O. Costa de Beauregard

Coefficient de conversion du temps propre d'une horloge terrestre au temps astronomique de Schwarzschild à l'approximation de 10-12

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 26 (1956-1957), exp. n° 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1956-1957__26__A5_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de THÉORIES PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1956/57
-:-:-:-

Exposé n° 5

COEFFICIENT DE CONVERSION DU TEMPS PROPRE D'UNE HORLOGE TERRESTRE AU TEMPS ASTRONOMIQUE DE SCHWARZSCHILD A L'APPROXIMATION DE 10^{-12}

(Exposé de O. COSTA de BEAUREGARD, le 15.1.1957)

Les constructeurs d'horloges hertziennes stabilisées par une fréquence atomique (Caesium) ou moléculaire (Ammoniac) annoncent de divers côtés des précisions relatives de 10^{-10}, 10^{-11}, 10^{-12} ; on a même laissé espérer (Zacharias) une précision de 10^{-14}, suffisante pour manifester l'effet Einstein par comparaison de la marche de deux horloges sises l'une au sommet et l'autre au pied d'une montagne de plus de 3.000 m. : rappelons en effet la formule de l'effet Einstein :

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta U}{c^2} = \frac{Gm}{c^2 r} \cdot \frac{\Delta r}{r} = \frac{U}{c^2}\frac{\Delta r}{r} \quad ,$$

où U représente le potentiel newtonien, ici de la Terre ; U/c^2, qui sera calculé dans le texte, vaut environ 7.10^{-10}, et $\Delta r/r$, dans les conditions indiquées, environ 5.10^{-4} ; $\Delta T/T \simeq 3,5.10^{-13}$. Pour $\Delta r \simeq 20$ Kms (ballon), $\Delta T/T \simeq 2.10^{-12}$. C'est également là l'ordre de grandeur de l'effet "Equateur-Pôle" qui sera calculé dans le texte. A cette approximation, il y aurait lieu de se préoccuper de l'influence de la lune (effets de 24 h. et de 28 jours), ce qui serait à faire dans le cadre de la théorie relativiste des deux corps.

A ces précisions très élevées, qu'est-ce-que le temps astronomique ? Depuis que les nombreuses irrégularités de marche du système Terre + Lune ont été reconnues, il est implicitement admis qu'il faut recourir à une horloge plus vaste, pour obtenir une compensation des erreurs ; sans aller chercher des systèmes à l'ampleur injustifiée, l'on considère généralement que l'horloge astronomique est représentée par l'ensemble du système solaire. Quand la précision devient telle que la mécanique newtonienne devient insuffisante, quel est le paramètre en lequel s'expriment le plus simplement les lectures de l'horloge "système solaire" ? Incontestablement, le t du ds^2 de Schwarzschild, utilisé "automatiquement" dans toute recherche de Relativité générale sur la marche des planètes C'est le temps marqué par une horloge fictive sans masse, au repos dans le système solaire, et infiniment distante du soleil.

Le temps propre d'une horloge terrestre diffère du temps astronomique de Schwarzschild pour deux raisons : présence du champ de gravitation du système Soleil + Terre + Lune, circulation du laboratoire dans le système des coordonnées de Schwarzschild ; l'on parle, dans le premier cas, d'effet Einstein statique et, dans le second, d'effet "Voyageur de Langevin" ; les deux effets sont simultanément calculés dès que l'on connait l'expression du ds^2.

Le calcul correctement approché du ds^2 dans le problème des trois corps Soleil, Terre, Lune pose tout un problème, qui ne sera pas abordé ici. Des arguments qualitatifs nous ayant convaincu que l'effet de la Lune est en 10^{-14} ou 10^{-15}, nous mettrons ici la Lune de côté, à l'approximation de 10^{-12} que nous nous sommes imposée. Ceci étant, une méthode "naïve" d'attaque du problème se propose d'elle-même, qui sera suivie ici ; et il s'avère à la fin du calcul que la méthode suivie se trouve justifiée.

Appelant $d\theta/dt$ le rapport du temps propre d'une horloge terrestre au temps astronomique de Schwarzschild, nous allons exprimer ce rapport sous la forme suivante, où les quatre termes correctifs sont positifs :

Origine	Masse du Soleil et Circulation de la Terre		Masse et rotation de la Terre	
$\frac{d\theta}{dt} = 1$	$-\varepsilon_1$	$-\varepsilon_2$	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon_4$
Variable en fonction de	constant	date dans l'année	constant	latitude
Valeur	$1{,}5.10^{-8}$	0 à l'aphélie $6{,}6.10^{-10}$ au périhélie	7.10^{-10}	0 au pôle 10^{-12} à l'équateur
Part prédite par la relativité restreinte seule	0,33	0,5	0	1,2

Calcul des termes ε_1 et ε_2.

Faisons abstraction du champ gravifique terrestre, et imaginons que l'horloge "atomique", sans masse, décrive l'écliptique à la même vitesse que la Terre. La solution du problème résulte alors de l'expression du ds^2 de Schwarzschild (bien connu).

$$(1) \qquad ds^2 \equiv c^2 \underbrace{d\tau^2}_{\text{temps terrestre}} = c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right) \underbrace{dt^2}_{\text{temps astronomique}} - R^2\, d\varphi^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{2GM}{c^2R}}$$

G désigne la constante de Newton, M la masse du Soleil, R et φ les coordonnées polaires d'un point de l'écliptique.

Soient v_T et v_R les vitesses transversale et radiale de la Terre, $\beta_T \equiv v_T/c$ et $\beta_R = v_R/c$: (1) se récrit

$$(2) \qquad \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{2GM}{c^2R} - \beta_T^2 - \beta_R^2 \left(1 + \frac{2GM}{c^2R} + \ldots\right) .$$

Négligeons les produits des termes correctifs, extrayons la racine et posons $\beta^2 = \beta_T^2 + \beta_R^2$:

$$(3) \qquad \boxed{\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{GM}{c^2R} - \frac{1}{2}\beta^2} \;;$$

Le premier terme correctif représente l'effet Einstein, le second l'effet "voyageur de Langevin" .

A cette approximation, les équations du mouvement s'obtiennent en extrémant $\int d\tau$. Or, les équations classiques du mouvement s'obtiennent en extrémant $\int \mathcal{L}\, dt$, avec

$$(4) \qquad \mathcal{L} = \frac{GM}{R} + \frac{1}{2} v^2 \quad :$$

notre approximation nous ramène donc exactement aux mouvements newtoniens, t représentant le temps newtonien. Par contre, nous distinguons du temps astronomique ou newtonien le temps propre θ du mobile terrestre, la définition de celui-ci étant donné par (3) .

Approximation d'ordre zéro : on suppose l'écliptique circulaire. Alors

(5) $$\frac{GMm}{R_0^2} = \frac{mv_0^2}{R_0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\beta_0^2 = \frac{GM}{c^2 R_0}} \quad ;$$

on sait que, pour la Terre,

(6) $$v_0 \cong 30 \text{ Km : sec} \quad , \quad \beta_0 \cong 10^{-4} \quad , \quad \beta_0^2 \cong 10^{-8} \quad ,$$

d'où

(7) $$\varepsilon_1 \cong 1{,}5.10^{-8} \quad ,$$

les parts réspectives du champ statique et de la vitesse de la Terre étant

(8) $$\varepsilon_1' \cong 10^{-8} \quad , \quad \varepsilon_1'' \cong 0{,}5.10^{-8}$$

Trajectoire elliptique : on a le théorème des forces vives

(9) $$\frac{1}{2} v^2 - \frac{GM}{R} = \text{const. x}c^2 \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{GM}{c^2 R} = \text{const.}} \quad ;$$

exprimons la constante en termes de la trajectoire circulaire de même énergie totale

(10) $$2 \text{ x const.} = -\beta_0^2 = -\frac{GM}{c^2 R_0} \quad ,$$

d'où

(11) $$\frac{1}{2}\beta^2 = \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R_0}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{GM}{c^2 R} = \frac{1}{2}(\beta^2 + \beta_0^2) \quad ;$$

portant dans (1), il vient

(12) $$\boxed{\frac{d\tau}{dt} = \left(1 + \frac{GM}{2c^2 R_0}\right) - \frac{2GM}{c^2 R} = \left(1 - \frac{1}{2}\beta_0^2\right) - \beta^2} \quad ,$$

formule qui permet de dresser la table des valeurs de $d\tau/dt$ en fonction de la date dans l'année.

Voyons l'effet maximum, ou "effet périhélie-aphélie". Différenciant $\rho \equiv d\tau/dt$, d'après (12) il vient :

(13) $$\Delta\rho \simeq \frac{2GM}{c^2}\frac{\Delta R}{R^2} \simeq \frac{2GM}{c^2 R_0}\cdot\frac{\Delta R}{R_0} \simeq 2\beta_0^2\,\frac{\Delta R}{R_0} \qquad ;$$

pour la Terre

(14) $$\frac{\Delta R}{R_0} \simeq 3{,}3.10^{-2} \qquad ,$$

d'où

(15) $$\varepsilon_2 = 0 \quad à \quad 6{,}6.10^{-10} \qquad .$$

La relativité restreinte donnerait $\Delta\rho \simeq -\beta\Delta\beta$, au lieu de $\Delta\rho \simeq -2\beta\Delta\beta$ d'après (12_2).

Calcul des termes ε_3 et ε_4 .

Plaçons maintenant la Terre au point précédent avec, à sa surface, l'horloge hertzienne. Les déplacements à la surface de la Terre, ou de la Terre en 24 heures, n'intéressent qu'un volume très petit devant le rayon vecteur Soleil-Terre ; ceci nous autorise à imaginer que la Terre est plongée non pas dans l'espace-temps de Schwarzschild précédent, mais dans l'espace-temps minkowskien tangent, dont l'axe de temps est tangent à la trajectoire du centre de la Terre.

Effet d'ordre zéro calculé aux pôles : on l'obtiendra d'après un ds^2 de Schwarzschild, en introduisant une valeur fictive du rayon terrestre r certainement très voisine des valeurs réelles. Pour les rapports de la masse de la Terre à celle du Soleil et du rayon terrestre au rayon vecteur Soleil-Terre, on a sensiblement

(16) $$\frac{m}{M} \simeq 3.10^{-6} \qquad , \qquad \frac{r}{R} \simeq 4{,}25.10^{-5} \qquad ,$$

d'où

(17) $$\varepsilon_3 \simeq 7.10^{-10} \qquad .$$

Effet de latitude : nous avons supposé l'effet d'ordre zéro calculé au pôle, parce qu'en ce point il n'y a pas d'effet "voyageur de Langevin" induit par la rotation terrestre. Calculons maintenant cet effet à l'équateur, où la vitesse est

(18) $\quad v = 1.666$ Km:h $\simeq$ 455 m/s , $\quad \beta \simeq 1,55.10^{-6}$

il vient

(19) $$\varepsilon''_4 \equiv \frac{1}{2}\beta^2 = 1,\ 2.10^{-12} \ .$$

Il est bien connu que cet effet s'interprète aussi comme étant dû au potentiel de la force centrifuge.

En outre, il y a l'effet statique dû au "bourrelet équatorial" qui joue en sens inverse du précédent. Il est certain qu'à la surface de la Terre $d\theta/d\theta_0$ est une fonction du rayon ρ du parallèle, et une fonction paire, de la forme $1 - a\rho^2 + \ldots$. A cet ordre, l'effet total est donc de même forme que l'effet dû à la seule force centrifuge, qui est $1 - \frac{1}{2}\omega^2\rho^2 + \ldots$

Pour évaluer le potentiel correctif dû à l'aplatissement du géoïde, nous devons faire état des mesures gravimétriques et de la formule du potentiel terrestre dûe à Clairant [Cf. P. Tardi, Traité de Géodésie, Paris, 1934, p. 585-596] qui est

(23) $$v = \frac{Gm}{r} - \frac{G(C-A)}{r^3}\left(1 + \frac{3}{2}\cos^2\lambda\right) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\lambda \ ;$$

C et A désignent les moment d'inertie du globe autour de l'axe des pôles et d'un axe équatorial, r le rayon terrestre à la latitude λ , ω la vitesse angulaire de la Terre. Si nous négligeons les variations de r , r^2 , r^3 , nous retombons sur la précédente conclusion, avec en évidence les signes opposés des deux corrections.

Voyons l'ordre de grandeur de l'effet en faisant $r = \text{const.}$: si l'on écrit U sous la forme $U = U_0 + U_1 \cos^2\lambda$, $c^{-2} U_0$ représente alors la précédente correction d'ordre zéro et $c^{-2}U_1\cos^2\lambda$ la correction de latitude dont la valeur maxima $c^{-2}U_1$ donnera l'effet "équateur-pôle" ; or, grad U_1 (pour $\lambda = 0$) n'est autre que la différence $\Delta g = g_{pôl} - g_{équ}$, de sorte qu'en posant

(24) $$P \equiv \frac{\pi \Delta g}{c^2} \ , \quad M = \frac{3G(C-A)}{2c^2\pi^3} \ , \quad N = \frac{1}{2}\beta^2 \ ,$$

et dérivant U_1 par rapport à r , nous trouvons

(25) $$P = 3M + 2N \ , \quad \text{d'où} \quad M = \frac{1}{3}(P-2N) \ .$$

Or, $\Delta g \simeq 5{,}17$ C.G.S. , $r \simeq 6{,}37.10^8$ ans :

(26) $$P = \frac{\pi \Delta g}{c^2} \simeq 3{,}15.10^{-12}$$

On a calculé plus haut $\beta^2/2 \simeq 1{,}2.10^{-12}$, d'où enfin

(27) $$-\varepsilon_4^{'} \equiv M = (1{,}05 - 0{,}8)\ 10^{-12} = 2{,}5.10^{-13} \quad ;$$

c'est là l'effet de l'aplatissement du géoïde, effet <u>accélérateur</u> d'une horloge équatoriale, à retrancher du précédent effet "voyageur de Langevin" . Au total on a donc

(28) $$\varepsilon_4 = (10{,}2 - 0{,}25)10^{-13} \simeq 10^{-12} \ .$$

<u>L'influence de la Lune est d'ordre supérieur à 10^{-12}.</u>

Nous avons vu, par les deux exemples précédents, qu'il y a un rapport simple entre l'effet Einstein et l'effet "voyageur de Langevin". Or, si le second est difficile à calculer en théorie des deux corps, le premier est calculé très rapidement. La distance du centre de la Terre au centre de gravité du système Terre + Lune est environ les 3/4 du rayon terrestre, et la rotation autour de ce dernier s'effectue en 28 jours. L'effet "voyageur de Langevin" induit sur la Terre par la présence de la Lune est donc quelque 1000 fois plus petit que celui dû à la rotation de la Terre sur elle-même.

Nous nous contenterons ici de cet argument qualitatif ; la question mériterait évidemment d'être traitée de manière plus correcte.

<u>Conclusion</u>

A l'approximation aujourd'hui atteinte par la chronométrie hertzienne, il y a véritablement "divorce" entre le temps des physiciens et celui des astronomes.

Il va sans dire que, dans un phénomène mesuré au laboratoire, c'est le temps de l'horloge hertzienne qui traduit directement le rythme propre du phénomène. Comme c'est aussi le temps dont la mesure est la plus précise (pour des durées brèves), il semble probable que les physiciens seront bientôt conduits à une définition légale de leur propre temps, basée sur des fréquences atomiques ou moléculaires.
