SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

L'espace $C(K; E)$

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 9, p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A10_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 9

L'ESPACE $C(K; E)$

L'ESPACE $C(K; E)$

C'est l'espace des fonctions continues sur un compact K , à valeurs dans un espace vectoriel topologique E . Si $\vec{\varphi}$ est une telle fonction vectorielle, sa valeur en un point x de K est un élément $\vec{\varphi}(x)$ de E .

On prend la topologie de la convergence uniforme : alors, dire que $\vec{\varphi} \rightarrow 0$ est équivalent à

(1) $\vec{\varphi}(x) \rightarrow 0$ dans E uniformément lorsque x parcourt K .

Si $\leftarrow{o'}$ est un élément de E' , $x \rightarrow \langle \vec{\varphi}(x), \leftarrow{o'} \rangle$ définit une fonction scalaire continue $\langle \vec{\varphi}, \leftarrow{o'} \rangle$. Il existe donc, lorsque $\vec{\varphi}$ est fixée, une application linéaire $L_{\vec{\varphi}} : \leftarrow{o'} \rightarrow \langle \vec{\varphi}, \leftarrow{o'} \rangle$ de $E' \rightarrow C(K)$.

Si H' est une partie équicontinue de E' , on a une condition équivalente à (1) :

(2) $\langle \vec{\varphi}(x), \leftarrow{o'} \rangle \rightarrow 0$ uniformément pour $x \in K$ et $\leftarrow{o'} \in H'$, ou encore

(3) $\langle \vec{\varphi}, \leftarrow{o'} \rangle \rightarrow 0$ dans $C(K)$ uniformément pour $\leftarrow{o'} \in H'$

ce qui ramène la topologie sur $C(K, E)$ à la topologie de la convergence uniforme dans un espace vectoriel scalaire $C(K)$.

Les applications linéaires $L_{\vec{\varphi}}$ transforment toute partie équicontinue de E' en partie bornée de $C(K)$ (d'après les propriétés de $L_{\vec{\varphi}}$, il est équivalent de dire que $\langle \vec{\varphi}(x), \leftarrow{o'} \rangle$ reste bornée lorsque $x \in K$ et $\leftarrow{o'} \in H'$, ou que $\langle \vec{\varphi}, \leftarrow{o'} \rangle$ parcourt une partie bornée de $C(K)$ lorsque $\leftarrow{o'}$ parcourt une partie équicontinue H' de E').

Si l'on désigne par $\mathcal{L}(E', C(K))$ l'espace des applications linéaires de E' dans $C(K)$ transformant toute partie équicontinue de E' en une partie bornée de $C(K)$, on lui met la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E' ; ainsi topologisé on le notera

$$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}(E'; C(K))$$

PROPOSITION 1 - $C(K) \otimes_{E'} E$ est un sous-espace vectoriel topologique de $C(K, E)$

En effet on sait déjà (exposé n° 2) que $C(K) \otimes E$ est un sous-espace

de $C(K;E)$ (à savoir la réunion des $C(K;F)$, F de dimension finie dans E).

De plus la topologie $\mathcal{E}$ est précisément la topologie induite par $\Lambda_{\mathcal{E}}(E'; C(K))$.

PROPOSITION 2 - Si E est complet, $C(K) \widehat{\otimes}_{\mathcal{E}} E = C(K,E)$.

On sait en effet (Cf. Bourkaki) :

1°) que $C(K,E)$ est complet

2°) que $C(K) \otimes E$ est dense dans $C(K,E)$.

PROPOSITION 3 - Si E est normé complet, les espaces $C(K) \widehat{\otimes}_{\mathcal{E}} E$ et $C(K,E)$ sont des Banach qui ont la même norme.

$$\begin{aligned} \text{Car } \|\varphi\|_{C(K,E)} &= \sup_{x \in K} \|\vec{\varphi}(x)\|_E = \sup_{\substack{x \in K \\ \|e'\| \leq 1}} |\langle \vec{\varphi}(x), e' \rangle| = \\ &= \sup_{\|e'\| \leq 1} \|\langle \vec{\varphi}, e' \rangle\|_{C(K)} = \|\mathcal{L}_{\vec{\varphi}}\| = \|\vec{\varphi}\|_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

COROLLAIRE 1 - Si x (resp. y) parcourt un compact H (resp. K) :

$$C_{x,y} = C_x \otimes C_y \quad \text{car} \quad C_{x,y} = C_x(C_y) = C_y(C_x).$$

GÉNÉRALISATIONS - $C_x[C_y(E)] = C_y[C_x(E)] = C_{xy}(\square) = C_x \widehat{\otimes}_{\mathcal{E}} C_y \widehat{\otimes}_{\mathcal{E}} E$
 $C_x(E) \widehat{\otimes}_{\mathcal{E}} C_y(F) = C_{x,y}(E \widehat{\otimes}_{\mathcal{E}} F)$
 $J[C_x, C_y] = (C_x \widehat{\otimes}_{\mathcal{E}} C_y)' = (C_{x,y})' = C'_{x,y}$ (Espace des mesures)

Il est ici facile d'interpréter un élément de $J(C_x, C_y)$ comme forme bilinéaire intégrale sur $C_x \times C_y$. Un tel élément est en effet une mesure $d\mu(x,y)$. Alors

$$\iint_{H \times K} \varphi(x) \psi(y) d\mu(x,y) = \iint_{H \times K} \langle \varphi, \delta_{(a)} \rangle \langle \psi, \delta_{(b)} \rangle d\mu(a,b)$$

$$\text{d'où } d\mu = \int_{H \times K} \delta_{(a)} \otimes \delta_{(b)} d\mu(a,b)$$

l'intégrale étant prise sur le faiblement compact des points $\delta_{(a)} \otimes \delta_{(b)}$ de $H' \otimes K'$, pour la topologie de la convergence simple sur $C(H) \times C(K)$.

COROLLAIRE 2 - Si u (resp. v) est une application linéaire continue de C_x dans C_y (resp. E dans F complets), on peut la prolonger en une application linéaire continue $u \otimes v$ de $C_x(E)$ dans $C_y(F)$, vérifiant $u(\vec{\varphi}e) = u(\vec{\varphi})v(e)$.

PROPOSITION 4 - $C(K;E) = C(K) \hat{\otimes} E = \mathcal{L}_E(E'_c; C(K))$. Autrement dit l'hypothèse générale de Banach est réalisée ici.

1ère Démonstration - Soit L une application linéaire continue de E'_c dans $C(K)$. Pour $\mu \in C'(K)$, $e' \rightarrow \mu(L(e'))$ est faiblement continue sur E' ; en prenant en particulier $\mu = \delta_x$, masse + 1 en x , on voit qu'il existe un élément $\vec{\varphi}(x)$ de E tel que $\langle \vec{\varphi}(x), e' \rangle = L(e')(x)$ ou $\langle \vec{\varphi}, e' \rangle = L(e')$. $\vec{\varphi}$ est scalairement continue, il faut montrer qu'elle est continue. Pour cela il faut voir que si $x \rightarrow x_0$ dans K , $\vec{\varphi}(x)$ converge vers $\vec{\varphi}(x_0)$ dans E donc que $\langle \vec{\varphi}(x), e' \rangle$ converge vers $\langle \vec{\varphi}(x_0), e' \rangle$ uniformément pour $e' \in H'$ équicontinue; autrement dit que lorsque e' parcourt H' , $\langle \vec{\varphi}, e' \rangle$ parcourt un ensemble équicontinu de fonctions numériques sur K . Or par hypothèse L transforme H' en une partie relativement compacte de $C(K)$, donc équicontinue d'après Ascoli.

2ième Démonstration - Soit tL la transposée de L ; c'est une application linéaire continue de $(C'(K))_c$ dans E . Elle est donc continue sur la boule unité de $C'(K)$, pour la topologie faible de $C'(K)$ et la topologie initiale de E . Or $x \rightarrow \delta_x$ plonge le compact K dans la boule unité faible de $C'(K)$; donc tL définit une fonction $\vec{\varphi}$ continue de K à valeurs dans E . Le retour à L montre que $\langle \vec{\varphi}, e' \rangle = L(e')$, puisque $\langle \vec{\varphi}(x), e' \rangle = \langle {}^tL \delta_x, e' \rangle = L(e')(x)$.

PROPOSITION 5 - Si $\vec{\varphi} \in C(K;E)$, E complet, $\mu \in C'(K)$, on peut définir l'intégrale $\mu(\vec{\varphi}) = \int_K \vec{\varphi}(x) d\mu(x) \in E$, par

$$\langle \mu(\vec{\varphi}), e' \rangle = \mu(\langle \vec{\varphi}, e' \rangle) \text{ pour tout } e' \in E'$$

L'image par $\mu \rightarrow \mu(\vec{\varphi})$ de la boule unité de $C'(K)$ est un compact de E ; si μ converge faiblement vers 0 dans $C'(K)$ en restant bornée, $\mu(\vec{\varphi})$ converge vers 0 dans E .

En effet, $\mu \rightarrow \mu(\vec{\varphi})$ est l'application ${}^tL_{\vec{\varphi}}$, transposée de l'application $L_{\vec{\varphi}}: e' \rightarrow \langle \vec{\varphi}, e' \rangle$ de E' dans $C(K)$.

$${}^tL_{\vec{\varphi}} \in \mathcal{L}_E((C'(K))_c; E).$$