

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Les distributions sommables

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 21, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A22_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 21

LES DISTRIBUTIONS SOMMABLES

DISTRIBUTIONS A VALEUR VECTORIELLE.

On a interprété le noyau de la transformation identique (exposé n° 11) dans les espaces de distributions du type $\mathcal{H}'_c{}^m$ comme une fonction $\delta_x(\hat{y})$, la fonction qui, à y , associe la distribution $\delta_x(y)$ masse unité au point y . Alors cette fonction appartient à $\tilde{\mathcal{H}}_y^m(\mathcal{H}'_x{}^m)_c = \mathcal{H}'_y^m \hat{\otimes}_\varepsilon (\mathcal{H}'_x{}^m)_c$.

Nous pouvons aussi l'interpréter comme une distribution en y par $\varphi(\hat{y}) \rightarrow \int \delta_x(y) \varphi(y) dy = \varphi(\hat{x})$. Alors elle devient une distribution à valeur vectorielle $\delta_{x;y} = \delta_{x-y}$. Soit K'_x un espace de distributions du type considéré dans l'exposé précédent : cette distribution est la distribution définie par l'application identique de K'_y dans K'_x ; δ_{x-y} doit donc être considérée comme appartenant à $\tilde{K}'_y(K'_x)$.

Ceci fournit une interprétation symétrique des précédentes pour le produit tensoriel de certains espaces, par exemple pour

$$\mathcal{D}'_y{}^m \hat{\otimes}_\varepsilon (\mathcal{D}'_x{}^m)_c \approx \tilde{\mathcal{D}}_y^m(\mathcal{D}'_x{}^m)_c \approx (\tilde{\mathcal{D}}_x^m)_c (\mathcal{D}'_y{}^m)$$

I.- LES ESPACES $\mathcal{D}'_{L^1}{}^m(E)$:

1.- L'espace \mathcal{D}'_{L^1}

$\dot{\mathcal{B}}^m$: ses éléments sont les fonctions m fois continuellement différentiables (m fini) et tendant vers zéro à l'infini ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m$.

On définit sa topologie comme suit : des f_j tendent vers zéro si les $f_j^{(i)}(x)$, $0 \leq i \leq m$, tendent uniformément en x vers zéro. $\dot{\mathcal{B}}^m$ est un espace de Banach. Son dual est $\mathcal{D}'_{L^1}{}^m$ l'espace des distributions sommes finies de dérivées d'ordre $\leq m$ de mesures sommables. Le produit scalaire entre ces deux espaces est défini par ($T = \sum_{p \leq m} D^p \mu_p$; $T \in \mathcal{D}'_{L^1}{}^m$; $\varphi \in \dot{\mathcal{B}}^m$) :

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum (-1)^{|p|} \int D^p \varphi \cdot d\mu_p$$

Définition 1 : \mathcal{B} est l'espace formé des fonctions indéfiniment dérivables nulles à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées muni de la topologie définie par les semi-normes ($0 \leq m < +\infty$) $p^m(f) = \sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^n \\ |q| \leq m}} |D^q f(t)|$.

C'est un espace du type (\mathcal{F}) .

Définition 2 : \mathcal{D}'_L est le dual topologique fort de \mathcal{B} .

On sait que c'est l'espace des distributions qui sont sommes finies de mesures sommables.

Définition 3 : \mathcal{B} est l'espace formé des fonctions indéfiniment différentiables bornées, muni de la topologie définie par les semi-normes $p^m(f) = \sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ |q| \leq m}} |D^q f(t)|$.

$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{B} .

On a :

PROPOSITION 1. - \mathcal{B} est le dual fort de \mathcal{D}'_L .

Démonstration : Nous allons d'abord prouver l'égalité ensembliste entre \mathcal{B} et $(\mathcal{D}'_L)'$.

Nous avons $\mathcal{B} \subset (\mathcal{D}'_L)'$. Sur les parties bornées de \mathcal{B} nous mettons la topologie induite par \mathcal{E} . Dans ces conditions tout élément φ de \mathcal{B} est adhérent à une partie bornée de \mathcal{B} : on peut trouver une suite de fonctions φ_ν de \mathcal{B} telles que : $D^p \varphi_\nu(x) \rightarrow D^p \varphi(x)$ uniformément en x sur tout compact et pour chaque p , et $|D^p \varphi_\nu(x)| \leq M(p)$ (en prenant $\varphi_\nu(x) = \alpha_\nu(x)\varphi(x)$, α_ν bornée dans \mathcal{B} et convergent vers 1 dans \mathcal{E}).

Soit $T \in \mathcal{D}'_L$ ($T = \sum_{p \leq m_0} (-1)^{|p|} D^p \mu_p$). Etant donné ε il existe un compact I tel que $\sum_{|p| \leq m_0} \int_I |d\mu_p| \leq \frac{\varepsilon}{\sup_{|p| \leq m_0} M(p)}$ alors

$$|\langle T, \varphi_\nu \rangle - \sum_{|p| \leq m_0} (-1)^{|p|} \int_I D^p \varphi_\nu d\mu_p| \leq \varepsilon.$$

Mais sur I les $D^p \varphi_\nu$ convergent uniformément vers $D^p \varphi$, et l'on a aussi

$$\left| \sum_{|p| \leq m_0} \int_{\mathbb{R}^n} D^p \varphi d\mu_p - \sum_{|p| \leq m_0} \int_I D^p \varphi d\mu_p \right| \leq \varepsilon.$$

Donc les $\langle T, \varphi_\nu \rangle$ convergent pour $\nu \rightarrow \infty$ vers $\sum_{|p| \leq m_0} \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^{|p|} D^p \varphi d\mu_p$. Comme les $\langle T, \varphi_\nu \rangle$ ne dépendent pas de l'expression

$\sum_{|p| \leq m} D^p \mu_p$ utilisée pour T , et que la limite trouvée $\sum_{|p| \leq m_0} \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^{|p|} D^p \varphi d\mu_p$ ne dépend pas de la suite φ_ν utilisée, nous pouvons poser

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_\nu \rangle = \sum_{|p| \leq m_0} \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^{|p|} D^p \varphi d\mu_p,$$

la valeur de $\langle T, \varphi \rangle$ étant indépendante des procédés utilisés pour la définir.

$\langle T, \varphi \rangle$ est une fonction continue de T , pour φ fixée.

En effet lorsque les φ_ν parcourent un ensemble borné de \mathcal{B} les fonctionnelles $T \rightarrow \langle T, \varphi_\nu \rangle$ sont équi continues sur \mathcal{D}'_{L^1} ,

donc $\langle T, \varphi \rangle$ est elle aussi continue. Plus généralement nous voyons ^{que} toute partie bornée de \mathcal{B} , étant l'adhérence, dans \mathcal{B} d'une partie ^{bornée} de \mathcal{B} pour la topologie de la convergence simple sur \mathcal{D}'_{L^1} , est équi continue sur \mathcal{D}'_{L^1} .

Enfin si φ_ν converge vers 0 dans \mathcal{B} , $\langle T, \varphi_\nu \rangle$ converge vers 0 uniformément lorsque T reste bornée dans \mathcal{D}'_{L^1} , car pour un ensemble borné de \mathcal{D}'_{L^1} , la décomposition $T = \sum_{|p| \leq m_0} D^p \mu_p$ fait intervenir un m_0 fixe, et des μ_p telles que $\int_{\mathbb{R}^n} |d\mu_p|$ reste borné. Donc $\mathcal{B} \subset (\mathcal{D}'_{L^1})'$, avec une topologie plus fine.

Prouvons maintenant $\mathcal{B} \supset (\mathcal{D}'_{L^1})'$

$\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'_{L^1}$ avec une topologie plus fine, on a donc $(\mathcal{D}'_{L^1})' \subset \mathcal{E}$. C'est un espace de fonctions. Soit φ un de ses éléments. Nous considérons l'ensemble des masses $\delta_x(a)$, ($a \in \mathbb{R}^n$). C'est un ensemble borné de \mathcal{D}'_{L^1} , donc

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} |\langle \varphi, \delta_x(a) \rangle| = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} |\varphi(a)| < +\infty.$$

Et de même, en considérant l'ensemble des distributions $D^p \delta_x(a)$ ($a \in \mathbb{R}^n$) on voit que $\sup_{a \in \mathbb{R}^n} |D^p \varphi(a)| < +\infty$ pour chaque p . Ceci implique $\varphi \in \mathcal{B}$, donc $(\mathcal{D}'_{L^1})' \subset \mathcal{B}$.

Topologie forte du dual. Dire que $\varphi_\nu \rightarrow 0$ c'est dire que $\langle \varphi_\nu, T \rangle \rightarrow 0$ uniformément en T lorsque T parcourt un borné, or les bornés considérés au dessus montrent que ceci veut dire que $\sup_{a \in \mathbb{R}^n} |D^p \varphi_\nu(a)| \rightarrow 0$ pour chaque p . Donc $(\mathcal{D}'_{L^1})' \subset \mathcal{B}$, avec une topologie plus fine; donc $(\mathcal{D}'_{L^1})' = \mathcal{B}$, algébriquement et topologiquement.

INTÉGRALE D'UNE DISTRIBUTION SOMMABLE.

Définition 4 : Soit $T_x \in \mathcal{D}'_{L^1}$. Par définition $\int T_x dx = \langle T, 1 \rangle$.
 T_x est dite sommable.

L'intégrale, en vertu de sa définition, est une forme linéaire continue sur \mathcal{D}'_{L^1} .

Définition 5 : On dira que $\langle T, \varphi \rangle$ a un sens (T est une distribution, et φ un élément de \mathcal{E}) si φT est sommable.

On pose $\langle T, \varphi \rangle = \int T_x \varphi(x) dx$.

Ceci permet d'écrire la dualité entre certains espaces fonctionnels sous forme d'intégrale.

Exemple : La dualité entre \mathcal{S} et \mathcal{S}' . Si $T_x \in \mathcal{S}'_x$, $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ alors $\varphi T \in \mathcal{O}'_c \subset \mathcal{D}'_{L^1}$ donc $\int T_x \varphi(x) dx$ existe et c'est justement $\langle T, \varphi \rangle$ car $\langle \varphi T, 1 \rangle = \langle T, \varphi \rangle$.

II.- LES ESPACES $\tilde{\mathcal{D}}'_{L^1}(E)$.

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe complet.

Définition 6 : $\tilde{\mathcal{D}}'_{L^1}(E)$ est l'espace des distributions à valeur dans E scalairement sommables (scalairement dans \mathcal{D}'_{L^1}).

On a l'isomorphisme $\tilde{\mathcal{D}}'_{L^1}(E) \approx \mathcal{L}(\dot{\mathcal{B}}; E)$. On en profite pour munir cet espace de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\dot{\mathcal{B}}$ (resp. sur les parties bornées).

Le premier de ces deux espaces peut être interprété en produit tensoriel

$$(\tilde{\mathcal{D}}'_{L^1})_c(E) \approx (\mathcal{D}'_{L^1})_c \hat{\otimes}_E E$$

INTÉGRALE D'UNE DISTRIBUTION A VALEURS VECTORIELLES.

Un élément \vec{T} de $\tilde{\mathcal{D}}'_{L^1}(E)$ définit une application continue $L_{\vec{T}} : \dot{\mathcal{B}} \rightarrow E$. Par bitransposition on en déduit une application ${}^t L_{\vec{T}} : \mathcal{B} \rightarrow E''$ (ou $\mathcal{B}_c \rightarrow E''_c$).

Définition 7 : $\int T_x dx = {}^t L_{\vec{T}}(1)$.

C'est un élément de E'' . Il est en général impossible de faire mieux : soit $E = \mathcal{B}$ et \vec{T} le noyau de l'identité $\delta_{x-y} : \vec{T} \in \tilde{\mathcal{D}}'_{L^1}(\dot{\mathcal{B}})$. Le

prolongement de T est l'application identique de \mathcal{B} dans \mathcal{B} . En particulier $\int T_x dx = 1 \in \mathcal{B}$ mais $\notin \dot{\mathcal{B}}$.

Dans certains cas importants pour la pratique $\int T_x dx = 1$ appartient à E . Il en est ainsi si $E = E''$.

Définition 8 : On dira que \vec{T} est strictement sommable lorsqu'elle définit une application de $\dot{\mathcal{B}}$ dans E continue sur les parties bornées de $\dot{\mathcal{B}}$ pour la topologie induite par \mathcal{E} . Alors T applique \mathcal{B} dans E , en particulier $\int T_x dx \in E$.

Lorsque E est un Montel cette condition est remplie, puisque T est même continue de \mathcal{B}_c dans E .

Conditions suffisantes de stricte sommabilité.

PROPOSITIONS 2.- Soit $\vec{T} \in \tilde{\mathcal{D}}'_{L^1}(E)$.

Si 1°) $\vec{T} = \alpha \vec{S}$ avec $\vec{S} \in \tilde{\mathcal{D}}'_{L^{p'}}(E)$, $\alpha \in \mathcal{D}_{L^p}$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} - 1 = 0$, $p, p' \neq 1, \infty$
 ou si 2°) $\vec{T} = \alpha \vec{S}$ avec $\vec{S} \in \tilde{\mathcal{D}}'_{L^1}(E)$, $\alpha \in \dot{\mathcal{B}}$
 alors \vec{T} est strictement sommable.

Démonstration : Soit φ_ν un ensemble borné de fonctions de \mathcal{B} . $\langle \alpha \vec{S}, \varphi_\nu \rangle = \langle \vec{S}, \alpha \varphi_\nu \rangle \in E$. Lorsque $\varphi_\nu \rightarrow 0$ pour la topologie induite par \mathcal{E} en restant bornée dans \mathcal{B} :

1°) alors $\alpha \varphi_\nu \rightarrow 0$ dans \mathcal{D}_{L^p} donc $\langle \vec{S}, \alpha \varphi_\nu \rangle \rightarrow 0$.

2°) $\alpha \varphi_\nu \in \dot{\mathcal{B}} \rightarrow 0$ dans $\dot{\mathcal{B}}$ donc $\langle \vec{S}, \alpha \varphi_\nu \rangle \rightarrow 0$.

Continuité de l'intégrale.

PROPOSITION 3.- $\vec{T} \rightarrow \int T_x dx$ est une application continue de $\mathcal{D}'_{L^1}(E)$ dans $E''_{\mathcal{E}}$.

III.- LE THÉORÈME DE FUBINI.

Intégrale partielle d'une distribution par rapport à une variable.

Une distribution de deux variables $T_{x,y}$ peut être considérée comme un élément de $\mathcal{D}'_x(\mathcal{D}'_y)$.

Définition 9 : $T_{x,y}$ est partiellement sommable par rapport à x si elle appartient à $(\mathcal{D}'_{L^1})_x(\mathcal{D}'_y)$.

en x

PROPOSITION 4.- L'intégrale d'une distribution de deux variables sommable par rapport à une variable x, est une distribution en y.

C'est parce que \mathcal{D}'_y est réflexif.

THÉORÈME 1 (de Fubini) : Soit $T_{x,y} \in (\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$ une distribution de deux variables, sommable. Alors

- 1°) elle est sommable en x ;
- 2°) la distribution $\int T_{x,y} dx$ est sommable en y ;
- 3°) $\int dy \int T_{x,y} dx = \int dx \int T_{x,y} dy = \iint T_{x,y} dx dy$.

Démonstration : Nous allons prouver le résultat suivant .

$$(1) \quad (\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y} \approx (\mathcal{D}'_{L^1})_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{H}} (\mathcal{D}'_{L^1})_y$$

Ce résultat implique le théorème.

Soit en effet $T \in (\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$. Elle appartient à $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{H}} (\mathcal{D}'_{L^1})_y$ donc a fortiori à $((\mathcal{D}'_{L^1})_x)' \widehat{\otimes}_{\mathbb{H}} \mathcal{D}'_y$, donc est sommable en x, et $\int T_{x,y} dx \in \mathcal{D}'_y$; de plus, $T \rightarrow \int T_{x,y} dx$ est continue de $(\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$ dans \mathcal{D}'_y et coïncide sur $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \otimes (\mathcal{D}'_{L^1})_y$ avec le produit tensoriel $\int_x \otimes 1_y$ de l'intégrale, forme linéaire continue sur $(\mathcal{D}'_{L^1})_x$, par 1_y , identité dans $(\mathcal{D}'_{L^1})_y$; donc ces 2 applications sont égales. Cela prouve que $\int T_{x,y} dx \in (\mathcal{D}'_{L^1})_y$, et que $T \rightarrow \int dy \int T_{x,y} dx$, composée de \int_y avec $\int_x \otimes 1_y$, n'est autre que $\int_x \otimes \int_y$.

On a alors par symétrie $\int dx \int T_{x,y} dy = \int dy \int T_{x,y} dx = (\int_x \otimes \int_y)(T)$. De plus, $\int_x \otimes \int_y$ et $\iint_{x,y}$ sont continues sur $(\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$ et coïncident sur $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \otimes (\mathcal{D}'_{L^1})_y$ donc sur $(\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$.

Il nous reste à montrer (1).

1°) $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \otimes (\mathcal{D}'_{L^1})_y$ est dense dans $(\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$ pour la topologie de ce dernier espace. En effet $\mathcal{E}'_{x,y}$ est dense, et $\mathcal{E}'_x \otimes \mathcal{E}'_y$ dense dans $\mathcal{E}'_{x,y}$.

2°) Désignons par K la topologie de $(\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$, K est plus fine que Π , sur $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \otimes (\mathcal{D}'_{L^1})_y$. Un élément du dual de Π sera en particulier une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{E}'_x \times \mathcal{E}'_y \approx \mathcal{E}'_{x,y}$. C'est donc une fonction indéfiniment différentiable φ . De plus l'ensemble des mesures de Dirac de $(\mathcal{D}'_{L^1})_x$ et $(\mathcal{D}'_{L^1})_y$ sont bornés, donc φ est bornée; en raisonnant ensuite sur les $D^p \delta_x(a)$ et $D^q \delta_y(b)$, on voit que toute dérivée de φ est bornée,

$\varphi \in \mathcal{B}_{x,y}$. Pour la même raison, un ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \times (\mathcal{D}'_{L^1})_y$ est nécessairement une partie bornée de $\mathcal{B}_{x,y}$. Donc la topologie π , topologie de la convergence uniforme sur les ensembles équi-continus de formes bilinéaires, est moins fine que K , convergence uniforme sur toutes les parties bornées de $\mathcal{B}_{x,y}$.

3°) π est plus fine que K sur $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \otimes (\mathcal{D}'_{L^1})_y$.

Le produit direct des distributions $(S_x, T_y) \rightarrow S_x \otimes T_y$ applique $(\mathcal{D}'_{L^1})_x \times (\mathcal{D}'_{L^1})_y \rightarrow (\mathcal{D}'_{L^1})_{x,y}$. Cette application étant séparément faiblement continue, et appliquant le produit de deux duals de Fréchet dans un dual de Fréchet est donc continue⁽¹⁾, or elle s'identifie à l'application canonique $(S_x, T_y) \rightarrow S_x \otimes T_y$, donc π est plus fine que K .

Finalement nous avons prouvé $\pi = K$, alors en vertu de 1°), le théorème est démontré.

(1) - Mémoire Dieudonné-Schwartz sur les espaces \mathcal{F} et \mathcal{LF} .