

SÉMINAIRE L. DE BROGLIE. THÉORIES PHYSIQUES

A. GONZÁLEZ DOMINGUEZ

Les parties finies des intégrales de Riemann-Weyl et les méthodes de régularisation

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 24 (1954-1955), exp. n° 4, p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1954-1955__24__A4_0

© Séminaire L. de Broglie. Théories physiques
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire L. de Broglie. Théories physiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES PARTIES FINIES DES INTÉGRALES DE RIEMANN-WEYL

ET LES MÉTHODES DE RÉGULARISATION.

par A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ

--:--:--:--:--

INTRODUCTION

On dit en électrodynamique quantique qu'on est en présence d'une divergence "ultraviolette" lorsque les calculs conduisent à une intégrale qui diverge à cause de l'insuffisante décroissance de l'intégrande à l'infini.

Exemples :

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x}, a > 0; \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_1^r + q_2^r + q_3^r}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + 1}} dq_1 dq_2 dq_3 ;$$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - m^2 - iy} \quad 1, 1$$

Les physiciens ont imaginé diverses méthodes pour neutraliser les divergences ultraviolettes, dont peut-être la plus importante est celle que MM. Pauli-Villars ont baptisé régularisation ([3], [5], [19], [20], [23], [25]).

Nous ferons dans cet exposé un essai de systématisation des divers procédés qu'on a mis en oeuvre pour éliminer les divergences ultraviolettes en électrodynamique quantique.

A la base de notre exposé est le concept de partie finie à l'infini d'une intégrale divergente. Il s'agit du concept classique de partie finie, de M. Hadamard [8], mais transposé au cas où le point de non-sommabilité de l'intégrande est le point à l'infini. Nous utiliserons le concept de partie finie à l'infini surtout pour donner un sens à des intégrales divergentes de Riemann-Weyl :

$$I_{RW}^{(\alpha)} \{f(x)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (y-x)^{\alpha-1} f(y) dy .$$

On voit que notre point de vue est très voisin de celui de M.M. Riesz, dont le magistral mémoire [20] nous a été d'une utilité inappréciable.

I

1,1.- Soit $f(A)$ [$a \leq A < \infty$] une fonction qui tend vers l'infini lorsque $A \rightarrow \infty$. Considérons les fonctions

$$K(A, m, Z) = A^Z \log^m A, \quad (1,1; 1)$$

avec m entier non négatif et $\operatorname{Re} Z \geq 0$; en convenant d'exclure la valeur $Z = 0$ si $m = 0$. Soit $C(A)$ une combinaison linéaire de fonctions du type $(1,1; 1)$. Si la différence $f(A) - C(A)$ tend vers une limite finie lorsque $A \rightarrow \infty$, nous dirons que cette limite est la partie finie à l'infini (ou plus brièvement, la partie finie) de $f(A)$:

$$\operatorname{Pf}.f(A) = \lim_{A \rightarrow \infty} [f(A) - C(A)]^{(1)}. \quad (1,1; 2)$$

Cette partie finie, si elle existe, est unique. Il y a, naturellement, une définition analogue pour le cas $A < 0$.

1,2.- Un cas particulier important de $(1,1; 2)$ est celui où $f(A)$ est une intégrale:

$$f(A) = \int_a^A G(X) dX, \quad (1,2; 1)$$

avec

$$G(X) = \sum_{\nu} C_{\nu} X^{Z_{\nu}} + h(X); \quad (1,2; 2)$$

ici $h(X)$ est sommable en $[a, \infty]$, $a > 0$, C_{ν} et Z_{ν} étant des nombres complexes quelconques, avec $\operatorname{Re} Z_{\nu} \geq -1$.

Deux cas sont alors à distinguer.

1°) Aucun des exposants Z_{ν} n'est égal à -1 . Alors on déduit de $(1,1; 2)$ les deux formules équivalentes

$$\operatorname{Pf}. \int_a^A G(X) dX = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\int_a^A G(X) dX - \sum_{\nu} C_{\nu} \frac{A^{Z_{\nu}+1}}{Z_{\nu}+1} \right], \quad (1,2; 3)$$

(1) C'est, si l'on fait le changement de variable $A = \frac{1}{t}$, la même définition de Methée ([15], pag.237).

ou bien

$$\text{Pf. } \int_a^A G(X) dX = \lim_{S \rightarrow 0} \int_a^\infty G(X) X^S dX, \operatorname{Re} S < 0. \quad (1,2 ; 4)$$

2°) Dans le cas où l'un quelconque des exposants (par exemple, Z_1) est égal à -1, on déduit de (1,1 ; 2) les résultats équivalents

$$\text{Pf. } \int_a^A G(X) dX = \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^A G(X) dX - \sum_{\nu \neq -1} C_\nu \frac{A^{Z_\nu+1}}{Z_\nu+1} - c_1 \log A \right\}, \quad (1,2 ; 5)$$

ou bien

$$\text{Pf. } \int_a^A G(X) dX = \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ C_1 S^{-1} + \int_a^\infty G(X) X^S dX \right\}. \quad (1,2 ; 6)$$

1,3.- Donnons deux exemples d'application des définitions ci-dessus. Considérons la série qui définit, pour $\operatorname{Re} S < -1$, la fonction ζ de Riemann :

$$\zeta(S) = \sum_{n=1}^{\infty} n^S. \quad (1,3 ; 1)$$

Plus générale est la formule, valable pour $\operatorname{Re} S < 0$ (cf. [1], pp. 198-200)

$$\zeta(S) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{n=A} n^S - \frac{A^{S+1}}{S+1} \right\}. \quad (1,3 ; 2)$$

Le prolongement analytique de la fonction ζ a donc été accompli en calculant la partie finie de la fonction

$$f(A) = \sum_{n=1}^A n^S \quad (1,3 ; 3).$$

Cet exemple n'est nullement isolé.

Supposons maintenant qu'on est en présence de l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{dZ}{dX} dX, \quad (1,3 ; 4)$$

où $Z(X)$ se comporte à l'infini de la manière suivante (avec B, C, D constantes).

$$Z(X) = BX + C + DX^{-1} + O(X^{-2}), \quad (1,3 ; 5)$$

$$\frac{dZ}{dX} = B - DX^{-2} + O(X^{-3}). \quad (1,3 ; 6)$$

L'intégrale (1,3 ; 4) diverge, mais la fonction

$$f(A) = \int_0^A \frac{dZ}{dX} dX \quad (1,3 ; 7)$$

a une partie finie qui se calcule immédiatement d'après (1,2 ; 3) :

$$\begin{aligned} \text{Pf. } f(A) &= \text{Pf. } \int_0^A \left(\frac{dZ}{dX} - B + B \right) dX = \int_0^\infty \left(\frac{dZ}{dX} - B \right) dX + \text{Pf. } B \int_0^A dX = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} [Z(A) - BA] - Z(0) = C - Z(0) . \quad (1,3 ; 8) \end{aligned}$$

Nous avons choisi cet exemple parce qu'une intégrale, semblable à (1,3 ; 4), s'est présentée à M.M. Riesz, et son calcul (que M. Riesz fait ingénieusement par prolongement analytique) est à la base d'une formule remarquable par laquelle il exprime le potentiel de Lienard-Wiechert ([20], p. 2.160, et [21], pp. 152-159).

Voici une petite liste de parties finies dont nous ferons usage dans la suite.

Petite liste de parties finies⁽²⁾

- 1) $\log \int_a^\infty \frac{dX}{X} = -\log a$
- 2) $\int_a^\infty X^S dX = -\frac{a^{S+1}}{S+1} \quad \text{Re } S \neq -1$
- 3) $\int_a^\infty \frac{X^2 dX}{\sqrt{X^2+m}} = \frac{m}{4} - \frac{a}{2} \sqrt{a^2+m} + \frac{m}{2} \log \frac{a + \sqrt{a^2+m}}{2}$
- 4) $\int_a^\infty \frac{X^2 dX}{(X^2+m)^{3/2}} = -1 + \frac{a}{(a^2+m)^{1/2}} - \log \frac{a + \sqrt{a^2+m}}{2}$
- 5) $\int_a^\infty \frac{X^2 dX}{X+m} = -\frac{a^2}{2} + ma - m^2 \log(a+m)$
- 6) $\int_a^\infty X^2 \sqrt{X^2+m^2} dX = \frac{m^4}{32} - \frac{a}{4} (a^2+m^2)^{3/2} + \frac{m^2}{8} a \sqrt{a^2+m^2} +$
 $+ \frac{m^4}{8} \log \left\{ \frac{a + \sqrt{a^2+m^2}}{2} \right\} - \frac{a^4}{4}$
- 7) $\int_0^\infty (X^2+m^2)^{-\frac{1}{2}} dX = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} \log \frac{m}{2}$
- 8) $\int_a^\infty (X^2+m^2)^{-\frac{1}{2}} dX = -\log \left[\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+m^2}) \right]$
- 9) $\int_a^\infty \frac{XdX}{X+m} = m \log(a+m) - a$

(2) On a supprimé le symbole Pf. devant le signe d'intégrale.

$$\begin{aligned}
10) \quad & \int_a^\infty \frac{X dX}{(m+X)^2} = -\log(a+m) - \frac{m}{a+m} \\
11) \quad & \int_a^\infty \frac{\sqrt{X} dX}{X+m} = \sqrt{m} \left[2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{m}} - \pi \right] - 2a^{\frac{1}{2}} \\
12) \quad & \int_a^\infty (X-a)(b+X)^{-2} dX = -1 - \log(a+b)
\end{aligned}$$

II

2,1.- La méthode puissante créée par M.M. Riesz pour intégrer l'équation des ondes [20], a été appliquée avec succès par M. Fremberg [4] pour éliminer les infinis qui apparaissent dans la théorie classique de l'électron. Puis MM. Gustafson ([6]), Nilsson ([16], [17]) et Kothari ([12], [13], [14]), ont appliqué la méthode de M. Riesz en théorie quantique. Nous allons montrer que le concept de partie finie à l'infini joue implicitement un rôle essentiel dans les travaux de MM. Nilsson et Kothari.

En poursuivant l'oeuvre de M. Gustafson, Nilsson a réussi à éliminer certains infinis devant lesquels les méthodes antérieures s'étaient révélées impuissantes. Sa méthode, qu'il a exposée dans son ouvrage [16], revient à donner un sens aux intégrales divergentes de l'électrodynamique quantique par prolongement analytique ; or cela est équivalent, d'après les formules [1,2 ; 3] et [1,2 ; 4], à prendre la partie finie dans le cas où aucun des exposants n'est égal à -1. Il est donc naturel qu'il n'ait pas réussi à éliminer par cette méthode les divergences "logarithmiques", qui se présentent lorsqu'on a affaire à une intégrale du type

$$I(a) = \int_a^\infty \frac{\varphi(X)}{X} dX, \quad (2,1 ; 1)$$

avec

$$\varphi(\infty) = C \neq 0. \quad (2,1 ; 2)$$

Peu après, M. Nilsson a réussi à rendre finie la selfénergie de l'électron en seconde approximation, dans la théorie des trous, par une méthode qui lui a été suggérée par M. Riesz. La même méthode a été utilisée plus tard par M. Kothari et joue un rôle essentiel dans sa théorie. La prescription de MM. Riesz-Nilsson-Kothari pour donner un sens à une intégrale divergente du type (2,1 ; 1) consiste à former l'intégrale convergente $[\operatorname{Re} S < 0]$

$$I(S) = \int_a^\infty X^{S-1} \varphi(X) dX, \quad (2,1 ; 3)$$

et puis à prendre la limite

$$\lim_{S \rightarrow i0} \frac{1}{2} \left\{ I(S) + I(\bar{S}) \right\} ; \quad (2,1 ; 4)$$

où, avec le symbole $S \rightarrow i0$ on indique qu'on doit prendre la limite lorsqu'on s'approche à l'origine par un chemin tangent à l'axe imaginaire. Il est très facile de constater que la méthode de MM. Riesz-Nilsson-Kothari est équivalente à la méthode de la partie finie dans le cas où il y a un exposant égal à -1 . Si l'on prend, en effet, la partie finie de l'intégrale $(2,1 ; 1)$, on trouve

$$\text{Pf} \int_a^\infty \frac{\varphi(X)}{X} dX = \int_a^\infty \frac{\varphi(X) - C}{X} dX + \text{Pf. } C \int_a^\infty \frac{dX}{X} . \quad (2,1 ; 5)$$

Il suffit donc de constater que

$$\text{Pf.} \int_a^\infty \frac{dX}{X} = -\log a = \frac{1}{2} \lim_{S \rightarrow i0} \left\{ \int_a^\infty X^{S-1} dX + \int_a^\infty X^{\bar{S}-1} dX \right\} . \quad (2,1 ; 6)$$

Or cela est immédiat, car la valeur du deuxième membre est égale à

$$-\frac{1}{2} \lim_{S \rightarrow i0} \left\{ \frac{1}{S} + \frac{1}{\bar{S}} + 2 \log a + O(S) \right\} = -\log a . \quad (2,1 ; 7)$$

III

3,0.- Nous définissons l'intégrale de Riemann-Weyl d'ordre α de la fonction $f(X)$ par la formule

$$I_{RW}^{[\alpha]}(f(X)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_X^\infty (t - X)^{\alpha-1} f(t) dt . \quad (3,0 ; 0)$$

Ces intégrales ont été appliquées avec succès par M.H. Weyl dans la théorie des séries trigonométriques (cf. [26], et [27], p. 222).

Rappelons les propriétés connues

$$I_{RW}^{[\alpha]} \left\{ I_{RW}^{[\beta]} [f(X)] \right\} = I_{RW}^{[\alpha+\beta]} [f(X)] , \quad (3,0 ; 1)$$

$$-\frac{d}{dX} I_{RW}^{[\alpha]} [f(X)] = I_{RW}^{[\alpha-1]} [f(X)] . \quad (3,0 ; 2)$$

On a donc, comme conséquence de ces formules

$$\begin{aligned} f(X) &= (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n)} \int_X^\infty (t - X)^{n-1} f(t) dt = \\ &= (-1)^n \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \dots \int_0^\infty d\alpha_n [f^{(n)}(X + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)] . \end{aligned} \quad (3,0 ; 3)$$

On suppose dans ces formules que la décroissance de $f(X)$ et de ses dérivées, lorsque $X \rightarrow \infty$, est telle que toutes les intégrales ont un sens. Or, c'est

ce qui n'aura pas lieu dans les formules des paragraphes suivants, où vont apparaître des intégrales de Riemann-Weyl divergentes. Pour leur donner un sens, nous prendrons leur partie finie.

3,1.- Considérons la distribution F quadridimensionnelle définie par la formule (nous suivons la notation de [23])

$$\langle F, \varphi(q_1, q_2, q_3, q_4) \rangle = \iiint \frac{\varphi(q_1, q_2, q_3, q_4) dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{q^2 - m + iy}, \quad y > 0. \quad (3,1 ; 0)$$

L'intégrale est étendue à tout l'espace R^4 ; m est un paramètre non négatif et

$$q^2 = q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2. \quad (3,1 ; 1)$$

On constate que le produit scalaire $(3,1 ; 0)$ n'est pas défini pour $\varphi \equiv 1$. Néanmoins, des produits scalaires semblables apparaissent très souvent en électrodynamique quantique, et il y a intérêt à leur donner un sens. C'est ce que M. Pauli-Villars appellent régularisation dans leur mémoire bien connu [18].

Pour décrire le procédé de régularisation dont nous ferons usage dans les paragraphes suivants nous prendrons l'exemple simple du produit scalaire $(3,1 ; 0)$, avec $\varphi \equiv 1$:

$$I_1[m] = \iiint \frac{dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{q^2 - m + iy}, \quad y > 0. \quad (3,1 ; 2)$$

En dérivant formellement par rapport au paramètre m on obtient [cf. [3], p.785]

$$I_1^{[2]}(m) = 2 \iiint \frac{dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{(q^2 - m + iy)^3} = \pi^2 i \frac{1}{m - iy}. \quad (3,1 ; 3)$$

Maintenant pour "récupérer" $I_1(m)$ nous écrirons l'intégrale de Riemann-Weyl d'ordre 2 par rapport à m de $(3,1 ; 3)$, en calculant sa partie finie d'accord avec les règles du paragraphe (1,2). On obtient ainsi, si l'on tient compte des formules (1) et (9) de la table

$$I_1^{(m)}_{\text{reg}} = (-1)^2 \frac{1}{\Gamma(2)} \int_m^\infty (t-m) \frac{\pi^2 i}{t-iy} dt = \left\{ (m-iy) \log(m-iy) - m \right\} \pi^2 i. \quad (3,1 ; 4)$$

Le procédé est général. Si l'on a eu besoin de dériver n fois pour arriver à une intégrale convergente, on devra écrire l'intégrale de Riemann-Weyl d'ordre n et calculer sa partie finie (après avoir multiplié par $(-1)^n$).

3,2.- Nous allons calculer avec notre méthode la valeur de quelques intégrales qui apparaissent couramment en électrodynamique quantique.

$$1) \quad I_2(m) = \iiint \frac{dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{(q^2 - m + iy)^2}. \quad (3,2 ; 0)$$

Il suffit dans ce cas de dériver une seule fois. On obtient donc, en tenant compte de (3,1 ; 3) ,

$$I_2(m)_{\text{reg}} = \pi^2 i \log(m - iy) \quad . \quad (3,2 ; 1)$$

$$2) \quad I_3(m) = \iiint \frac{q_{\mu} dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{q^2 - m + iy} \quad . \quad (3,2 ; 2)$$

C'est une des intégrales "dangereuses" qui apparaissent dans le problème de la polarisation du vide ([8], p.324) . Si l'on dérive deux fois on arrive à une intégrale convergente, qui est nulle (en raison du numérateur de l'intégrande). On a par conséquent

$$I_3(m)_{\text{reg}} = 0 \quad . \quad (3,2 ; 3)$$

$$3) \quad I_4(m) = \iiint \frac{q_{\sigma} q_{\tau} dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{(q^2 - 2p \cdot q - m + iy)^3} \quad . \quad (3,2 ; 4)$$

Ici p est un vecteur fixe, et σ, τ , peuvent prendre les valeurs 1,2,3,4 . Une seule dérivation nous conduit dans le cas présent à [cf.[3], p.785, formule 13a]

$$\frac{d I_4(m)}{dm} = \frac{\pi^2 i}{2} \frac{p_{\sigma} p_{\tau} - \frac{1}{2} \delta_{\sigma\tau} [p^2 + m - iy]}{(p^2 + m - iy)^2} \quad . \quad (3,2 ; 5)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} I_4(m)_{\text{reg}} &= - \frac{\pi^2 i}{2} \text{Pf.} \int_m^{\infty} \frac{p_{\sigma} p_{\tau} - \frac{1}{2} \delta_{\sigma\tau} (p^2 + X - iy)}{(p^2 + X - iy)^2} dX = \\ &= - \frac{\pi^2 i}{2} p_{\sigma} p_{\tau} \frac{1}{p^2 + m - iy} - \frac{\pi^2 i}{4} \delta_{\sigma\tau} \log(p^2 + m - iy) \quad . \quad (3,2 ; 6) \end{aligned}$$

En particulier, la régularisée de

$$I_5(m) = \iiint \frac{q_{\sigma} q_{\tau} dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{(q^2 - m + iy)^3} \quad (3,2 ; 7)$$

est

$$I_5(m)_{\text{reg}} = - \frac{\pi^2 i}{4} \delta_{\sigma\tau} \log(m - iy) \quad . \quad (3,2 ; 8)$$

De (3,2 ; 8) on déduit immédiatement que l'intégrale (qui apparaît dans l'évaluation du moment magnétique anomal de l'électron ; cf. [8], p.313, formule q_2)

$$I_6 = \iiint \frac{q_{44} - q_{XX}}{(q^2 - m + iy)^3} dq_1 dq_2 dq_3 dq_4 \quad (3,2 ; 9)$$

est égale à zéro .

$$4) \quad I_7(m) = \iiint \frac{q_\sigma q_\tau dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{(q^2 - 2p \cdot q - m + iy)^2} \quad (3,2 ; 10)$$

Dans ce cas, il faut dériver deux fois. On aura par conséquent, en tenant compte de (3,2 ; 5)

$$I_7(m)_{\text{reg}} = i\pi^2 \text{Pf.} \int_m^\infty (X-m) \frac{P_\sigma P_\tau - \frac{1}{2} \delta_{\sigma\tau} (p^2 + X - iy)}{(p^2 + X - iy)^2} dX =$$

$$= -i\pi^2 P_\sigma P_\tau [\log(m+p^2 - iy) + 1] - \frac{1}{2} i\pi^2 \delta_{\sigma\tau} \left\{ (p^2 + m - iy) \log(p^2 + m - iy) - m \right\} \quad (3,2 ; 11)$$

Cas particulier de (3,2 ; 11) pour $p = 0$

$$5) \quad I_8(m) = \iiint \frac{q_\sigma q_\tau dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{(q^2 - m + iy)^2} \quad (3,2 ; 12)$$

$$I_8(m)_{\text{reg}} = -\frac{i\pi^2}{2} \delta_{\sigma\tau} \left\{ (m - iy) \log(m - iy) - m \right\} \quad (3,2 ; 13)$$

Des formules (3,1 ; 4) et (3,2 ; 13) on déduit immédiatement que la valeur de l'intégrale [qui apparaît dans l'excellent livre de M. Pauli, [20], p. 39],

$$I_9(m) = \iiint \frac{2 q_\mu q_\nu dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{q^2 + \frac{1}{4} p^2 (1-u^2) - m^2 + iy} + \iiint \frac{\delta_{\mu\nu} dq_1 dq_2 dq_3 dq_4}{q^2 + \frac{1}{4} p^2 (1-u^2) - m^2 + iy} \quad (3,2 ; 14)$$

est nulle.

3,3.- Nous voudrions signaler l'étroite connexion du procédé de régularisation que nous avons décrit avec une intéressante méthode développée par M. Karlson dans un ouvrage récent ([11]), où il calcule les termes de quatrième ordre de la polarisation du vide. Karlson arrive à des intégrales où apparaissent les produits scalaires $\langle \delta^{[k]} [q^2 - m], 1 \rangle$, avec k suffisamment grand ; qu'il faut évaluer, pour avoir le résultat définitif, lorsque $k = 0, 1, 2$. Il atteint son but par un procédé de prolongement analytique qui est une modification d'une autre méthode suggérée par Källén [10].

Prenons pour exemple le cas simple des intégrales divergentes auxquelles conduit l'évaluation des termes de second ordre. Il s'agit de l'intégrale ([11], p.225 ; nos notations ne sont pas les mêmes que celles de Karlson)

$$I(p, M) = + \frac{4}{(2\pi)^3} \int_0^1 \alpha (1-\alpha) d\alpha \iiint \delta' [q^2 + p^2 (1-\alpha) - M] dq_1 dq_2 dq_3 dq_4 \quad (3,3 ; 0)$$

dont la valeur (renormalisée) donne le résultat cherché. Avec notre méthode, on procéderait de la manière suivante.

Dela formule connue ($k \geq 2$) [cf. [9], p.398 et [24], p.800]

$$\langle \delta^{[k]} [q^2 - M], 1 \rangle = \pi (k - 2)! M^{1-k} \quad (3,3 ; 1)$$

on déduit qu'il suffit de dériver (3,3 ; 0) une seule fois par rapport à M , pour obtenir une intégrale convergente.

En faisant après l'intégrale de Riemann-Weyl on obtient,

$$I(p)_{\text{reg}} = + \frac{4}{(2\pi)^3} \int_0^1 \alpha (1-\alpha) d\alpha \text{Pf} \int_M^\infty \frac{dX}{p^2 \alpha (1-\alpha) + X} =$$

$$= - \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^1 \alpha (1-\alpha) \log [p^2 \alpha (1-\alpha) + M] d\alpha ; \quad (3,3 ; 2)$$

et par conséquent

$$I(p) - I(0) = \frac{-2}{(2\pi)^2} \int_0^1 \alpha (1-\alpha) \log \left[1 + \frac{p^2}{M} \alpha (1-\alpha) \right] d\alpha, \quad (3,3 ; 3)$$

qui est la même expression que celle à laquelle arrive Karlson (en posant dans 3,3 ; 3) $M = m^2$, et $p = q$). Nous croyons que notre méthode offre des avantages pour l'évaluation des intégrales plus compliquées qui apparaissent en quatrième approximation.

4,0.- Signalons, pour finir, l'étroite connexion de notre méthode avec l'ingénieux procédé de régularisation développé récemment par M.Gupta [5]. Pour le faire voir plus clairement nous aborderons avec notre méthode le même exemple que celui traité par Gupta [self-énergie du photon en seconde approximation].

Après des calculs que nous ne reproduisons pas, on arrive à l'intégrale divergente [[5], p.137, formule 63].

$$J_{\mu\nu}[q, m^2] = \frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \int_0^1 du \frac{k^2 \delta_{\mu\nu} - 2k_\mu k_\nu + kq \delta_{\mu\nu} - k_\mu q_\nu - k_\nu q_\mu + m^2 \delta_{\mu\nu}}{(k^2 + 2u k \cdot q + u q^2 + m^2 - iy)^2}.$$

(4,0 ; 0)

Décrivons brièvement la méthode de Gupta. Lorsqu'on est en présence d'une intégrale divergente comme (4,0 ; 0), qui contient m^2 en dénominateur [rappelons que m^2 est un paramètre invariant lorentzien] le procédé de M.Gupta consiste à dériver formellement sous le signe autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir une intégrale convergente ; puis il forme l'expression (si l'on a dérivé n fois)

$$J_{\mu\nu}(q, m^2)_{\text{reg}} = (-1)^n \int_0^\xi d\xi_n \int_0^\xi d\xi_{n-1} \dots \int_0^\xi J_{\mu\nu}^{[n]} [m^2 + \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n] d\xi_1 ;$$

(4,0 ; 1)

et, à la fin, il fait tendre ξ vers l'infini ["...where ξ , which is a

large constant of the dimension of mass, ultimately tends to infinity" ; [5], p.136] . L'infini apparaît de nouveau, naturellement, dans le résultat final. Mais ce résultat contient aussi des termes finis [indépendants de ξ] ; ce sont les seuls qui, d'après la théorie, sont à retenir comme ayant une signification physique.

Or, supposons que l'intégrale dont on est parti soit absolument convergente, alors le second membre de (4,0 ; 1) a un sens lorsque $\xi = \infty$, et redonne $J_{\mu\nu}(q)$ (supposé convergente) ; ce n'est pas autre chose, d'après la formule (3,0 ; 3), que l'intégrale de Riemann-Weyl de $J_{\mu\nu}^{[n]}(q)$, multipliée par $(-1)^n$. Le second membre de (4,0 ; 1) est donc une espèce d'intégrale partielle de l'intégrale RW de $J_{\mu\nu}^{[n]}[q]$. Lorsque l'intégrale dont on est parti est divergente il est donc bien naturel de faire tendre ξ vers l'infini, et de prendre après la partie finie de l'intégrale de Riemann-Weyl qui en résulte. C'est en cela que consiste précisément notre méthode de régularisation.

4,1.- Dans le cas de l'intégrale (4,0 ; 0) il suffit de dériver deux fois pour avoir une intégrale convergente (rappelons que dans (4,0 ; 0) nous avons conservé les notations de Gupta :

$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_4^2$; et q^2 a une signification semblable. Nous poserons $M = m^2$

On obtient en dérivant deux fois,

$$\frac{d^2 J_{\mu\nu} [q, M]}{d M^2} = \frac{4ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \int_0^1 du \frac{-\frac{1}{2} k^2 \delta_{\mu\nu} + 5 [u^2 - u] q^2 \delta_{\mu\nu} + 6 (u - u^2) q_\mu q_\nu + M \delta_{\mu\nu}}{[k^2 - u^2 q^2 + u q^2 + M]^4} . \quad (4,1 ; 0)$$

En faisant l'intégrale par rapport à k on obtient [cf. [5], p. 138]

$$\frac{d^2 J_{\mu\nu} [q, M]}{d M^2} = \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{(u - u^2) [q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] du}{(u q^2 - u^2 q^2 + M - iy)^2} . \quad (4,1 ; 1)$$

Formons donc, d'accord avec notre règle, l'intégrale de Riemann-Weyl d'ordre 2 de (4,1 ; 1) : on obtient sans difficulté [toutes les intégrales dont on a besoin figurent dans la table] :

$$I_{RW}^{[2]} \left[\frac{d^2 J_{\mu\nu} [q, M]}{d M^2} \right] = - \frac{e^2}{4\pi^2} [q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] Z(q) , \quad (4,1 ; 2)$$

où

$$Z(q) = \int_0^1 [u - u^2] [1 + \log [u q^2 - u^2 q^2 + M]] \quad . \quad (4,1 ; 3)$$

Si maintenant, d'accord avec les principes de la renormalisation nous formons la différence du deuxième membre de (4,1 ; 2), et sa valeur pour $q = 0$ nous obtiendrons :

$$[J_{\mu\nu}(q)]_{\text{renorm}} = -\frac{e^2}{4\pi^2} [q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] \int_0^1 (u - u^2) \log \left[1 + \frac{uq^2 - u^2 q^2}{m^2} \right] du \quad .$$

(4,1 ; 4]

C'est le même résultat auquel arrive Gupta avec sa méthode.

.....
 .
 . Les lettres représentées dans ce texte dactylographié par .
 . les majuscules S , X et Z seraient à remplacer dans un texte .
 . imprimé par les minuscules correspondantes s , x et z .
 .
 .
 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1]. Arnaud DENJOY . Journ. Anal. Math. Jérusalem III , (1953-1954), pp. 197-206 .
- [2]. F.J.DYSON . Phys. Rev., 75 (1949), pp. 1736-1755.
- [3]. R.P.FEYNMAN . Phys. Rev., 76 (1949), pp. 769-789 .
- [4]. N.E.FREMBERG . A study of generalised hyperbolic potentials. Lund, 1946.
- [5]. S.N.GUPTA . Proc. Phys. Soc. A , 166 (1953), pp. 129-138
- [6]. T.GUSTAFSON . Arkiv Mat. Astr. Fys., 34 A (1946).
- [7]. J.HADAMARD . Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Paris, Hermann, 1932.
- [8]. W.HEITLER . The Quantum theory of radiation. Oxford, 1954.
- [9]. G.KÄLLEN . Arkiv för Fysik, 2, (1951), pp. 371-410.
- [10]. G.KÄLLEN . Arkiv för Fysik, 5 (1952), pp. 130-131.
- [11]. E.KARLSON . Arkiv för Fysik, 7 (1954) pp. 221-237.
- [12]. L.S.KOTHARI . Proc. Phys. Soc., A, vol. 67 (1954), pp. 17-24.
- [13]. L.S.KOTHARI . Proc. Phys. Soc. A, vol. 67 (1954), pp. 201-205.
- [14]. L.S.KOTHARI . Proc. Phys. Soc. A, vol.67 (1954) pp. 580-583.
- [15]. Pierre D.METHEE . Comm. Math. Helv. 28 (1954), pp. 225-269.
- [16]. S.B.NILSSON . Phys. Rev., 73 (1948), pp. 903-909.
- [17]. S.B.NILSSON . Arkiv för Fysik, 1 (1949-1950), pp. 369-422.
- [18]. W.PAULI and D.VILLARS . Rev. Modern Physics, 21 (1949), pp. 434-444.
- [19]. W.PAULI . Ausgewählte Kapitel aus der Feldquantisierung. Zürich, 1950-1951.
- [20]. M.RIESZ . Acta Math. 81 (1949), pp. 1-223.
- [21]. M.RIESZ . Comptes rendus Acad. Sci. Paris, vol. 234 (1952), pp.2159-2161.
- [22]. D.RIVIER . Helv. Phys. Acta, 22 (1949), pp. 265-318.
- [23]. L.SCHWARTZ . Théorie des distributions. Paris, Hermann, 1950 et 1951.
- [24]. J.SCHWINGER . Phys. Rev. 76 (1949), pp. 790-817.
- [25]. E.C.G.STUECKELBERG et T.A.GREEN. Helv. Phys. Acta, 24 (1951), pp.153-174.
- [26]. H.WEYL . Vierteljahrs-schrift Naturforsch. Ges. Zürich, 62(1917)pp296-302.
- [27]. A.ZYGMUND . Trigonometrical Series. Warszawa-Lwow, 1935.