

SÉMINAIRE JANET. MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE CÉLESTE

JOSEPH KLEIN

Notion de tenseur force en mécanique classique et relativiste

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962), exp. n° 4, p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A4_0

© Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTION DE TENSEUR FORCE EN MÉCANIQUE CLASSIQUE ET RELATIVISTE

par Joseph KLEIN

Dans cette conférence, nous nous proposons de montrer l'intérêt qu'il y a, tant en Mécanique classique qu'en Relativité générale, d'adjoindre à la notion de vecteur force ou vecteur densité de force, celle de tenseur force ou mieux celle de 2-forme tenseur force.

I. Tenseur-force en Mécanique analytique.

1. Equations de Lagrange dans le formalisme homogène.

Considérons un système dynamique (S) à liaisons holonomes bilatérales parfaites admettant n degrés de liberté x^k .

Soit V_{n+1} son espace-temps de configuration. Un système de coordonnées locales d'un point de V_{n+1} est défini par $x^1, \dots, x^n$ et $t = x^{n+1}$.

Les trajectoires du système (S) dans V_{n+1} sont définies par les n équations de Lagrange :

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = Q_k \quad ,$$

$\mathcal{L}$ étant le lagrangien de (S), les Q_k les coefficients de la forme : travail élémentaire, ces coefficients pouvant dépendre à la fois des x^k , de t et des $\dot{x}^k$.

Passons au formalisme homogène suivant un procédé maintenant classique. Soit u un paramètre arbitraire.

Posons

$$t = x^{n+1} \quad , \quad \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du} \quad \text{où } \alpha = 1, \dots, n+1$$

et

$$L = \mathcal{L}(x^\alpha, \frac{\dot{x}^k}{x^{n+1}}) x^{n+1} \quad .$$

Nous avons :

$$\partial_{\dot{x}^k} \mathcal{L} = \partial_{\dot{x}^k} L \quad \text{et} \quad \partial_{\dot{x}^{n+1}} L = \mathcal{L} - x^{i,k} \partial_{x^i} \mathcal{L} = -\mathcal{H}$$

où $\mathcal{H}$ est l'hamiltonien correspondant à $\mathcal{L}$.

Les équations (1) deviennent après multiplication par $\dot{x}^{n+1}$:

$$(2) \quad \frac{d}{du} \partial_{\dot{x}^k} L - \partial_{x^k} L = Q_k \dot{x}^{n+1} = X_k \quad .$$

Posons

$$P_\alpha(L) = \frac{d}{du} \partial_\alpha L - \partial_\alpha L$$

L étant homogène de degré 1 par rapport aux $\dot{x}$ ($\dot{x}^1$ dans la suite) nous avons l'identité :

$$(3) \quad P_\alpha(L) \dot{x}^\alpha = 0 \quad .$$

Nous en déduisons que

$$P_{n+1}(L) \dot{x}^{n+1} = -P_k(L) \dot{x}^k = -X_k \dot{x}^k$$

d'où la $(n+1)$ -ième équation de Lagrange :

$$P_{n+1}(L) = X_{n+1} \quad \text{avec} \quad X_{n+1} = -Q_k \dot{x}^k \quad .$$

Cette équation exprime le théorème bien connu de Painlevé traduit par l'équation :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = Q_k x^{i,k} \quad .$$

Finalement le système des équations de Lagrange est :

$$(4) \quad P_\alpha(L) = X_\alpha \quad .$$

Le vecteur X dont les composantes X_α sont $\dot{x}^1$ est, par définition, le vecteur force généralisée ; il vérifie l'identité

$$X_\alpha \dot{x}^\alpha = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire est toujours orthogonal à la vitesse.

2. Equations du mouvement dans l'espace des états.

Désignons par $\mathcal{V}$ l'espace fibré des vecteurs non nuls tangents à V_{n+1} et par W l'espace fibré des directions tangentes à V_{n+1} ; W est appelé espace-temps d'extension en phase ou espace des états.

Soit Z un point de $\mathcal{V}$ se projetant en x sur V_{n+1} . Si x^α est un système de coordonnées locales de x , nous prendrons comme coordonnées locales de Z les

$2n + 2$ nombres x^α et y^α où les y^α sont les composantes sur le repère naturel en x de V_{n+1} , correspondant aux x^α , d'un vecteur arbitraire de T_x (espace tangent en x à V_{n+1}). Z se projette en z sur W ; comme coordonnées de z nous prendrons encore les x^α , y^α , ces dernières n'étant définies qu'à un facteur de proportionnalité positif près.

Un champ de tenseurs défini sur $\mathcal{V}$ semi-basique est une application qui à tout point Z de $\mathcal{V}$ fait correspondre un élément de l'algèbre tensorielle affine construite sur T_x .

Les tenseurs intervenant dans la suite sont dits restreints $\dot{h} k$ si leurs composantes sont homogènes de degré k par rapport aux variables y^α . Si $k = 0$, le tenseur sera dit défini sur W . Nous dirons simplement tenseur $\dot{h} k$ pour un tenseur semi-basique restreint de degré k par rapport aux y^α .

A une trajectoire sur V_{n+1} correspond une trajectoire sur W définie par le système :

$$\begin{cases} \frac{dx^\alpha}{dt} = y^\alpha \\ \partial_{\dot{\alpha}\beta} L \frac{dy^\beta}{du} + (\partial_{\dot{\alpha}\beta} L - \partial_{\alpha\dot{\beta}} L) \frac{dx^\beta}{du} = X_\alpha \end{cases}$$

Par un point $z(x, y)$ de W passe une trajectoire et une seule; cette trajectoire est dite un chemin basique de W ; un chemin non basique de W étant un chemin se projetant sur la base suivant une succession d'éléments linéaires non tous tangents au lieu de x .

3. Définition du tenseur force.

Le vecteur force X_α est $\dot{h} 1$ par définition.

Dans les applications il se présente souvent sous la forme :

$$X_\alpha = S_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta,$$

les $S_{\alpha\beta}$ étant antisymétriques et indépendants des $\dot{x}$.

Nous avons alors :

$$(5) \quad S_{\alpha\beta} = \partial_{\dot{\beta}} X_\alpha = \frac{1}{2} (\partial_{\dot{\beta}} X_\alpha - \partial_{\dot{\alpha}} X_\beta).$$

Dans le cas général nous appellerons tenseur-force du système (S) le tenseur défini par les formules (5).

De l'homogénéité des X_α et de l'identité $X_\alpha \dot{x}^\alpha = 0$, on déduit bien que

$$S_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta = X_\alpha .$$

Il en résulte que $S_{\alpha\beta}$ est un tenseur à 0, c'est-à-dire défini sur W .

4. Interprétation géométrique des trajectoires.

1° Considérons l'espace de Finsler $\mathfrak{F}$ défini sur V_{n+1} par

$$ds = L(x, \dot{x}) du .$$

Posons

$$\ell_\alpha = \partial_{\dot{x}^\alpha} L .$$

Les ℓ_α sont les composantes d'un vecteur unitaire en x . Les équations de Lagrange se mettent alors sous la forme

$$\frac{\nabla \ell_\alpha}{ds} = X_\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{\nabla \ell_\alpha}{ds} = \frac{X_\alpha}{L} = F_\alpha$$

Elles expriment que les trajectoires du système dynamique (S) sont les chemins de $\mathfrak{F}$ tels qu'en tout point le vecteur courbure du chemin soit égal au vecteur force.

2° L'introduction du tenseur $S_{\alpha\beta}$ permet de définir sur V_{n+1} une connexion linéaire de directions telle que les trajectoires de (S) soient pour cette connexion des géodésiques.

L'espace ainsi obtenu se réduit à l'espace de Finsler défini par L lorsque $S_{\alpha\beta} = 0$.

Les conventions à la base d'un tel espace, dit S-finslérien, ne se distinguent des conventions d'Elie CARTAN pour un espace de Finsler que par la dernière : les $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^*$ ne sont plus symétriques par rapport aux 2 derniers indices ; on pose en effet

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^* - \Gamma_{\alpha\gamma\beta}^* = \ell_\alpha S_{\beta\gamma} .$$

Ces conventions déterminent une connexion et une seule, telle que

$$\frac{\nabla_S \ell_\alpha}{du} = \Gamma_\alpha(L) - S_{\alpha\beta} \dot{y}^\beta .$$

La différentielle absolue du vecteur unitaire ℓ_α s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla_S \ell_\alpha &= d\ell_\alpha - \omega_\alpha^\lambda \ell_\lambda , \\ &= d\ell_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^{*\lambda} \ell_\lambda dx^\beta , \end{aligned}$$

d'où

$$(6) \quad \nabla_S l_\alpha \wedge dx^\alpha = dl_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta .$$

Cette 2-forme Ω va jouer un rôle fondamental dans la suite.

5. Théorèmes fondamentaux.

1° Soit C_0 un chemin non basique de W , fermé ou non ; considérons les trajectoires passant par les points de C_0 ; limitons-les à C_0 et C_1 , chemin non basique homotope à C_0 . Soit Γ la 2-chaîne de W ainsi définie.

Posons

$$I = \int_{\Gamma} \Omega$$

avec

$$\Omega = \nabla_S l_\alpha \wedge dx^\alpha$$

et

$$l_\alpha = \partial_\alpha L(x, y) .$$

Soit $x^\alpha = f^\alpha(u, v)$, $y^\alpha = g^\alpha(u, v)$ une représentation paramétrique de $\Gamma : \bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ telle que les trajectoires soient les courbes $v = \text{cte.}$ On a alors

$$I = \int_{\bar{\Gamma}} \left(\frac{\nabla_S l_\alpha}{du} \frac{\partial x^\alpha}{\partial v} - \frac{\nabla_S l_\alpha}{dv} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u} \right) du dv .$$

Or $\frac{\nabla_S l_\alpha}{du} = 0$, $\frac{\partial x^\alpha}{\partial u}$ est colinéaire à l^α . Comme $l^\alpha \frac{\nabla_S l_\alpha}{dv} = 0$, l'intégrale I est nulle quelle que soit Γ .

Nous dirons que Ω définit une relation intégrale d'invariance pour l'ensemble des trajectoires. Il en est de même pour $f\Omega$, f fonction scalaire arbitraire.

Il en résulte que le système des équations du mouvement est le système associé de cette forme :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial (dx^\alpha)} = 0 ; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial (dy^\alpha)} = 0 ,$$

ce que l'on vérifie aisément.

2° Supposons C_0 fermé. La 2-chaîne Γ est alors désignée par un tube de trajectoires $\mathcal{C}_0^1$.

$$\int_{\mathcal{C}_0^1} \Omega = 0 \text{ s'écrit}$$

$$- \int_{C_0}^1 d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha = \int_{C_0}^1 \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta .$$

En transformant le 1er membre à l'aide de la formule de Stokes, le bord de C_0^1 étant $C_0 - C_1$, nous obtenons la formule fondamentale :

$$(7) \quad \int_{C_1} \ell_\alpha dx^\alpha - \int_{C_0} \ell_\alpha dx^\alpha = \iint_{C_0^1} \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta .$$

Nous obtenons ainsi une généralisation du théorème bien connu d'Elie Cartan que nous énoncerons ainsi :

Soit C_0^1 un tube de trajectoires de l'espace des états de bord $C_0 - C_1$; C_0 et C_1 étant deux 1-cycles homotopes, la différence des circulations du vecteur vitesse $\ell_\alpha = \partial_\alpha L$ le long de C_1 et C_0 est égal au flux du tenseur force à travers le tube.

6. Equations canoniques du mouvement.

Prenons comme coordonnées d'un point z de W les $2n+2$ variables x^α et $\ell_\alpha = \partial_\alpha L$.

Les ℓ_α sont les composantes covariantes d'un vecteur unitaire tangent à V_{n+1} de composantes contravariantes ℓ^α .

Les x^α , ℓ_α sont donc liés par une relation de la forme

$$H(x^\alpha, \ell_\alpha) = 1 ,$$

se déduisant de $L(x^\alpha, \ell^\alpha) = 1$ par changement de variable.

En écrivant le système associé de

$$\Omega = d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta ,$$

compte tenu de

$$H = \partial_\alpha H dx^\alpha + \partial^\alpha H d\ell_\alpha = 0 ,$$

nous obtenons le système des équations canoniques :

$$I \quad \begin{cases} \frac{dx^\alpha}{ds} = \partial^\alpha H \\ \frac{d\ell_\alpha}{ds} = -\partial_\alpha H + S_{\alpha\beta} \partial^\beta H , \end{cases}$$

ou encore

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{dx^\alpha}{ds} = \partial^\alpha H \\ \frac{dl_\alpha}{ds} - S_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{ds} = -\partial_\alpha H \end{cases},$$

en désignant par s l'arc de trajectoire en projection sur V_{n+1} . On vérifie que le système I (ou II) admet l'intégrale première $H = \text{Cte}$. Les trajectoires sont donc les courbes intégrales de I ou II vérifiant la condition initiale

$$H(x_0, l_0) = 1.$$

Considérons les 2 matrices antisymétriques,

$$E_S = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & S \end{pmatrix}$$

et

$$J_S = \begin{pmatrix} S & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

S étant la matrice d'éléments $S_{\alpha\beta}$, 0 et I respectivement la matrice nulle et la matrice unité d'ordre $n+1$.

J_S est la matrice associée à Ω , E_S son inverse.

En désignant par $\left(\frac{dz}{ds}\right)$ la matrice colonne formée par $\frac{dx^\alpha}{ds}$ et $\frac{dl_\alpha}{ds}$, par $(\text{grad}_z H)$ la matrice colonne formée par les $\partial_\alpha H$ et $\partial^\alpha H$, les systèmes I et II se mettent sous les formes remarquables :

$$(III) \quad \left(\frac{dz}{ds}\right) = E_S (\text{grad}_z H)$$

ou

$$(IV) \quad J_S \left(\frac{dz}{ds}\right) = (\text{grad}_z H).$$

Si J_S a pour élément a_{AB} où $A, B = 1, \dots, 2n+2$; si x^A représente x^α si $A \leq n+1$, et l_α si $A > n+1$, on a :

$$\Omega = \frac{1}{2} a_{AB} dx^A \wedge dx^B$$

et (IV) devient

$$a_{AB} \frac{dx^B}{ds} = \partial_A H.$$

7. Tenseurs-force particuliers.

Si nous supposons les variables x^α , ℓ_α indépendantes, la forme

$$\Omega = d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

définit sur $\mathcal{V}$ une structure de variété presque symplectique.

Ω définit sur $\mathcal{V}$ une structure symplectique si Ω est fermée ou admet un facteur intégrant.

1er cas : Ω est fermée c'est-à-dire $d\Omega = 0$.

Nous avons :

$$d\Omega = \frac{1}{6} K_{\alpha\beta\gamma} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma + \frac{1}{2} \partial^\gamma S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge d\ell_\gamma,$$

avec

$$K_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha S_{\beta\gamma} + \partial_\beta S_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma S_{\alpha\beta}$$

$d\Omega = 0$ si et seulement si $\partial^\gamma S_{\alpha\beta} = 0$ c'est-à-dire si les $S_{\alpha\beta}$ sont indépendants de ℓ et si $K_{\alpha\beta\gamma} = 0$.

Dans ces conditions il existe localement un champ de vecteurs $\vec{A}(x)$ défini sur V_{n+1} tel que :

$$(8) \quad S_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha.$$

Nous dirons que le tenseur force dérive du potentiel vecteur $\vec{A}$. Nous avons alors

$$\Omega = d(\ell_\alpha dx^\alpha + A_\alpha dx^\alpha).$$

D'après le paragraphe 5, la forme

$$\omega = (\ell_\alpha + A_\alpha) dx^\alpha$$

définit un invariant intégral relatif pour l'ensemble des trajectoires :

$$\int_{C_1} (\ell_\alpha + A_\alpha) dx^\alpha = \int_{C_0} (\ell_\alpha + A_\alpha) dx^\alpha.$$

Les trajectoires sur V_{n+1} sont les géodésiques de l'espace de Finsler défini par :

$$ds = (\partial_{\dot{\alpha}} L + A_\alpha) dx^\alpha = (L + A_\alpha \dot{x}^\alpha) du$$

ou, ce qui est équivalent, les extrémales de l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1} (L + A_\alpha \dot{x}^\alpha) du \quad .$$

2e cas : Ω admet un facteur intégrant.

Cela veut dire qu'il existe localement une fonction $f(x, \ell)$ telle que :

$$d(f\Omega) = df \wedge \Omega + f d\Omega = 0 \quad ,$$

ou

$$d\Omega = -\frac{df}{f} \wedge \Omega = d\varphi \wedge \Omega$$

en posant

$$\varphi = -\log |f| \quad .$$

En explicitant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} K_{\alpha\beta\gamma} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma + \frac{1}{2} \partial^\gamma S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge d\ell_\gamma \\ = (\partial_\gamma \varphi dx^\gamma + \partial^\gamma \varphi d\ell_\gamma) \wedge (d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta), \end{aligned}$$

d'où par identifications :

$$\begin{aligned} \partial^\gamma \varphi &= 0 & \varphi &\text{ ne dépend que des } x, \\ \partial^\gamma S_{\alpha\beta} &= 0 & \text{ si } \gamma \neq \alpha \text{ et } \gamma \neq \beta, \\ \partial^\gamma S_{\gamma\beta} &= \partial_\beta \varphi & (\text{sans sommation sur } \gamma). \end{aligned}$$

$S_{\alpha\beta}$ est donc de la forme :

$$S_{\alpha\beta} = \ell_\alpha \partial_\beta \varphi - \ell_\beta \partial_\alpha \varphi + T_{\alpha\beta}(x) \quad .$$

Pour le tenseur $T_{\alpha\beta}$ on trouve, S désignant une permutation circulaire,

$$S(\partial_\gamma T_{\alpha\beta} - \partial_\gamma \varphi T_{\alpha\beta}) = 0 \quad ,$$

qui exprime que $e^{-\varphi}$ est un facteur intégrant pour

$$\frac{1}{2} T_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad ,$$

c'est-à-dire qu'il existe localement un potentiel vecteur A_α tel que :

$$T_{\alpha\beta} = e^\varphi (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \quad .$$

Nous trouvons que si Ω admet un facteur intégrant, $S_{\alpha\beta}$ est de la forme :

$$(9) \quad S_{\alpha\beta} = \ell_\alpha \partial_\beta \varphi - \ell_\beta \partial_\alpha \varphi + e^\varphi (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \quad .$$

On montre qu'en tenant compte de $H(x, \ell) = 1$, le tenseur $S_{\alpha\beta}$ est nécessairement de cette forme.

La fonction scalaire φ et le vecteur $\vec{A}$ sont dits potentiel scalaire et potentiel vecteur associés.

Inversement, si $S_{\alpha\beta}$ est de la forme (9), on a

$$\begin{aligned} e^{-\varphi} \Omega &= e^{-\varphi} (d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha + \ell_\alpha dx^\alpha \wedge d\varphi) + d(A_\alpha dx^\alpha) \\ &= d(e^{-\varphi} \ell_\alpha dx^\alpha + A_\alpha dx^\alpha) . \end{aligned}$$

La forme

$$\omega = (e^{-\varphi} \ell_\alpha + A_\alpha) dx^\alpha ,$$

définit alors un invariant intégral relatif pour l'ensemble des trajectoires ; les trajectoires dans V_{n+1} sont les extrémales de l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1} (e^{-\varphi} L + A_\alpha \dot{x}^\alpha) du .$$

On montre que Ω admet un facteur intégrant local si et seulement si :

$$d\Omega \equiv \frac{1}{n} \partial\Omega \wedge \Omega$$

avec

$$d\Omega = 2\partial^\gamma S_{\alpha\beta} dx^\alpha .$$

II. Notion de tenseur-force en Relativité générale.

1. Définition du tenseur-force.

Soit V_4 l'espace-temps de la Relativité générale muni de la métrique riemannienne

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta ;$$

u étant un paramètre quelconque, posons :

$$L^2 = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

avec

$$\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du} ,$$

et,

$$\ell_\alpha = \partial_\alpha L = g_{\alpha\beta} \frac{\dot{x}^\beta}{L} = g_{\alpha\beta} \ell^\beta .$$

Supposons que sur un domaine D de V_4 soit définie une distribution énergétique correspondant au tenseur impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$.

Posons :

$$T_{\alpha\beta} = r \ell_\alpha \ell_\beta - \theta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \nabla_\alpha \theta_\beta^\alpha = r K_\beta ,$$

les $\theta_{\alpha\beta}$ pouvant dépendre à la fois des x^α et des ℓ^α . Les K_α , qui sont $\neq 0$, sont les composantes covariantes du vecteur densité de force associé au tenseur énergie $\theta_{\alpha\beta}$ et à la pseudo-densité représentée par le scalaire r .

Les équations de conservation

$$\nabla_\alpha T_\beta^\alpha = 0$$

donnent le système différentiel des lignes de courant partout tangentes au vecteur vitesse unitaire.

Ce système différentiel peut être mis sous la forme classique :

$$\ell^\beta \nabla_\beta \ell_\alpha = (g_\alpha^\beta - \ell_\alpha \ell^\beta) K_\beta$$

ou

$$\frac{\nabla \ell_\alpha}{ds} = (K_\alpha \ell_\beta - K_\beta \ell_\alpha) \ell^\beta$$

ou encore

$$\frac{\nabla \ell_\alpha}{du} = (K_\alpha \ell_\beta - K_\beta \ell_\alpha) \dot{x}^\beta .$$

Posons $X_\alpha = (K_\alpha \ell_\beta - K_\beta \ell_\alpha) \dot{x}^\beta$.

Au vecteur force X_α est associé le tenseur antisymétrique :

$$s_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\beta X_\alpha - \partial_\alpha X_\beta) .$$

Si les K_α sont indépendants des $\dot{x}$, le tenseur $s_{\alpha\beta}$ se réduit à :

$$K_\alpha \ell_\beta - K_\beta \ell_\alpha .$$

Au tenseur impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$ nous avons ainsi fait correspondre de façon canonique un tenseur antisymétrique $s_{\alpha\beta}$ que nous appellerons tenseur-force du schéma considéré.

Le système différentiel des lignes de courant est alors

$$\frac{\nabla \ell_\alpha}{ds} = s_{\alpha\beta} \ell^\beta ,$$

on a

$$(\nabla_\beta \ell_\alpha - \nabla_\alpha \ell_\beta) \ell^\beta = s_{\alpha\beta} \ell^\beta .$$

2. Conséquences.

Les résultats obtenus dans la première partie permettent alors d'énoncer plusieurs théorèmes :

1^{er} **THÉOREME**. - Le système différentiel des lignes de courant d'un schéma à tenseur impulsion-énergie quelconque est le système associé de la 2-forme :

$$\Omega = d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} s_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta .$$

Cette forme Ω définit une relation intégrale d'invariance pour les lignes de courant ; $\mathcal{C}$ étant une 2-chaîne quelconque engendrée par des lignes de courant :

$$\int_{\mathcal{C}} \Omega = 0 .$$

2^e **THÉOREME**. - Soient C_0 et C_1 deux cycles homotopes à une dimension entourant un même tube de lignes de courant ; la différence des circulations du vecteur vitesse unitaire le long de C_0 et C_1 est égale au flux du tenseur-force à travers la portion de tube limitée par C_0 et C_1 . D'où la formule

$$\int_{C_1} \ell_\alpha dx^\alpha - \int_{C_0} \ell_\alpha dx^\alpha = \iint_{\mathcal{C}_0^1} \frac{1}{2} s_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta .$$

3^e **THÉOREME**. - Les lignes de courant sont les géodésiques de l'espace s-riemannien défini par L et le tenseur-force $s_{\alpha\beta}$. Un espace s-riemannien est un espace S-finslérien pour lequel L^2 est une forme quadratique par rapport aux $\dot{x}^\alpha$. Indiquons la définition d'un tel espace.

Sur V_4 , on considère la métrique riemannienne définie par

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta ,$$

et la connexion euclidienne de directions correspondant aux formes de torsion :

$$\Sigma^\alpha = \frac{1}{2} (s_{\beta\gamma} dx^\beta \wedge dx^\gamma) \ell^\alpha .$$

Comme les $g_{\alpha\beta}$ sont indépendants des ℓ^α les formes de connexion ω_β^α se réduisent à

$$\omega_\beta^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x, \ell) dx^\gamma .$$

Les Γ sont définis par le système :

$$\begin{cases} \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \\ \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \ell_\alpha s_{\beta\gamma} \end{cases},$$

d'où

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = [\beta\gamma, \alpha] + \frac{1}{2} (\ell_\alpha s_{\beta\gamma} + \ell_\beta s_{\gamma\alpha} - \ell_\gamma s_{\alpha\beta}).$$

Posons

$$\Sigma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} (\ell_\alpha s_{\beta\gamma} + \ell_\beta s_{\gamma\alpha} - \ell_\gamma s_{\alpha\beta}).$$

Si les K_α sont indépendants des $\dot{x}$ on a :

$$\Sigma_{\alpha\beta\gamma} = - \ell_\gamma s_{\alpha\beta}.$$

Les formes de courbure

$$\Omega^\alpha_\beta = \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta, \lambda\mu} dx^\lambda \wedge dx^\mu + S^\alpha_{\beta\mu} \nabla^\ell_\lambda \wedge dx^\mu$$

sont définies par :

$$S^\alpha_{\beta\mu} = \partial^\lambda \Sigma^\alpha_{\beta\mu}$$

et

$$R^\alpha_{\beta, \lambda\mu} = \overset{\circ}{R}^\alpha_{\beta, \lambda\mu} + \overset{\circ}{\nabla}_\lambda \Sigma^\alpha_{\beta\mu} - \overset{\circ}{\nabla}_\mu \Sigma^\alpha_{\beta\lambda} + \Sigma^\rho_{\beta\mu} \Sigma^\alpha_{\rho\lambda} - \Sigma^\rho_{\beta\lambda} \Sigma^\alpha_{\rho\mu},$$

où $\overset{\circ}{R}^\alpha_{\beta, \lambda\mu}$ est le tenseur de Riemann-Christoffel de l'espace riemannien et où $\overset{\circ}{\nabla}$ représente la dérivation dans cet espace.

3. Exemple : Schéma fluide parfait chargé.

Appliquons les considérations précédentes au schéma fluide parfait chargé.

Le tenseur impulsion-énergie d'un tel schéma est défini dans un domaine D de V_4 par

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) \ell_\alpha \ell_\beta - p g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta},$$

ρ est la densité propre, p la pression propre, $\tau_{\alpha\beta}$ le tenseur impulsion-énergie du champ électromagnétique défini par le tenseur $F_{\alpha\beta}$.

Le système différentiel des lignes de courant est

$$\frac{\nabla^\ell \ell_\alpha}{ds} = (g^\beta_\alpha - \ell^\beta \ell_\alpha) \left(\frac{\partial_\beta p}{\rho + p} + \frac{\mu}{\rho + p} F_{\beta\lambda} \ell^\lambda \right),$$

μ étant la densité de charge propre du fluide.

Nous pouvons écrire ces équations sous la forme :

$$\frac{\nabla^\ell \ell_\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho + p} (\partial_\alpha p \ell_\beta - \partial_\beta p \ell_\alpha + \mu F_{\alpha\beta}) \ell^\beta.$$

Les scalaires ρ , p , μ étant supposés indépendants de la vitesse, les compo-

santes du tenseur-force sont :

$$s_{\alpha\beta} = \frac{1}{\rho + p} (\partial_\alpha p \ell_\beta - \partial_\beta p \ell_\alpha + \mu F_{\alpha\beta}) .$$

Supposons que sur D existe un potentiel vecteur global $\vec{A}$ tel que :

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha .$$

Pour que la 2-forme Ω correspondant à $s_{\alpha\beta}$ admette un facteur intégrant il faut et il suffit qu'il existe une fonction $\varphi(x)$ sur D telle que :

$$\begin{cases} \partial_\alpha \varphi = \frac{\partial_\alpha p}{\rho + p} \\ ke^{-\varphi} = -\frac{\mu}{\rho + p} , \quad k \text{ étant une constante arbitraire.} \end{cases}$$

Supposons qu'il existe une équation d'état $\rho = f(p)$; nous déduisons des premières conditions que :

$$\varphi = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho + p} .$$

La dernière entraîne $\frac{\mu e^\varphi}{\rho + p} = k = \text{Cte}$ dans D , e^φ est l'indice F du fluide.

Dans ces conditions le fluide est dit chargé de manière homogène et nous avons

$$s_{\alpha\beta} = \ell_\beta \partial_\alpha \varphi - \ell_\alpha \partial_\beta \varphi + ke^{-\varphi} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) ,$$

et

$$\Omega = d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha + d\varphi \wedge \ell_\alpha dx^\alpha + ke^{-\varphi} d(A_\alpha dx^\alpha) ,$$

Ω admet comme facteur intégrant $e^\varphi = F$, et

$$e^\varphi \Omega = d(F\ell_\alpha dx^\alpha + kA_\alpha dx^\alpha) .$$

Nous en déduisons les résultats classiques.

Les lignes de courant sont caractérisées par l'existence de l'invariant intégral relatif

$$\omega = (F\ell_\alpha + kA_\alpha) dx^\alpha$$

ou la propriété équivalente :

les lignes de courant sont les géodésiques de l'espace de Finsler défini sur V_4 par

$$ds = (F L + kA_\alpha \dot{x}^\alpha) du$$

ou encore :

les lignes de courant sont les extrémales de l'intégrale :

$$\int_{u_0}^{u_1} (F L + k A_{\alpha} \dot{x}^{\alpha}) du .$$

Cas particuliers .

a. Schéma matière pure :

$$s_{\alpha\beta} = 0 ; \quad \omega = l_{\alpha} dx^{\alpha} .$$

b. Schéma matière-champ électromagnétique (cas homogène) :

$$s_{\alpha\beta} = k F_{\alpha\beta} ; \quad \omega = k A_{\alpha} dx^{\alpha} .$$

c. Schéma milieu holonome :

$$s_{\alpha\beta} = l_{\beta} \partial_{\alpha} \varphi - l_{\alpha} \partial_{\beta} \varphi ; \quad \omega = F l_{\alpha} dx^{\alpha} .$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KLEIN (Joseph). - Espaces variationnels et mécanique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 1-124 (Thèse Sc. math. Paris. 1961).
 - [2] LICHNEROWICZ (André). - Les relations intégrales d'invariance et leurs applications à la dynamique, Bull. Sc. math., Série 2, t. 70, 1946, 1re partie, p. 82-95.
 - [3] LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. - Paris, Masson, 1955 (Collection d'Ouvrages mathématiques à l'usage des Physiciens).
-