

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Formes bilinéaires intégrales et opérateurs intégraux

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 16, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A17_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 16FORMES BILINÉAIRES INTÉGRALES ET OPÉRATEURS INTÉGRAUX

Les espaces vectoriels topologiques E et F considérés dans cet exposé sont des espaces de Banach.

1.- FORMES BILINÉAIRES INTÉGRALES.

Rappelons (Cf exposé n° 7) qu'une forme bilinéaire sur $E \times F$ est dite intégrale si la forme linéaire sur $E \otimes F$ qui lui est associée est continue sur $E \otimes_{\mathcal{E}} F$. On désigne par $J(E, F)$ l'espace des formes bilinéaires intégrales sur $E \times F$; on munit $J(E, F)$ de la norme $\| \cdot \|_J$ de dual de $E \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} F$.

Soit u_1 une forme bilinéaire intégrale sur $E_1 \times F_1$; soit v une application continue de E dans E_1 , et w une application continue de F dans F_1 ; la forme bilinéaire (image réciproque) sur $E \times F$: $u(x, y) = u_1(v(x), w(y))$ est intégrale et de plus $\|u\|_J \leq \|v\| \cdot \|w\| \cdot \|u_1\|_J$ (ceci résulte par transposition de ce que $v \otimes w$ est une application continue de $E \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} F$ dans $E_1 \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} F_1$, de norme $\|v\| \cdot \|w\|$).

- Proposition 1 - Soient E_1 un sous-espace de E , et F_1 un sous-espace de F . Une forme bilinéaire intégrale sur $E_1 \times F_1$ se prolonge en une forme bilinéaire intégrale sur $E \times F$ de même norme intégrale.

La norme $\mathcal{E}$ sur $E_1 \otimes F_1$ est induite par la norme $\mathcal{E}$ sur $E \otimes F$, d'où par Hahn-Banach la proposition 1.

- Modèle-type de forme bilinéaire intégrale.

Soit X un compact, dx une mesure de Radon positive de masse + 1 sur X . La forme bilinéaire $(f, g) \mapsto \int_X f g dx$ est une forme bilinéaire intégrale de norme intégrale 1 sur $C(X) \times C(X)$ car elle peut s'écrire :

$$\int \delta_{(a)} \otimes \delta_{(a)} da \quad (\delta_{(a)} = \text{masse + 1 au point } a)$$

(da étant ici considéré comme une mesure sur la diagonale de $X \times X \subset C'(X \times X)$). Une telle forme bilinéaire sera dite forme bilinéaire intégrale type associée à X et dx .

Si maintenant u est une forme bilinéaire intégrale sur $E \times F$, on sait

qu'on peut écrire

$$u(x,y) = \int_{A' \times B'} \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle d\mu(x', y')$$

(A' boule unité de E' ; B' boule unité de F' ; $d\mu$ mesure de Radon positive sur $A' \times B'$) .

Prenons $X = A' \times B'$ et $d\xi = d\mu(x', y')$; soit α la forme intégrale type associée à X et $d\xi$.

L'application $v : x \mapsto [(x', y') \mapsto \langle x, x' \rangle]$ applique E dans $C(X)$

L'application $w : y \mapsto [(x', y') \mapsto \langle y, y' \rangle]$ applique F dans $C(X)$ et ces applications sont continues.

u est image réciproque de α par les applications v et w . Par conséquent :

- Proposition 2 - Pour qu'une forme bilinéaire soit intégrale de norme intégrale ≤ 1 , il faut et il suffit qu'elle soit image réciproque par des applications continues de norme ≤ 1 d'une forme bilinéaire intégrale type.

On obtient le même résultat en remplaçant $C(X)$ par $L^\infty_{(dx)}(X)$ (en effet L^∞ est isomorphe à un espace $C(\tilde{X})$, $\tilde{X}$ compact stonien, l'intégrale par rapport à dx étant identique à l'intégrale par rapport à une mesure $\tilde{dx}$ sur $\tilde{X}$) .

- Corollaire. Prolongement à $E'' \times F''$.

Soit u une forme bilinéaire intégrale sur $E \times F$. u se prolonge de manière unique en une forme bilinéaire intégrale sur $E'' \times F''$, séparément faiblement continue et de même norme intégrale.

u est image réciproque d'une forme bilinéaire intégrale type α sur $L^\infty \times L^\infty$.

Les applications continues $\begin{cases} E \rightarrow L^\infty \\ F \rightarrow L^\infty \end{cases}$ ont pour bitransposées les applications continues $\begin{cases} E'' \rightarrow L^{\infty''} \\ F'' \rightarrow L^{\infty''} \end{cases}$

Il existe d'autre part une projection canonique de norme égale à 1 , $L^{\infty''} \rightarrow L^\infty$, faiblement continue (pour les dualités $(L^{\infty''}, L^{\infty'})$ et (L^∞, L^1)) (c'est la transposée de $L^1 \rightarrow L^{1''}$) ; d'où les applications continues $\begin{cases} E'' \rightarrow L^\infty \\ F'' \rightarrow L^\infty \end{cases}$ L'image réciproque de α par ces applications est une forme bilinéaire intégrale sur $E'' \times F''$, il est immédiat qu'elle prolonge u ; elle est faiblement séparément continue (pour la dualité (E'', E') et (F'', F')) . C'est donc la seule forme bilinéaire séparément faiblement continue sur $E'' \times F''$ qui prolonge u .

- Remarque - Une forme bilinéaire continue sur $E \times F$ admet toujours un prolongement à $E'' \times F''$, mais ce prolongement n'est pas nécessairement unique, et n'est

pas en général séparément faiblement continu.

2.- OPÉRATEURS INTÉGRAUX.

Un élément u de $\mathcal{L}(E;F)$ est dit intégral si la forme bilinéaire sur $E \times F'$: $v(x',y') = \langle u(x), y' \rangle$ est intégrale. On pose $\|u\|_{\text{int}} = \|v\|_J$.

- Proposition 3 - Pour que u soit intégral et que $\|u\|_{\text{int}} \leq 1$, il faut et suffit que u appartienne à $(A' \otimes B)^{\circ\circ}$ dans $\mathcal{L}(E;F)$ simple faible (A' désigne la boule unité de E' et B la boule unité de F)

En effet pour que u soit intégral de norme ≤ 1 , il faut et il suffit que v appartienne à $(A' \otimes B'')^{\circ\circ}$ dans $B(E, F')$ pour la topologie définie par la dualité $(B(E, F'), E \otimes F')$, (B'' boule unité de F''); c'est-à-dire que, dans $\mathcal{L}(E, F'')$, u appartienne à $(A' \otimes B'')^{\circ\circ}$ pour la topologie de la convergence simple faible (c'est-à-dire la topologie définie par la dualité : $(\mathcal{L}(E, F''), E \otimes F')$). Comme B est faiblement dense dans B'' , $(A' \otimes B'')^{\circ\circ} = (A' \otimes B)^{\circ\circ}$.

C.Q.F.D.

La boule unité de $L^1(E;F)$ étant dense dans $(A' \otimes B)^{\circ\circ}$, on voit que tout opérateur nucléaire est intégral et que la norme nucléaire est supérieure à la norme intégrale.

(Dans tous les cas connus, la norme nucléaire est égale à la norme intégrale)
De l'expression des formes bilinéaires intégrales résulte aussitôt que : u est intégral de norme intégrale ≤ 1 si et seulement si :

$$\begin{cases} 1^\circ) & u \in \mathcal{L}(E;F) \\ 2^\circ) & \text{dans } \mathcal{L}(E;F''), \text{ on peut écrire } u = \int_{A' \times B''} x' \otimes y'' d\mu(x', y'') \end{cases}$$

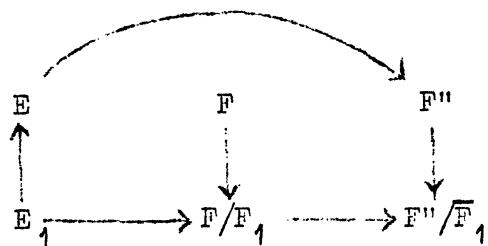
(μ : mesure de Radon complexe, $\int |d\mu| \leq 1$)

- Proposition 4 - Tout composé d'un opérateur intégral par des opérateurs continus est intégral.

Supposons qu'il existe quatre espaces E, F, G, H ; une application intégrale $u : F \rightarrow G$; deux applications continues $\alpha : E \rightarrow F$ et $\beta : G \rightarrow H$
 $E \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{\beta} H$ $E \xrightarrow{\alpha} F$ $G \xrightarrow{\beta} H$. u définit une forme bilinéaire v intégrale sur $F \times G'$; d'autre part $\beta \circ u \circ \alpha$ définit une forme bilinéaire sur $E \times H'$ qui est $v \circ (\alpha \otimes \beta)$, donc qui est intégrale; par suite $\beta \circ u \circ \alpha$ est intégrale.

- Proposition 5 - On suppose que E_1 est un sous-espace de E , F/F_1 un quotient de F par un sous-espace fermé F_1 , et que u est une application intégrale $E_1 \rightarrow F/F_1$. On peut remonter u en une application intégrale de même norme $E \rightarrow F''$ (mais pas, en général, en une application intégrale $E \rightarrow F$).

En effet u définit une forme bilinéaire intégrale sur $E_1 \times F_1^\perp$; celle-ci



se prolonge à $E \times F'$ avec une norme égale
(proposition 1) .

- Factorisation des opérateurs intégraux.

Soit X un compact, dx une mesure positive sur X , de masse $+1$. L'immersion $L^\infty \rightarrow L^1$ est une application intégrale, qui sera dite application intégrale-type. Soit u une application intégrale $E \rightarrow F$, v la forme bilinéaire définie par u sur $E \times F'$. Il existe X et dx tels que v soit image réciproque de la forme intégrale type sur $C(X) \times C(X)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{E} & & \text{F}' \\
 \searrow & & \swarrow \\
 \text{C}(X) \times \text{C}(X) & &
 \end{array}$$

En revenant aux opérateurs on a une factorisation de u :

$$E \rightarrow C(X) \rightarrow C'(X) \rightarrow F''$$

La première application est $E \rightarrow L^\infty$ (car $C(X) \subset L^\infty$). La deuxième se prolonge en l'application identique $L^\infty \rightarrow L^1$ c'est-à-dire :

- Proposition 6 - Toute application intégrale de norme intégrale ≤ 1 se factorise.: $E \rightarrow L^\infty \rightarrow L^1 \rightarrow F''$ où $L^\infty \rightarrow L^1$ est une application intégrale type (injection canonique) et où les applications continues $E \rightarrow L^\infty$ et $L^1 \rightarrow F''$ ont une norme ≤ 1 et réciproquement.

On peut remplacer $L^\infty \rightarrow L^1$ par $L^\infty \rightarrow L^2 \rightarrow L^1$, donc toute application intégrale se factorise : $E \rightarrow H_1 \rightarrow F''$ où H_1 est un espace de Hilbert, appelons H l'espace préhilbertien image de E dans H_1 ; alors u se factorise en $E \rightarrow H \rightarrow F$; comme F est supposé complet, on peut (en prolongeant par continuité à $\hat{H}$) supposer H hilbertien. Mais la réciproque est fautive : une application ainsi factorisée n'est pas nécessairement intégrale (contre exemple : l'application identique d'un espace de Hilbert dans lui-même).

- Remarque - Si une application u de E dans F'' est intégrale et si $u(E) \subset F$, u est intégrale de E dans F avec la même norme intégrale. En effet la forme bilinéaire qu'elle définit sur $E \times F''$ est intégrale, donc a fortiori sa restriction à $E \times F'$ (le même résultat n'est pas valable si on remplace intégral par nucléaire). D'ailleurs :

- Proposition 7 - Toute application intégrale $E \rightarrow G'$, de norme intégrale ≤ 1 , admet une factorisation $E \rightarrow L^\infty \rightarrow L^1 \rightarrow G'$ où $L^\infty \rightarrow L^1$ est une application intégrale-type, et où $E \rightarrow L^\infty$ et $L^1 \rightarrow G'$ sont de norme ≤ 1 . Pour que u soit intégrale de E dans G' il faut et il suffit que la forme bilinéaire qu'elle définit sur $E \times G$ soit intégrale.

En effet, elle se factorise en $E \rightarrow L^\infty \rightarrow L^1 \rightarrow G''$ et il existe une

projection de norme ≤ 1 , $G'' \rightarrow G'$, transposée de l'injection $G \rightarrow G''$.
La fin résulte du corollaire de la proposition 2.

- Proposition 8 - Pour qu'une application soit intégrale, il faut et il suffit que sa transposée le soit, et $\|u\|_{\text{int}} = \|{}^t u\|_{\text{int}}$.

En effet, le fait que $u : E \rightarrow F$ (resp. ${}^t u : F' \rightarrow E'$) soit intégrale, est équivalent, d'après la définition (resp. la proposition 7) au fait que la forme bilinéaire associée sur $E \times F'$ est intégrale, et la norme intégrale de u (resp. ${}^t u$) est celle de la forme bilinéaire.

- Applications intégrales et applications nucléaires.

Si E et F sont des espaces de Hilbert, toute application intégrale est nucléaire et la norme intégrale est égale à la norme nucléaire : en effet $E' \hat{\otimes}_{\Pi} F = J(E, F')$ (exposé n° 13) [C'est faux pour des préhilbertiens non complets].

Dans le cas général, nous démontrerons seulement la :

- Proposition 9 - Le produit de trois opérateurs intégraux est un opérateur nucléaire.

En effet les applications $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ peuvent se factoriser en :
 $A \rightarrow H_1 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow H_2 \rightarrow D$ (H_1, H_2 espaces de Hilbert). $H_1 \rightarrow H_2$ est intégral car $B \rightarrow C$ est intégral ; donc $H_1 \rightarrow H_2$ est nucléaire ; donc $A \rightarrow D$ est nucléaire.

C.Q.F.D.

Un opérateur intégral n'est pas nucléaire en général (Exemple : l'injection canonique $L^\infty \rightarrow L^1$ n'est même pas compacte, donc n'est pas nucléaire). Mais on peut démontrer que le composé d'une application intégrale $E \rightarrow F$ et d'une application faiblement compacte $F \rightarrow G$ est nucléaire.

En particulier, le produit de deux opérateurs intégraux est nucléaire. Si F est réflexif, l'identité est faiblement compacte ; dans tout opérateur intégral $E \rightarrow F$ est nucléaire si F est réflexif.