SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Propriétés de $E\widehat{\otimes}F$ pour E nucléaire

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 19, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A20_0>

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
Année 1953/1954
-:-:-:-

5 mai 1954

Exposé n° 19

PROPRIÉTÉS DE $E \hat{\otimes} F$ POUR E NUCLÉAIRE.

THÉORÈME 1.- Si E est nucléaire, F localement convexe séparé arbitraire, toute forme bilinéaire continue B sur $E \times F$ admet une décomposition

$$(1) \qquad B = \sum_{\nu} \lambda_{\nu} \, x'_{\nu} \otimes y'_{\nu}$$

où $\sum_{\nu} |\lambda_{\nu}| < \infty$, x'_{ν} (resp. y'_{ν}) équicontinues dans E' (resp. F'), et convergeant vers 0. De plus si B parcourt une partie équicontinue H' convexe équilibrée de $\mathcal{B}(E,F)$, on peut prendre les λ_{ν} et x'_{ν} fixes, et trouver des applications linéaires θ_{ν} de normes ≤ 1 de $(\mathcal{B}(E,F))_{H'}$ dans $F'_{A'}$, A' équicontinue de F', telles que (1) soit valable pour toute $B \in H'$ avec $y'_{\nu} = \theta_{\nu}(B)$.

DÉMONSTRATION.

L'application $\tilde{B}$, associée à B, de E dans F', est continue de norme ≤ 1 d'un E_U dans un $F'_{A'}$. Comme E est nucléaire, il existe $V \subset U$ tel que $\hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U$ soit nucléaire, donc l'injection de E_V dans E_U peut s'écrire

$$(2) \qquad 1 = \sum_{\nu} \lambda_{\nu} x'_{\nu} \otimes Z_{\nu} \quad , \quad x'_{\nu} \in (E_V)' = E'_{V^\circ} \quad , \quad Z_{\nu} \in \hat{E}_U \ .$$

Alors l'application $E_V \longrightarrow F'$, factorisée en $E_V \longrightarrow E_U \longrightarrow F'_{A'} \longrightarrow F'$ s'écrit

$$(3) \qquad \tilde{B} = \sum_{\nu} \lambda_{\nu} x'_{\nu} \otimes \tilde{B}(Z_{\nu})$$

En considérant $\tilde{B}(Z_{\nu}) = y'_{\nu}$ comme élément de $F'_{A'} \subset F'$ ($F'_{A'}$ étant complet) et en revenant à B, (3) donne (1). De plus si B parcourt H' équicontinue de $\mathcal{B}(E,F)$, on peut choisir U, V, A' fixes, donc les λ_{ν}, x'_{ν}, Z_{ν} fixes. On définira, pour tout ν, $\theta_{\nu} \in \mathcal{L}((\mathcal{B}(E,F))_{H'} ; F'_{A'})$ par

$$(4) \qquad \theta_{\nu}(B) = \tilde{B}(Z_{\nu})$$

et le théorème est démontré.

Il existe des variantes évidentes de ce théorème, obtenues en considérant des applications linéaires à la place de formes bilinéaires :

THÉORÈME 1 bis.- Si E est nucléaire, F localement convexe séparé arbitraire, toute application $\mathcal{E}$-bornée de F dans E' admet une décomposition

$$(5) \qquad u = \sum_{\nu} . \lambda_{\nu} f'_{\nu} \otimes e'_{\nu}$$

où $\sum_{\nu} |\lambda_{\nu}| < \infty$, f'_{ν} (resp. e'_{ν}) équicontinues dans F' (resp. E') et convergeant vers 0. De plus si u parcourt une partie $\mathcal{E}$-équibornée M de $\mathcal{L}(F;E')$, on peut prendre les λ_{ν} et e'_{ν} fixes, et trouver des applications linéaires θ_{ν} de normes ≤ 1 de $(\mathcal{L}(F;E'))_M$ dans $F'_{A'}$, A' équicontinue dans F', telles que (5) soit valable pour toute $u \in M$ avec $f'_{\nu} = \theta_{\nu}(u)$.

Il y a en effet correspondance biunivoque entre formes bilinéaires continues sur $E \times F$ et applications $\mathcal{E}$-bornées de F dans E'.

THÉORÈME 1 ter.- Si E est nucléaire, F localement convexe quasi-complet, toute application bornée de E dans F admet une décomposition

$$(6) \qquad u = \sum \lambda_{\nu} e'_{\nu} \otimes f_{\nu} \quad ,$$

où $\sum_{\nu} |\lambda_{\nu}| < \infty$, e'_{ν} équicontinues et convergeant vers 0 dans E', f_{ν} bornées et convergeant vers 0 dans F. De plus si u parcourt une partie équibornée M de $\mathcal{L}(E;F)$, on peut prendre les λ_{ν} et e'_{ν} fixes, et trouver des applications linéaires θ_{ν} de norme ≤ 1 de $(\mathcal{L}(E;F))_M$ dans F_A, A bornée équilibrée convexe de F telles que (6) soit valable pour toute $u \in M$, avec $f_{\nu} = \theta_{\nu}(u)$.

Il suffira de refaire la démonstration du théorème 1, avec une factorisation

$$(7) \qquad E \longrightarrow E_V \longrightarrow E_U \longrightarrow F_A \longrightarrow F \quad , \quad \hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U \text{ nucléaire.}$$

(En réalité, si les applications de M sont $\mathfrak{S}$-équibornées, $\mathfrak{S}$ étant une famille de parties bornées de F, on peut supposer que A est une partie appartenant à $\mathfrak{S}$ et sous cette forme c'est le théorème 1 ter qui contient tous les autres).

THÉORÈME 2.- Si E et F sont des espaces de Fréchet, E nucléaire, tout élément de $E \hat{\otimes} F$ admet une décomposition,

$$(8) \qquad X = \sum_{\nu} \lambda_{\nu} e_{\nu} \otimes f_{\nu} \quad ,$$

où $\sum_{\nu} |\lambda_{\nu}| < \infty$, e_{ν} et f_{ν} convergeant vers 0. De plus si X parcourt une partie bornée M de $E \hat{\otimes} F$, on peut prendre les λ_{ν} et e_{ν} fixes, et trouver des applications linéaires continues de norme ≤ 1 θ_{ν} de $(E \hat{\otimes} F)_M$

dans F_A , A partie bornée convexe équilibrée de F , telles que (8) soit valable pour toute $X \in M$ avec $f_\nu = \theta_\nu(X)$.

En effet $\tilde{X}$ est une application linéaire continue de E' dans F ; d'après un théorème connu sur les espaces $\mathcal{F}$ (Mémoire Dieudonné-Schwartz sur les $\mathcal{F}$ et $\mathcal{L}\mathcal{F}$) une telle application est bornée ; si $X \in M$, $\tilde{X}$ parcourt une partie équicontinue donc équibornée de $\mathcal{L}(E';F)$. Comme E' est nucléaire, il suffit d'appliquer 1 ter.

EXEMPLE.- $E = \mathcal{D}_{T^n}$, espace $\mathcal{D}$ du tore T^n ; F fréchet. Toute $\varphi \in \mathcal{D} \hat{\otimes} F = \mathcal{D}(F)$ admet un développement de Fourier.

$$\vec{\varphi} = \sum_\nu \vec{a}_\nu(\vec{\varphi})\, e^{2i\pi\nu.x} \tag{9}$$

La suite des $\vec{a}_\nu$ est à décroissance rapide dans F (son produit par $|\nu|^k$ est borné). Si alors $\vec{\varphi}$ parcourt une partie bornée M de $\mathcal{D}(F)$ l'ensemble des valeurs de $\vec{\varphi}$ est contenu dans une partie bornée B_0 de F ; de même l'ensemble des valeurs de la dérivée $D^p\vec{\varphi}$ dans une partie bornée B_p ; il existe une partie bornée B connexe équilibrée fermée, qui les absorbe toutes (axiome de dénombrabilité de Mackey pour les Fréchets). On peut donc dire que $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(F_B)$ et raisonner en remplaçant le Fréchet F par le Banach F_B ; nous poserons donc $F = F_B$. D'autre part, pour $\vec{\varphi} \in M$, la suite des $\vec{a}_\nu(\vec{\varphi})$ est à décroissance uniformément rapide, en ce sens que pour tout k fixé, l'ensemble des $|\nu|^k \|\vec{a}_\nu(\vec{\varphi})\|$ est borné pour $\vec{\varphi} \in M$ et $\nu \in Z^n$. La suite

$$c_\nu = \sup_{\vec{\varphi} \in M} \|\vec{a}_\nu(\vec{\varphi})\| \tag{10}$$

est donc une suite $\geqslant 0$ à décroissance rapide.

Alors, pour $\vec{\varphi} \in M$:

$$\vec{\varphi} = \sum_\nu \sqrt{c_\nu}\,\left(\sqrt{c_\nu}\; e^{2i\pi\nu.x}\right) \frac{\vec{a}_\nu(\vec{\varphi})}{c_\nu}, \tag{11}$$

de sorte que si l'on pose $\lambda_\nu = \sqrt{c_\nu}$, $e_\nu = \sqrt{c_\nu}\; e^{2i\pi\nu.x}$, $\theta_\nu(\vec{\varphi}) = \dfrac{\vec{a}_\nu(\vec{\varphi})}{c_\nu}$, on a une décomposition (8) .

COROLLAIRE.- Si E et F sont des Fréchets, E nucléaire, toute partie bornée de $E \hat{\otimes} F$ est contenue dans l'enveloppe convexe équilibrée fermée du produit tensoriel d'une partie bornée de E et d'une partie bornée de F .

REMARQUE.- On démontre qu'on peut améliorer les théorèmes précédents par des propriétés de "décroissance rapide". Par exemple, dans le théorème 2 on peut faire en sorte que la suite $|\lambda_\nu|$ soit à décroissance rapide, que la suite des

e_ν soit à décroissance rapide dans E, et que la suite des normes des θ_ν soit à décroissance rapide. C'est ce qu'on obtiendra dans l'exemple donné de $\mathcal{D}_{Tn}(F)$, en prenant la formule

$$(12) \qquad \vec{\varphi} = \sum_\nu c_\nu^{1/4}(c_\nu^{1/4}\, e^{2i\pi\nu\cdot x}) \frac{\vec{a}_\nu(\vec{\varphi})}{c_\nu^{\frac{1}{2}}}$$

<u>THÉORÈME 3.- Si E et F sont des Fréchets, E nucléaire, $\mathcal{B}(E,F) \approx (E \hat{\otimes} F)'$ muni de la topologie de la convergence bornée sur $E \hat{\otimes} F$, est isomorphe à $E' \hat{\otimes} F'$</u>

En effet, algébriquement, $\mathcal{B}(E,F) = \mathcal{L}(E;F')$ (parce que, E et F étant des Fréchets, toute application continue de E dans F' est bornée donc $\mathcal{E}$-bornée)

On sait alors que $E' \hat{\otimes} F'$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E;F')$ muni de la topologie de la convergence bornée, du fait que E' est nucléaire ; mais la topologie de la convergence bornée dans $\mathcal{L}(E;F')$ équivaut dans $\mathcal{B}(E,F)$ à la topologie de la convergence uniforme sur les produits tensoriels de parties bornées de E et F, elle-même équivalente à la convergence bornée sur $E \hat{\otimes} F$ en vertu du corollaire du théorème 2 .

On a donc, si E et F sont des Fréchets, E nucléaire, les isomorphismes suivants (la topologie d'un dual étant la topologie forte, la topologie de $\mathcal{L}(E;F)$ celle de la convergence bornée, la topologie de $\mathcal{B}(E,F)$ celle de la convergence bornée sur $E \hat{\otimes} F$ ou sur les produits tensoriels de parties bornées):

$$(13) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}(E;F) \approx E' \hat{\otimes} F \\ \mathcal{L}(F;E) \approx F' \hat{\otimes} E \\ \mathcal{B}(E,F) \approx E' \hat{\otimes} F' \approx (E \hat{\otimes} F)' \end{cases}$$

Si E, F, G sont 3 Fréchets, E et F nucléaires, on a

$$(14) \qquad \mathcal{B}(E,F;G) \approx \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(F;G)) \approx \mathcal{L}(F;\mathcal{L}(E;G)) \approx E' \hat{\otimes} F' \hat{\otimes} G$$