

SÉMINAIRE L. DE BROGLIE. THÉORIES PHYSIQUES

FRANCIS FER

Analogies gyroscopiques pour accélérateurs circulaires

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 27 (1957-1958), exp. n° 1, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1957-1958__27__A1_0

© Séminaire L. de Broglie. Théories physiques
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire L. de Broglie. Théories physiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

5 novembre 1957

ANALOGIES GYROSCOPIQUES POUR ACCÉLÉRATEURS CIRCULAIRES

par Francis FER

Le type de machine analogique étudié ci-dessous a pour objet de remplacer, totalement ou partiellement, les calculs numériques nécessités par la marche ou le perfectionnement des accélérateurs circulaires.

La recherche du meilleur rendement d'une part, d'une bonne définition de l'énergie d'autre part, exige en effet une connaissance de plus en plus précise des particules à l'intérieur d'un accélérateur. On peut citer comme exemples de problèmes actuels :

- l'influence des conditions de départ des particules sur la finesse du faisceau et sa dispersion en énergie ;
- les problèmes de focalisation le long des trajectoires, en fonction des champs magnétiques assez compliqués, tels que les champs à gradient alterné ;
- les problèmes posés par la déviation (magnétique ou électrique) des particules utilisées pour extraire le faisceau.

Chacun de ces problèmes exige des calculs de trajectoire. En poser les équations est facile ; les résoudre est plus difficile dès que les approximations utilisées font sortir du cadre des équations linéaires. On en arrive rapidement à des problèmes de calcul numérique qui sont justiciables de la machine à calculer, où qu'on doit se résigner à ne résoudre que grossièrement.

Aussi s'est-on déjà préoccupé de remplacer ces calculs par des machines analogiques. C'est ainsi qu'on trouvera dans les publications du C.E.R.N. ⁽¹⁾, la description d'une machine à attraction électrostatique reproduisant les oscillations pendulaires des particules. Le dispositif du C.E.R.N. a cependant l'inconvénient de n'être qu'à un seul degré de liberté, ce qui suppose par conséquent deux éliminations préalables entre les équations du mouvement, qui sont à 3 degrés de liberté. Faire ces éliminations exige des équations assez simples pour le calculateur, ce qui limite la finesse de l'approximation.

⁽¹⁾ Voir [1], [2], [3] et [4].

Il serait donc intéressant de disposer d'une machine analogique calquant au maximum -et aussi naturellement que possible- le mouvement des particules, et dans laquelle on pourrait reproduire les champs variés, magnétique et électrique, de l'accélérateur. Pour le mouvement plan, une analogie est offerte très naturellement par le mouvement gyroscopique. On peut ensuite coupler le mouvement gyroscopique avec un mouvement pendulaire simple pour introduire la troisième coordonnée, z , de l'accélérateur. On peut enfin, sans difficultés majeures, tenir compte des effets relativistes.

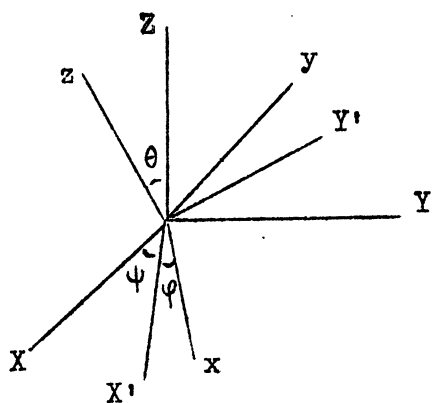
1. Analogie gyroscopique du mouvement plan.

Soit une particule de masse m , de charge q dans un champ magnétique de révolution H , supposé vertical. Dans un plan équatorial, le mouvement, étudié en coordonnées polaires ρ , α (l'origine des coordonnées étant sur l'axe de révolution), a pour équations non-relativistes :

$$(1) \quad \begin{cases} \rho'' - \rho \alpha'^2 = \frac{q}{m} H \rho \alpha' \\ 2 \rho' \alpha' + \rho \alpha'' = -\frac{q}{m} H \rho' \end{cases}$$

H étant mesuré suivant la verticale ascendante et pouvant être fonction de ρ , α mesuré positivement autour de cette même verticale. Les dérivations sont effectuées par rapport au temps.

Considérons maintenant un gyroscope tournant autour d'un point fixe O . Soient $OXYZ$ des axes fixes, $Oxyz$ les axes principaux d'inertie du gyroscope, A , $B = A$, C les moments principaux d'inertie correspondants.



Soit OX' l'intersection du plan xOy avec le plan XOY , OY' l'axe situé dans le plan xOy et déduit de OX' par rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oz . Les angles d'Euler sont

$$\psi = \angle XOY, \angle X'OY'; \quad \theta = \angle ZOZ'; \quad \phi = \angle XOx, \angle X'Ox.$$

Soient L , M , N les projections du couple appliqué sur les axes intermédiaires OX' , OY' , Oz . La théorie classique du gyroscope donne pour équations du mouvement :

$$A(\theta'' - \sin \theta \cos \theta \psi'^2) = -Cr \psi' \sin \theta + L$$

$$A(2 \cos \theta \cdot \theta' \psi' + \sin \theta \psi'') = Cr \theta' + M$$

$$Cr' = N$$

Lorsque l'angle θ est petit ($\frac{1}{10}$ radian par exemple), ces équations s'écrivent

$$(3) \quad \begin{cases} \theta'' - \theta \psi'^2 = -\frac{Cr}{A} \theta \psi' + L \\ 2 \theta' \psi' + \theta \psi'' = \frac{Cr}{A} \theta' + M \\ Cr' = N \end{cases}$$

Les deux premières équations sont identiques aux équations (1) si on identifie

$$\theta \text{ à } \rho, \quad \psi \text{ à } \alpha, \quad \frac{Cr}{A} \text{ à } -\frac{q}{m} H,$$

et qu'on fasse $L = M = 0$. Géométriquement, la pointe supérieure du gyroscope, vue de dessus, dessine le même mouvement qu'une particule dans un champ magnétique $H = -\frac{m}{q} \frac{C}{A} r$. Si on prend par exemple $N = 0$, donc $r = \text{Cte}$, le mouvement du gyroscope reproduit le mouvement d'une particule dans un champ uniforme.

On voit déjà la possibilité de reproduire un champ variable $H(\rho)$ si on peut astreindre la rotation r du gyroscope à être une fonction donnée de θ , et la possibilité de reproduire, par L et M , le champ électrique H.F de l'accélérateur.

2. Analogie électro-mécanique à couplage gyroscopique.

L'analogie cyclotron-gyroscope est évidemment due au fait que le mouvement du gyroscope contient des termes de forces de Coriolis, ce qui constitue, entre les mouvements en θ et ψ , un couplage appelé précisément gyroscopique.

Or on connaît nombre de dispositifs électro-mécaniques réagissant suivant le même type de couplage. Le plus simple d'entre eux est le galvanomètre. Soit en effet un bobinage de self L , de moment d'inertie autour d'un axe I , se déplaçant suivant la coordonnée angulaire ξ . Ce bobinage est placé dans un champ magnétique qui envoie un flux $\Phi(\xi)$ à travers le bobinage. Soit Q la quantité d'électricité ayant traversé le bobinage depuis une origine des temps quelconque. Soit enfin V la force électro-magnétique appliquée, Γ le couple appliqué. Les équations du mouvement du galvanomètre sont :

$$(4) \quad \begin{cases} \text{mécanique} & I \xi'' = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} Q' + \Gamma \\ \text{électrique} & LQ'' = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \xi' + V \end{cases}$$

On voit apparaître au second membre les termes de couplage gyroscopique $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} Q'$ et $-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \xi'$, analogues à ceux d'une force électro-magnétique. L'analogie saute aux yeux si, au lieu d'écrire les équations du cyclotron en coordonnées polaires comme en (1), nous les écrivons en coordonnées cartésiennes :

$$(2) \quad \begin{cases} x'' = \frac{q}{m} H y' \\ y'' = -\frac{q}{m} H x' \end{cases}$$

L'analogie sera obtenue si nous identifions $\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}$ à $\frac{q}{m} H$, ce qui exige qu'on puisse commander Φ en fonction de ε et de Q . On voit d'autre part, avec la présence des termes V et Γ , la possibilité de reproduire le champ électrique H.F.

3. Reproduction du mouvement à trois degrés de liberté de l'accélérateur.

Les équations du mouvement dans l'espace exigent de tenir compte de la composante horizontale du champ magnétique. Si nous supposons ce dernier de révolution (ce qui n'est évidemment pas le cas des champs à gradient alterné), cette composante horizontale se réduit à une composante radiale h .

Nous raisonnerons par exemple en nous servant de l'analogie électro-mécanique. Les équations cartésiennes du mouvement s'écrivent, en tenant compte de h , et aussi du champ électrique $E_x E_y E_z$:

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{q}{m} H y' - \frac{q}{m} h \frac{y}{\rho} z' + \frac{q}{m} E_x & \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ y'' &= -\frac{q}{m} H x' + \frac{q}{m} h \frac{x}{\rho} z' + \frac{q}{m} E_y \\ z'' &= \frac{q}{m} h \frac{yx' - xy'}{\rho} + \frac{q}{m} E_z \end{aligned}$$

La machine analogique doit maintenant se composer de deux dispositifs couplés :

a. le dispositif électro-mécanique décrit plus haut, dans lequel on reproduit les termes

$$-\frac{q}{m} h \frac{y}{\rho} z' + E_x \quad \text{et} \quad \frac{q}{m} h \frac{x}{\rho} z' + E_y$$

au moyen des deux fonctions Γ et V ;

b. un dispositif pendulaire simple, par exemple un circuit oscillant branché sur une force électro-motrice e , en reproduisant, par cette force électro-motrice, la quantité

$$\frac{q}{m} h \frac{yx' - xy'}{\rho} + \frac{q}{m} E_z$$

la coordonnée z ayant pour image la différence de potentiel v aux bornes de la capacité du circuit.

On voit évidemment que toute la difficulté de la réalisation pratique est dans la commande des quantités Γ , V et e en fonction des 3 degrés de liberté ε , Q et v .

4. Introduction des effets relativistes.

Le passage de la mécanique newtonienne à la mécanique relativiste a pour effet, comme on sait, de remplacer l'équation

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \text{par} \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c^2} \vec{v}$$

et de tenir compte de la variation de m dans la résolution de cette seconde équation.

L'adjonction du terme $\frac{\vec{F} \cdot \vec{V}}{c^2} \vec{v}$ à la force $\vec{F}$ ne souffre pas de difficulté à partir du moment où on sait réaliser expérimentalement l'injection des forces données dans la machine analogique. Il suffit, puisque seule la force électrique peut intervenir dans la correction relativiste, de remplacer E_x, E_y, E_z par

$$E_x = \frac{E_x x' + E_y y' + E_z z'}{c^2} x', \text{ etc.}$$

Quant à la variabilité de la masse, qui n'a évidemment pas son analogue naturel dans le dispositif électro-mécanique, il n'est en réalité pas besoin d'en tenir compte dans une utilisation rationnelle de la machine analogique. Un cyclotron à effets relativistes importants -par exemple un synchro-cyclotron-, renferme toujours un très grand nombre de spires décrites par les particules, de l'ordre de plusieurs milliers. Il ne peut être question, même sur une machine analogique, de reproduire la totalité de ce mouvement ; ce serait d'ailleurs sans intérêt. Il est bien préférable, à tous points de vue, d'étudier des zones de mouvement, définies par deux valeurs extrêmes du rayon des spires : zone centrale, zones intermédiaires, zone d'extraction. Dans chacune de ces zones, on peut considérer que la résolution des équations du mouvement (une fois faite la correction $\frac{\vec{F} \cdot \vec{V}}{c^2} \vec{v}$ bien entendu, et la correction $m = m_0(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$) peut se faire avec une bonne approximation en supposant m constant. On peut vérifier par exemple, pour un synchro-cyclotron possédant une accélération de $\frac{30 \text{ kV}}{\text{à chaque tour}}$, que la variation de masse sur 20 spires est de $0,3 \cdot 10^{-3} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, ce qui fait apparaître l'erreur commise négligeable à côté de celles qu'on doit consentir par ailleurs dans une machine analogique.

5. Précision pouvant être espérée.

Les différents étages de report et d'injection dont on peut disposer actuellement pour composer une machine analogique (multiplicateurs, etc.) ne dépassent pas la précision du millièrne, ce qui limite la précision globale à quelques % au maximum. Il est évident que, si une telle précision devait porter sur le rayon de circulation des particules, elle serait largement insuffisante, comme étant du même ordre de grandeur que les oscillations radiales. Il est heureusement possible, comme dans toutes les machines analogiques, de mettre la précision du % au service de l'étude, non du mouvement global, mais du mouvement relatif par rapport à une trajectoire de référence, mouvement relatif dont l'amplitude est beaucoup plus faible que celle du mouvement global.

Reportons-nous aux équations (2). Considérons un mouvement de référence défini par

$$x_0 = \rho_0 \cos \Omega t$$

$$y_0 = \rho_0 \sin \Omega t$$

la pulsation Ω étant prise égale à $-\frac{q}{m} H(\rho_0)$. Ce mouvement de référence a pour équation

$$x_0'' = -\Omega y_0' = \frac{q}{m} H_0 y_0'$$

$$y_0'' = \Omega x_0' = -\frac{q}{m} H_0 x_0'$$

Soustrayons ces équations membre à membre des équations (2) et prenons pour nouveaux axes des axes XY qui tournent à la vitesse angulaire Ω . Les équations en XY sont alors :

$$(2 \text{ bis}) \quad \begin{cases} X'' = \Omega \left(1 - \frac{H-H_0}{H_0}\right) Y' - \Omega^2 \frac{H-H_0}{H_0} (\rho_0 + X) \\ Y'' = -\Omega \left(1 - \frac{H-H_0}{H_0}\right) X' - \Omega^2 \frac{H-H_0}{H_0} Y \end{cases}$$

Comparées aux équations (2), on voit que, comme on pouvait d'ailleurs s'y attendre, ces équations conservent les termes de couplage gyroscopique. Les termes supplémentaires, $\Omega^2 \frac{H-H_0}{H_0} (\rho_0 + X)$ et $\Omega^2 \frac{H-H_0}{H_0} Y$ peuvent entrer dans les fonctions Γ et V de la machine analogique.

La précision de la machine affecte maintenant le mouvement en XY dont l'amplitude est de l'ordre de quelques centimètres. Une précision de l'ordre de 1% consent donc des erreurs de quelques dixièmes de millimètre, qui sont du même ordre que les tolérances de construction et de position d'organes tels que source, dispositif d'extraction, etc., d'un accélérateur circulaire.

Rien n'empêcherait d'ailleurs, si on jugeait la précision insuffisante, de faire subir aux équations (2 bis) la même opération qu'aux équations (2), en réduisant ces équations à une approximation linéaire, qu'on peut résoudre sans difficulté, et en soustrayant le mouvement du 1er ordre ainsi obtenu du mouvement défini par (2 bis). La précision porterait alors sur le mouvement du 2e ordre et en serait améliorée nettement.

Bien entendu, ces possibilités de la machine analogique ne dispensent pas de rendre cette machine aussi précise que possible, et d'en étudier les causes d'erreur.

L'erreur avec laquelle un analogue quelconque reproduit le mouvement réel des particules provient de deux sources :

- la première vient de ce que les coefficients numériques qui caractérisent les champs réels ne sont pas reportés exactement dans l'analogue ;
- la seconde vient de ce que les différents étages de la machine analogique reproduisent ou se transmettent ces coefficients avec une certaine dispersion.

La première cause d'erreur n'a pas grande importance. En effet, un champ réel étant donné dans l'accélérateur, il est plus simple de faire sur la machine analogique deux expériences dont les champs commandés encadrent le champ réel que de chercher à décalquer ce dernier dans l'analogue, une interpolation pouvant être une opération assez précise. En outre, la machine analogique sera souvent employée comme guide pour le choix des champs réels, dont ce sera alors le tour de reproduire le champ de l'analogue. La seule condition imposée à la machine analogique est donc plutôt de mesurer exactement les coefficients numériques qu'on y introduit que de les commander avec précision.

La seconde sorte d'erreur a plus d'importance : elle a pour effet de déformer les trajectoires. Une étude plus poussée aboutit à des conclusions que l'on peut résumer ainsi.

Pour fixer les idées, prenons comme base de l'analogie les équations (2 bis), qui ne sont autres que les équations de focalisation des trajectoires ; les erreurs dues à la dispersion des coefficients de champ magnétique ont l'effet double suivant :

- sur le mouvement du premier ordre - c'est-à-dire le mouvement obtenu en linéarisant les équations (2 bis), donc en particulier en prenant $H(\rho) - H(\rho_0) = AX$ - la dispersion entraîne une erreur d'échelle et une erreur de phase ; la première est inférieure à la dispersion du coefficient A , la seconde est égale, en radians, à $\nu/5$ fois la dispersion relative de A , ν étant le nombre de spires étudié (pour $\nu = 20$ et $\frac{\delta A}{A} = 1\%$, l'erreur de phase est égale à 0,04 radians, alors qu'il en a été décrit sensiblement 40 μ). L'erreur commise sur le mouvement du premier ordre ne déforme donc pas la trajectoire.

- la dispersion ne déforme les trajectoires que par l'intermédiaire du mouvement du second ordre, ce qui en rend par conséquent l'effet beaucoup moins sensible, et l'erreur commise sur ce mouvement du second ordre est, en valeur relative, de l'ordre du double de la dispersion qui entache les coefficients de champ.

Ces considérations montrent par conséquent que l'on peut obtenir une précision satisfaisante.

On obtient des résultats semblables en étudiant l'erreur due à la dispersion des coefficients de champ électrique.

6. Quelques considérations sur la réalisation matérielle possible.

Quel que soit le dispositif analogique envisagé, les questions de sensibilité ne soulèvent aucune difficulté. Si on considère par exemple l'analogue

galvanométrique, la reproduction d'un mouvement de particules dont l'amplitude est de l'ordre du centimètre sera obtenue de manière satisfaisante même si l'amplitude angulaire du cadre du galvanomètre est de $\frac{1}{20}$ radians; ce qui est nécessaire. Dans le même ordre d'idées, un changement d'échelle des temps permet de réduire les hautes fréquences d'un cyclotron à la fréquence 1, si on le désire, ce qui permet aisément l'observation et l'enregistrement.

Une difficulté d'un ordre nettement supérieur se trouve dans les différents reports, opérations arithmétiques, etc., qu'il est nécessaire d'effectuer à l'intérieur de la machine. Ces opérations semblent cependant possibles, avec les matériels dont on dispose actuellement, en obtenant pour chaque opération la précision du millième -précision qui d'ailleurs est coûteuse.

Mais la plus grosse difficulté se trouve sans conteste dans l'élimination des frottements. Qu'il soit mécanique ou électro-mécanique, un dispositif analogique comporte des pertes qui n'existent pas dans le cyclotron (tout au moins tant qu'on ne tient pas compte des pertes par rayonnement). Ces pertes peuvent être compensées, mais il est nécessaire que leur ordre de grandeur soit tel que la fluctuation inévitable de cette compensation ne perturbe pas plus le mouvement que les erreurs commises sur le phénomène étudié. Il semble bien que l'on puisse espérer que les matériaux modernes permettent d'atteindre cet objectif.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARBIER (M.). - A mechanical analogue for the study of betatron oscillations, Symposium du CERN sur les accélérateurs de haute énergie et la physique des mésons π [Genève. 1956]. - Genève, CERN, 1956 ; vol. 1, p. 262-264.
 - [2] COURANT (E. D.). - Non-linearities in the ag synchroton, Symposium du CERN sur les accélérateurs de haute énergie et la physique des mésons π [Genève. 1956]. - Genève, CERN, 1956 ; vol. 1, p. 254-261.
 - [3] HAGEDORN (R.), HINE (M.G.N.) and SCHOCH (A.). - Non-linear orbit problems in synchrotons, Symposium du CERN sur les accélérateurs de haute énergie et la physique des mésons π [Genève. 1956]. - Genève, CERN, 1956 ; vol. 1, p. 237-253.
 - [4] HAGEDORN (R.). - Note on an instability on a difference resonance line, Symposium du CERN sur les accélérateurs de haute énergie et la physique des mésons π [Genève. 1956]. - Genève, CERN, 1956 ; vol. 1, p. 293-294.
-