

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Espaces nucléaires. Propriétés de permanence et exemples

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 18, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A19_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESPACES NUCLÉAIRES. PROPRIÉTÉS DE PERMANENCE ET EXEMPLES.

PROPOSITION 1 .- Une condition nécessaire et suffisante pour que E soit nucléaire est que $\hat{E}$ le soit.

PROPOSITION 2 .- Si une application de E dans F est polynucléaire (composée de deux opérateurs nucléaires au moins), et si l'image de E est contenue dans un sous-espace complet F_1 de F , alors l'application de E dans F_1 est nucléaire.

Par hypothèse, on a $E \rightarrow G \rightarrow F$, les deux applications étant nucléaires. Comme un opérateur nucléaire est intégral, on peut factoriser en $E \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow \hat{F}$ où H est un Hilbert, donc $E \rightarrow H \rightarrow \hat{F}$, avec $E \rightarrow H$ nucléaire. L'image de E est alors un sous-espace H_1 de H . Et comme $\bar{H}_1$ s'applique dans F_1 , on a $E \rightarrow \bar{H}_1 \rightarrow F_1 \rightarrow F$. Comme $\bar{H}_1$ est un facteur direct de H , $E \rightarrow \bar{H}_1$ est nucléaire, d'où le résultat.

PROPOSITION 3 .- Si une application de E dans F complet est polynucléaire, et si elle applique un sous-espace fermé E_1 de E sur zéro, alors l'application quotient de E/E_1 dans F est nucléaire.

On peut factoriser en $E \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F$, G complet, H hilbertien, $G \rightarrow F$ nucléaire donc $E \rightarrow H \rightarrow F$, avec $H \rightarrow F$ nucléaire. E_1 s'applique dans H_1 , donc dans $\bar{H}_1$ (qui donne zéro). Il en résulte que E/E_1 s'applique dans $H/\bar{H}_1$ et que l'on a $E \rightarrow E/E_1 \rightarrow H/\bar{H}_1 \rightarrow F$.

Comme $\bar{H}_1$ est facteur direct, $H/\bar{H}_1 \rightarrow F$ est nucléaire, d'où le résultat.

PROPOSITION 4 .- Si E est nucléaire, tout sous-espace vectoriel E_1 de E est nucléaire.

Tout voisinage U_1 de E_1 peut être défini comme $U \cap E_1$, où U est un voisinage de E . Comme E est nucléaire, il existe un voisinage V de E plus petit que U et tel que $\hat{E}_V \rightarrow \hat{E}_U$ soit polynucléaire.

Posons $V_1 = V \cap E_1$:

- d'une part on a $(E_1)_{V_1}^\wedge \longrightarrow \hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U$ (polynucléaire)

- d'autre part $(E_1)_{V_1}^\wedge$ a son image dans $(E_1)_{U_1}^\wedge$. Donc $(E_1)_{V_1}^\wedge \longrightarrow (E_1)_{U_1}^\wedge$ est nucléaire. Donc E_1 est nucléaire.

PROPOSITION 5.— Si E est nucléaire, tout quotient E/F , où F est fermé, est nucléaire.

Soit U un voisinage saturé (par rapport à F) de E , $V \subset U$ tel que $\hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U$ soit polynucléaire, $\hat{V}$ le saturé de V . Mais $\hat{E}_V$ est un quotient de $\hat{E}_V$, et $\hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U$ se factorise $\hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_{\hat{V}} \longrightarrow \hat{E}_U$. D'après la proposition 3, $\hat{E}_{\hat{V}} \longrightarrow \hat{E}_U$ est nucléaire, donc E/F est nucléaire.

PROPOSITION 6.— Tout produit d'espaces nucléaires est nucléaire.

Le dual du produit est la somme directe des E'_i ; les parties équicontinues y sont somme directe d'un nombre fini de parties équicontinues et si A'_i est équicontinue dans E'_i , il existe B'_i équicontinue telle que $(E'_i)_{A'_i} \longrightarrow (E'_i)_{B'_i}$ soit nucléaire, d'où le résultat.

PROPOSITION 7.— Toute somme directe topologique dénombrable d'espaces nucléaires est nucléaire.

On peut supposer les E_i complets. Le dual de $E = \sum E_i$ est $E' = \prod E'_i$. On peut y prendre pour parties équicontinues les produits de parties équicontinues. Posons $A' = \prod_i A'_i$ et soit $B'_i \subset E'_i$, telle que $(E'_i)_{A'_i} \longrightarrow (E'_i)_{B'_i}$ soit nucléaire. Il suffit de montrer que $E'_{A'} \longrightarrow \prod_i (E'_i)_{B'_i}$ est nucléaire.

$(\prod_i (E'_i)_{B'_i})$ est un vrai produit dénombrable d'espaces de Banach, $E'_{A'}$ le sous-espace engendré par $\prod_i A'_i$ n'est pas le produit des $(E'_i)_{A'_i}$, c'est d'ailleurs un Banach).

$(E'_i)_{A'_i} \longrightarrow (E'_i)_{B'_i}$ est nucléaire, donc peut être représenté

$$\text{par } u_i = \sum_n \lambda_{n,i} e'_{n,i} \otimes f_{n,i}$$

En prenant $e'_{n,i}$ dans la boule unité du dual de $(E'_i)_{A'_i}$ et $f_{n,i}$ dans une boule convenable de $(E'_i)_{B'_i}$, de façon que

$$\sum_n |\lambda_{n,i}| \leq \frac{1}{2^i},$$

les $e'_{n,i}$ sont tous dans la boule unité de $(E'_{A'})'$ et les $f_{n,i}$ sont bornés (puisque bornés dans chaque composante), C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1.— Toute limite projective d'espaces nucléaires est nucléaire (car c'est un sous-espace du produit).

COROLLAIRE 2.— Toute limite inductive dénombrable d'espaces nucléaires est nucléaire (car c'est un quotient de la somme directe).

PROPOSITION 8.— Si E et F sont nucléaires, $E \hat{\otimes} F$ est nucléaire. Car

$$(E \otimes F) \hat{\otimes}_\varepsilon G = E \hat{\otimes}_\varepsilon (F \hat{\otimes}_\varepsilon G) = E \hat{\otimes}_\varepsilon (F \hat{\otimes}_\pi G) = E \hat{\otimes}_\pi (F \hat{\otimes}_\pi G) = (E \otimes F) \hat{\otimes}_\pi G$$

THÉOREME .— Soit E un espace du type $(\mathcal{F})$; E est nucléaire, si et seulement si son dual fort est nucléaire.

a) Si E est nucléaire et de type $(\mathcal{F})$, E' est nucléaire.

Soit G' le dual d'un Banach, si $G' \rightarrow E$ est faiblement continu, elle est dans $\mathcal{L}_\varepsilon(G', E) \approx E \hat{\otimes} G$ puisque E est nucléaire. En outre, comme E est de type $(\mathcal{F})$, elle provient d'un élément de $E_A \hat{\otimes} G_B$. Donc $G' \rightarrow E$ est nucléaire. Soit maintenant $F \rightarrow E$ une application continue d'un Banach dans E . Posons $F' = G$. La bitransposée $F'' = G' \rightarrow E'' = E$ est faiblement continue, donc nucléaire d'après ce que nous venons de voir. Sa restriction à F , soit $F \rightarrow E$ est nucléaire. Comme E est le dual de E' cela prouve que E' est nucléaire.

b) Si E est de type $(\mathcal{F})$ et si E' est nucléaire, E est nucléaire.

E' est nucléaire donc réflexif; alors E , sous-espace fermé de E'' , a le même dual E' , donc $E = E''$, E est réflexif.

Montrons que pour F , Banach quelconque, $E \hat{\otimes}_\pi F \rightarrow E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est un isomorphisme topologique.

(1) Soit $u \in E \hat{\otimes}_\varepsilon F$. L'application $E' \rightarrow F$ qu'elle définit est continue, donc nucléaire, elle provient donc de $E'' \hat{\otimes}_\pi F$ c'est-à-dire de $E \hat{\otimes}_\pi F$: tout élément de $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est image d'un élément de $E \hat{\otimes}_\pi F$.

Donc $E \hat{\otimes}_\pi F \rightarrow E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est épijective.

(2) Montrons que $E \hat{\otimes}_\pi F \rightarrow E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est injective. En passant aux duals, il faut montrer que $J(E, F)$ est dense dans $B(E, F)$, pour la topologie de la convergence simple sur $E \hat{\otimes}_\pi F$. Comme tout élément de $E \hat{\otimes}_\pi F$ est dans l'enveloppe convexe équilibrée fermée d'un produit tensoriel de 2 compacts (car E et F Fréchets), il suffira de montrer que $E' \otimes F' \subset J(E, F)$ est dense dans $B(E, F)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les produits de 2 compacts.

Or un élément de $B(E, F)$ est une application $F \rightarrow E'$ et un élément de

$E' \otimes F'$ est une application de rang fini $F \rightarrow E'$. E' est tonnelé puisque réflexif et Schwartz (puisque nucléaire) donc Montel, donc E est Montel, et $E' = E'_c$.

Puisque E'_c est nucléaire, il a la propriété d'approximation, et l'application $F \rightarrow E'_c$ peut être approchée par des applications de rang fini, donc $E' \otimes F'$ est bien dense dans $B(E, F)$, et $E \hat{\otimes}_{\pi} F \rightarrow E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$ est injective.

Etant à la fois épijective et injective (biunivoque sur), il résulte du théorème des homomorphismes de Banach, que l'application $E \hat{\otimes}_{\pi} F \rightarrow E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$ est un isomorphisme topologique.

PROPOSITION 9.— Si E est nucléaire et de type (γ) et si F est nucléaire complet, $\mathcal{L}(E; F)$ est nucléaire, et $\mathcal{L}(E; F) \approx E' \hat{\otimes} F$. En effet, E' est nucléaire donc $E' \hat{\otimes} F = \mathcal{L}_{\varepsilon}(E''_c; F)$ est nucléaire. Mais $\mathcal{L}_{\varepsilon}(E''_c; F) = \mathcal{L}(E; F)$.

REMARQUE.— Si E est complet, E' semi-réflexif entraîne E semi-réflexif (car E est fermé dans E''_b et a le même dual). Alors $E' \hat{\otimes} F \approx \mathcal{L}_{\varepsilon}(E''_{\gamma}; F)$ si E' est nucléaire complet et F complet. Puis $\mathcal{L}_{\varepsilon}(E''_{\gamma}; F) \approx \mathcal{L}(E; F)$ si E a la topologie γ . Donc la conclusion subsiste : $E' \hat{\otimes} F = \mathcal{L}(E; F)$ et est nucléaire et complet si E' et F sont nucléaires et complets, et si E a la topologie γ et est complet.

EXEMPLES D'ESPACES NUCLEAIRES.

1.- $\mathcal{O}_{\mathbb{T}^m}$ est nucléaire.

Montrons pour cela que l'espace des suites $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ à décroissance rapide à un indice ($m=1$) est nucléaire.

Prenons pour $A' \subset E'$ l'ensemble des suites majorées par n^p , pour B' par n^{p+2} , pour $E'_{A'}$: $\|s\| = \sup_n \frac{|s_n|}{n^p}$, pour $E'_{B'}$: $\|s\| = \sup_n \frac{|s_n|}{n^{p+2}}$

Appelons e_n la suite dont l'unique terme $\neq 0$ est $s_n = 1$; les e_n forment une base topologique de E , soit e'_n la base duale dans E' .

Dans $(E'_{A'})'$, $\|e'_n\| = n^p$, et dans $E'_{B'}$, $\|e_n\| = n^{-p-2}$.

L'application identique de $E'_{A'}$ dans $E'_{B'}$ s'écrit alors :

$$1 = \sum_n e'_n \otimes e_n = \sum_n \frac{1}{n^2} \left(\frac{e'_n}{n^p}\right) \otimes (e_n n^{p+2}),$$

les deux derniers termes sont bornés, $\sum_n \frac{1}{n^2}$ est convergente donc $E'_{A'} \rightarrow E'_{B'}$ est nucléaire. Comme les A' considérées forment une famille fondamentale de

parties équicontinues du dual, on en déduit bien que l'espace E des suites à décroissance rapide est nucléaire. Il est isomorphe par Fourier à $\mathcal{O}_{T^1}$, et $\mathcal{O}_{T^m}$ est la ^{m-ième} puissance tensorielle $\mathcal{E}$ -topologique complétée de $\mathcal{O}_{T^1}$, donc nucléaire.

2.- Du résultat précédent on déduit que sont nucléaires :

- a) $\mathcal{E}$. Car $\varphi \in \mathcal{E}$ converge vers zéro si et seulement si $\alpha\varphi \rightarrow 0$ pour toute α à support compact. Mais pour α donnée $\alpha\varphi$ est une fonction sur un tore T^n défini à partir d'un cube contenant le support de α . Donc on a des applications $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{T^m}$ qui font apparaître $\mathcal{E}$ comme limite projective d'espaces $\mathcal{O}_{T^m}$, donc $\mathcal{E}$ est nucléaire.
- b) $\mathcal{O}$. Car c'est une limite inductive d'espaces $\mathcal{O}_K$ dénombrables et $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{E}$ est nucléaire.
- c) $\mathcal{S}$. Car c'est le sous-espace de l'espace $\mathcal{O}$ d'un compact (sphère ou tore).
- d) $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{S}'$ qui sont duals d'espaces de type $(\mathcal{F})$ nucléaires.
- e) $\mathcal{O}'$ comme limite projective de $(\mathcal{O}_K)'$ dénombrables. ($\mathcal{O}_K$ est un sous-espace de $\mathcal{O}$, d'où une épijection $\mathcal{O}' \rightarrow (\mathcal{O}_K)'$; la convergence des distributions est purement locale, donc la topologie de $\mathcal{O}'$ est limite projective de celles des $(\mathcal{O}_K)'$. Plus généralement si E est limite inductive stricte d'une suite d'espaces E_n complets, un borné de E est nécessairement dans un E_n , donc la topologie de E' est limite projective des E'_n par les épijections $E' \rightarrow E'_n$; si les E'_n sont nucléaires, E' est nucléaire).
- f) $\mathcal{G}_M$ et $\mathcal{G}_G$ sont munis de la topologie induite par $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ qui est nucléaire, car $\mathcal{S}$ est nucléaire de type $(\mathcal{F})$, donc sont nucléaires.