S(x - y) T(y) \text{ est} \\ &\text{partiellement sommable en } y \text{ et que } S * T = \int S(x - y) T(y) dy \in \mathcal{D}'_x. \end{aligned}$$

B. DÉFINITION INTÉGRALE DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE DISTRIBUTION

Nous avons vu (exposé n° 18, p. 15) que $\mathcal{S}$ est nucléaire. Comme c'est un Fréchet, $\mathcal{S}'$ est aussi nucléaire et l'on a :

$$\mathcal{S}'_{x,y} \approx (\mathcal{S}_{x,y})' \approx (\mathcal{S}_x \hat{\otimes} \mathcal{S}_y)' \approx \mathcal{S}'_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_y$$

La transformation de Fourier à n variables est le produit tensoriel de n transformations à une seule variable (Exposé n° 20, p. 6) ; nous nous bornerons donc à considérer $\mathcal{F}_x$, $x \in \mathbb{R}$.

Est-il alors possible de définir $\mathcal{F}U$ ($U \in \mathcal{D}'$) par l'intégrale

$$\int U(x) e^{-2i\pi x\xi} dx \quad ?$$

Le produit $U(x) e^{-2i\pi x\xi}$ a un sens, en tant que distribution à 2 variables. D'autre part, si $U \in \mathcal{S}'_x$, on a $U(x) e^{-2i\pi x\xi} \in (\mathcal{D}'_{L^1})_x (\mathcal{D}'_\xi)$.

En effet, en tant que fonction de x , à valeurs dans $\mathcal{S}'_{\xi}$, $e^{-2i\pi x\xi}$ est scalairement dans $\mathcal{S}$, c'est-à-dire que, pour toute $\varphi(\xi) \in \mathcal{S}'_\xi$,

$$\int e^{-2i\pi x\xi} \varphi(\xi) d\xi \in \mathcal{S}_x, \text{ ce qui est de notoriété publique. Or on a}$$

$\mathcal{S}(E) \approx \tilde{\mathcal{S}}(E)$, ce qui signifie que $e^{-2i\pi x\xi}$ est, non seulement scalairement, mais effectivement dans $\mathcal{S}$ (Exposé n° 10, p. 12). Autrement dit :

$$e^{-2i\pi x\xi} \in \mathcal{S}_x (\mathcal{S}'_\xi) \approx \mathcal{S}_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_\xi$$

et aussi $\in \mathcal{S}'_\xi \hat{\otimes} \mathcal{S}'_x$

Le produit multiplicatif d'une $T \in \mathcal{S}'$ par une $\varphi \in \mathcal{S}$ est une distribution de $\mathcal{O}'_C$ (i.e. à décroissance rapide à l'infini). Si donc on multiplie $e^{-2i\pi x\xi} \in \mathcal{S}_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_\xi$ par $U(x) \in \mathcal{S}'_x$, on obtient

$$U(x) e^{-2i\pi x\xi} \in (\mathcal{O}'_C)_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_\xi, \text{ qui est évidemment}$$

sommable par rapport à x , et son intégrale en x est bien dans $\mathcal{S}'_\xi$.

Inversion de la transformation de Fourier

Est-ce que $U(x) = \int e^{2i\pi x\xi} d\xi \int U(y) e^{-2i\pi \xi y} dy$? Et d'abord, l'intégrale $\iint e^{2i\pi \xi(x-y)} U(y) d\xi dy$ a-t-elle un sens et peut-on y intervertir l'ordre des intégrations ?

Remarquons que si $\varphi(x) \in \mathcal{S}_x$, $\theta(\xi) = \int e^{2i\pi \xi x} \varphi(x) dx \in \mathcal{S}'_\xi$; comme $e^{-2i\pi \xi y} \in \mathcal{S}_y \hat{\otimes} \mathcal{S}'_\xi$ et $U(y) \in \mathcal{S}'_y$, le produit multiplicatif de $e^{-2i\pi \xi y}$ par $U(y)$ d'une part et $\theta(\xi)$ de l'autre, est un élément de

$(\mathcal{O}'_C)_y \hat{\otimes} (\mathcal{O}'_C)_\xi$ et a fortiori de $(\mathcal{D}'_{L^1})_{\xi, y}$. Ceci montre que $U(y) e^{-2i\pi \xi(x-y)}$, en tant que distribution en ξ, y , à valeurs dans $\mathcal{S}'_x$, est scalairement dans $(\mathcal{D}'_{L^1})_{\xi, y}$. Cela entraîne que l'intégrale

$\iint e^{2i\pi \xi(x-y)} U(y) d\xi dy$ a un sens et que l'on peut y intervertir l'ordre des intégrations :

$$\int e^{2i\pi x \xi} d\xi \int U(y) e^{-2i\pi \xi y} dy = \int U(y) dy \int e^{2i\pi(x-y)\xi} d\xi$$

Etablissons alors la formule $\int e^{2i\pi \xi \lambda} d\xi = \delta(\lambda)$.

L'égalité $\lambda \delta(\lambda) = 0$ caractérise δ à un facteur numérique près ; or

$$2i\pi \lambda \int e^{2i\pi \lambda \xi} d\xi = \int \frac{\partial}{\partial \xi} (e^{2i\pi \lambda \xi}) d\xi = 0$$

Ceci montre que $\int e^{2i\pi \lambda \xi} d\xi = k \delta(\lambda)$; k se détermine en prenant la valeur de la distribution $\int e^{2i\pi \lambda \xi} d\xi$ pour une fonction $\varphi(\lambda)$ dont on connaît la transformée inverse de Fourier : $e^{-\pi \lambda^2} (\mathcal{F} e^{-\pi \lambda^2} = e^{-\pi \xi^2})$. On trouve donc : $k = 1$.

Dans $\int e^{2i\pi \lambda \xi} d\xi$, on peut, avant ou après intégration, remplacer λ par $x - y$, car ce changement de variables est une opération continue de $\mathcal{D}'_\lambda$ dans $\mathcal{D}'_{x, y}$; on a donc $\int e^{2i\pi(x-y)\xi} d\xi = \delta(x-y)$, et avec les notations du paragraphe A, on peut écrire :

$$\int U(y) \delta(x-y) dy = (U * \delta)_x = U(x)$$

Pour terminer ce paragraphe, signalons les isomorphismes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_{x, y} &\approx \mathcal{D}'_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y & \mathcal{E}'_{x, y} &\approx \mathcal{E}'_x \hat{\otimes} \mathcal{E}'_y \\ \mathcal{S}'_{x, y} &\approx \mathcal{S}'_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_y & (\mathcal{O}'_C)_{x, y} &\approx (\mathcal{O}'_C)_x \hat{\otimes} (\mathcal{O}'_C)_y \end{aligned}$$

L'établissement de la première et de la dernière isomorphie présente seul des difficultés. Mais $\mathcal{D}'_{x, y} \approx \mathcal{D}'_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$ équivaut au théorème des noyaux (exposé n° 11, p. 5) et $(\mathcal{O}'_C)_{x, y} \approx (\mathcal{O}'_C)_x \hat{\otimes} (\mathcal{O}'_C)_y$ résulte de

$(\mathcal{O}_M)_{x,y} \approx (\mathcal{O}_M)_x \hat{\otimes} (\mathcal{O}_M)_y$ par application de la transformation de Fourier.

C. DÉFINITION TRÈS GÉNÉRALE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE PARTIELLE PAR RAPPORT A L'UNE DES VARIABLES

Les espaces $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$:

Nous désignerons par $\mathcal{L}$ l'espace des fonctions d'une variable $x \in \mathbb{R}$, indéfiniment dérivables, et qui décroissent à l'infini à droite, ainsi que chacune de leurs dérivées, plus vite que toute exponentielle. Un système fondamental de voisinages de 0 dans la topologie de $\mathcal{L}$ sera constitué par les ensembles $V(m, \lambda; \varepsilon; a)$ (m entier ; λ réel ; $\varepsilon > 0$; a réel) ainsi définis :

$\varphi \in V(m, \lambda; \varepsilon; a)$ équivaut à $|e^{\lambda x} \varphi^{(p)}(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \geq a$ et pour tout $p \leq m$. Il est clair que $\mathcal{L}$ est un espace de Fréchet.

Nous désignerons par $\mathcal{L}'$ le dual de $\mathcal{L}$ et nous le supposerons muni de la topologie de la convergence bornée. $\mathcal{L}'$ est l'espace des distributions à support limité à gauche, à croissance "tempérée par rapport aux exponentielles"; pour que $T \in \mathcal{L}'$, il faut et il suffit que T soit de la forme

$$\frac{d^k}{dx^k} \left[e^{\lambda x} g(x) \right] \quad \text{où } g(x) \text{ est une fonction continue, bornée sur toute}$$

la droite, et à support limité à gauche. Dans la suite, nous considérerons exclusivement $\mathcal{L}'_+$, espaces des distributions de $\mathcal{L}'$ qui ont leur support dans $[0, +\infty[$.

$\mathcal{L}, \mathcal{L}', \mathcal{L}'_+$ sont nucléaires. Il suffit de le montrer pour $\mathcal{L}$ puisque c'est un Fréchet et que tout sous-espace d'un nucléaire est nucléaire.

Or, on peut considérer que la topologie de $\mathcal{L}$ est la moins fine de celles qui rendent continues les applications $\varphi(x) \rightarrow \alpha(x) e^{\lambda x} \varphi(x)$ ($\lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathcal{B}$, à support limité à gauche) de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{S}$; autrement dit, $\mathcal{L}$ est limite projective d'espaces nucléaires; d'où le résultat.

La transformation de Laplace dans $\mathcal{L}'_+$ et $\mathcal{L}'_+(E)$

$\mathcal{L}'_+$ sera, par excellence, l'espace des distributions "laplacisables".

En effet, toute $T \in \mathcal{L}'_+$ peut s'écrire $T(t) = \frac{d^k}{dt^k}(e^{-\lambda t} g(t))$;

$T(t) e^{-pt}$ sera intégrable dès que $\Re p > \lambda$.

On appellera alors transformée de Laplace de T la fonction de p , holomorphe pour $\Re p > \lambda$:

$$LT(p) = \int T(t) e^{-pt} dt$$

Soit alors E un espace vectoriel localement convexe. Nous désignerons par $\tilde{\mathcal{L}}'_+(E)$ l'espace des distributions en t , à valeurs dans E , qui sont scalairement dans $\mathcal{L}'_+$; il sera alors possible de former, pour chaque $\tilde{e}' \in E'$, la transformée de Laplace de la distribution $\langle \vec{T}, \tilde{e}' \rangle \in \mathcal{L}'_+$; mais il n'est pas permis, en général, de parler de la transformée de Laplace de $\vec{T}$.

Toutefois :

THÉORÈME - Si E est un espace $\mathcal{DF}$, toute $\vec{T} \in \tilde{\mathcal{L}}'_+(E)$ possède une vraie transformée de Laplace.

Remarquons que $\vec{T} \in \tilde{\mathcal{L}}'_+(E)$ définit une application linéaire continue de $\mathcal{L}$ dans E . Puisque $\mathcal{L}$ est un espace de Fréchet et que, par hypothèse, E est du type $\mathcal{DF}$, il existe un ouvert Ω de $\mathcal{L}$ dont l'image par $\varphi \rightarrow \vec{T}(\varphi)$ est bornée dans E . T est encore une application continue de $(\mathcal{L}_n)^\wedge$ dans E . D'après la définition des voisinages de 0 dans $\mathcal{L}$, il existe λ réel tel que $e^{-pt} \in (\mathcal{L}_n)^\wedge$ dès que $\Re p > \lambda$. Alors l'intégrale

$$\vec{T}(e^{-pt}) = \int T(t) e^{-pt} dt$$

définit une fonction de p , holomorphe pour $\Re p > \lambda$, à valeurs dans E .

Si E n'est pas un $\mathcal{DF}$, on cherche à voir s'il n'est pas limite projective d'espaces E_i du type $\mathcal{DF}$. Alors, à $\vec{T} \in \tilde{\mathcal{L}}'_+(E)$ correspondra, par Laplace, une collection de fonctions $F_i(p)$, holomorphes pour $p > \lambda_i$, telles que si $i \leq j$, $F_i(p)$ soit l'image de $F_j(p)$ par $E_j \rightarrow E_i$ pour $\Re p$ assez grand.

Soit par exemple, $T(x, t)$ une distribution à 2 variables. Si $T(x, t) \in (\mathcal{L}'_+)_t (\mathcal{D}'_x)$, $T(x, t)$ aura une transformée de Laplace partielle par rapport à t au sens suivant :

Comme $\mathcal{D}'_x$ est limite projective des $(\mathcal{D}'_K)_x$, qui sont des duals de Fréchet, et qu'on peut remplacer ceux-ci par les $(\mathcal{D}'_\Omega)_x$, Ω ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$, on voit que pour chaque ouvert Ω borné, il y a une transformée de Laplace $F_\Omega(p)$ à valeurs dans $\mathcal{D}'_\Omega$ définie pour $\mathcal{R}p$ assez grand, avec $F_\Omega(p) = F_\omega(p)$ dans ω pour $\mathcal{R}p$ assez grand si $\Omega \supseteq \omega$.