

SÉMINAIRE JANET. MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE CÉLESTE

JEAN-CLAUDE BLAIVE

Le dernier théorème de Poincaré et le problème restreint des trois corps (mécanique Newtonienne classique)

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962),
exp. n° 14, p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A13_0

© Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE DERNIER THÉORÈME DE POINCARÉ
ET LE PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS
(MÉCANIQUE NEWTONNIENNE CLASSIQUE)

par Jean-Claude BLAIVE

1. Systèmes conservatifs à deux degrés de liberté.

Considérons les équations d'un mouvement d'un système dynamique conservatif, à deux degrés de liberté près sous la forme de Lagrange

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(L_{x'}) - L_x = 0 \\ \frac{d}{dt}(L_{y'}) - L_y = 0 \end{cases}$$

où L est une forme quadratique de x' , y' , à coefficients fonctions analytiques de x , y ; si l'on écrit L sous la forme :

$$L = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \alpha x' + \beta y' + \gamma$$

α , β , γ étant des fonctions analytiques de x , y . Les équations (1) s'écrivent alors

$$(2) \quad \begin{cases} x'' + \lambda y' = \gamma_x \\ y'' - \lambda x' = \gamma_y \end{cases} \quad \lambda = \alpha_y - \beta_x$$

On a alors

$$x'^2 + y'^2 = 2\gamma(x, y) - C$$

où C est une constante (intégrale première dite de Jacobi). En posant

$$x' = \sqrt{2\gamma - C} \cos z, \quad y' = \sqrt{2\gamma - C} \sin z, \quad ,$$

on trouve

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \sqrt{2\gamma - C} \cos z \quad \equiv X \\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{2\gamma - C} \sin z \quad \equiv Y \\ \frac{dz}{dt} = \lambda + \frac{\gamma_y \cos z - \gamma_x \sin z}{\sqrt{2\gamma - C}} \equiv Z \end{array} \right. .$$

On est conduit alors à une interprétation hydrodynamique du problème primitif ; les équations (3) sont celles d'un fluide incompressible, car $X_x + Y_y + Z_z = 0$; autrement dit $\iiint dx dy dz$ est invariant intégral, conséquence d'ailleurs, du fait que le système (1) admet l'invariant intégral relatif

$$L_x \delta x + L_y \delta y + (L - x' L_x - y' L_y) \delta t .$$

On aura besoin un peu plus loin de la remarque suivante :

Si on fait le changement de variables

$$z = f(w)$$

$$dt = |f'(w)|^2 d\tau$$

$$\begin{cases} x + iy = z \\ u + iv = w \end{cases}$$

où f est analytique, le système différentiel en u, v, τ a la même forme que le système en x, y, t , λ étant simplement remplacé par $\lambda |f'(w)|^2$ et $2\gamma - C$ par $(2\gamma - C) |f'(w)|^2$.

2. Surfaces de section.

Aux orbites possibles du problème dynamique correspondant les lignes de courant d'un fluide à trois dimensions.

Il est alors commode d'introduire la notion de surface de section due à POINCARÉ, et précisée par BIRKHOFF.

On appellera surface de section S , une surface analytique (ou composée de morceaux analytiques) bornée régulièrement ⁽¹⁾ par un nombre fini de lignes de

⁽¹⁾ "Régulièrement" en ce sens que chaque ligne de courant voisine d'un point de la frontière coupe la surface sous un angle du premier ordre par rapport à la distance à la frontière.

de courant fermées, de telle sorte que toute autre ligne de courant coupe S au moins une fois dans tout intervalle de temps τ , suffisamment grand, et toujours dans le même sens.

Pour un problème dynamique donné, supposons qu'il existe une surface de section S ; si l'on suit un point mobile à partir de $P \in S$, le long d'une ligne de courant dans le sens des temps croissants, il rencontrera donc une nouvelle fois S en un point P_1 . Soit $T(P) = P_1$. Il y a donc une transformation point par point analytique de S sur elle-même qui, au point P , fait correspondre le point P_1 . De cette façon il est possible d'associer au problème dynamique considéré la transformation discrète T de la surface S en elle-même. Les propriétés du mouvement sont traduites par les propriétés de la transformation T ; en particulier la périodicité du mouvement sera représentée par une courbe fermée rencontrant S aux points $P, P_1, \dots, P_k$ tels que $T(P) = P_1$, $T(P_1) = P_2$, $T(P_k) = P = T^k(P)$, les points $P, P_1, \dots, P_k$ sont donc des points de S invariants par T . Inversement si P est un point invariant, il lui correspond un mouvement périodique rencontrant S aux points

$$P, T(P), \dots, T^k(P) \quad .$$

On voit donc que l'on possède ainsi une méthode d'étude des systèmes dynamiques, le problème revient à associer au problème initial une surface de section S , et à trouver une transformation T de cette surface en elle-même.

L'idée directrice de cette méthode est due à POINCARÉ qui a été amené dans le cas du problème restreint des trois corps à considérer une surface de section de la nature d'une couronne circulaire, et à prévoir l'existence d'une infinité de mouvements périodiques dépendant d'un système de deux entiers arbitraires, sous la réserve d'un certain théorème de géométrie pure, le "dernier théorème" de Poincaré (1912), que nous allons énoncer.

3. Énoncé du dernier théorème de Poincaré. Objet du présent exposé.

Soit une couronne circulaire limitée par deux cercles concentriques C_a et C_b ($a > b$).

Soit une transformation T , biunivoque, continue, de l'anneau en lui-même, possédant les propriétés suivantes :

- T conserve les aires (ou du moins admet un invariant intégral positif) ;
- T transforme C_a en lui-même en déplaçant les points dans un certain sens ;

- T transforme C_b en lui-même en déplaçant les points en sens opposé.

Il existe alors au moins deux points invariants par T.

POINCARÉ devait échouer dans ses tentatives de démonstration du théorème, démonstration qui fut donnée l'année suivante par BIRKHOFF [3], une traduction de cette démonstration paraissait en 1914 dans le Bulletin de la Société mathématique de France.

En fait nous n'utiliserons pas ici ce théorème lui-même, mais nous montrerons, d'après BIRKHOFF, comment l'étude d'un cas particulier du problème restreint des trois corps conduit directement à découvrir l'infinité de mouvements périodiques en question et comment ensuite le procédé de la "continuation analytique" peut permettre de passer de là au cas général, au moins sous certaines hypothèses d'inégalité.

4. Le problème restreint des trois corps.

On appelle "problème restreint des trois corps", le problème qui se pose lorsque dans le problème de trois corps matériels soumis à leurs attractions newtoniennes, l'un d'entre eux, M , a une masse infiniment petite m , par rapport aux masses données, finies, m_1 et m_2 des deux autres corps M_1 et M_2 .

Le mouvement de M_1 , comme celui de M_2 , ressort alors de l'étude classique du problème de deux corps, on cherche à étudier les mouvements du point matériel M par rapport à un nouveau système de référence que l'on précisera. On se bornera au cas où :

1° M_1 et M_2 décrivent des cercles autour de leur centre de gravité G , dans un plan fixe (par rapport à des axes galiléens invariables liés à G) ; leur vitesse angulaire commune est donnée par

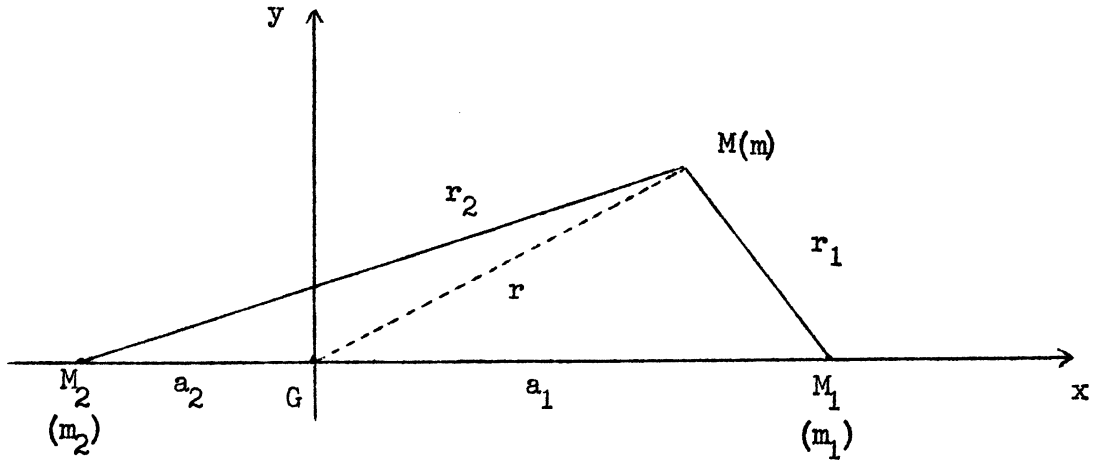
$$\omega^2 = \frac{f(m_1 + m_2)}{a^3} \quad (a = \text{distance } M_1 M_2)$$

f constante de la gravitation .

2° La position et la vitesse initiale de M sont supposées dans le même plan que les cercles précédents et on étudie le mouvement de M par rapport à un système d'axes du plan, invariablement liés à $M_1 M_2$.

a. Équations du mouvement. - On prendra comme système d'axes xGy , Gx étant la direction $M_2 M_1$.

Figure faite en supposant $m_1 < m_2$.



Les équations de Lagrange s'écriront alors

$$(1) \quad \begin{aligned} x'' - 2\omega y' &= \Omega_x^* \\ y'' + 2\omega x' &= \Omega_y^* \end{aligned}$$

avec

$$\Omega^*(x, y) = \frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{2} + f \left\{ \frac{m_1}{\sqrt{(x - a_1)^2 + y^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(x - a_2)^2 + y^2}} \right\}.$$

Soient r , r_1 , r_2 les distances respectives de M à G , M_1 , M_2 . En utilisant le fait que

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 - (m_1 + m_2) r^2 = m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2$$

on peut utiliser

$$2\Omega = f \frac{(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)}{a^3} + \frac{2 f m_1}{r_1} + \frac{2 f m_2}{r_2},$$

qui diffère de $2\Omega^*$ d'une simple constante additive.

En posant $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$, et en prenant des unités telles

que $a = 1$, $\omega = 1$ ⁽²⁾

$$\Omega = \frac{1}{2}[(1 - \mu) r_1^2 + \mu r_2^2] + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} .$$

(Avec cette valeur de Ω , (1) s'écrit $x'' - 2y' = \Omega_x$, $y'' + 2x' = \Omega_y$.)

b. Positions d'équilibre. Intégrale de Jacobi. Courbes de vitesse nulle.

Les positions d'équilibre correspondent à la condition

$$\Omega_x = \Omega_y = 0$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_x = x - \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x + 1 - \mu)}{r_2^3} \\ \Omega_y = y \left[1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right] \end{array} \right.$$

or $\Omega_x \equiv A_1(x - a_1) + A_2(x - a_2)$ $A_1 = (1 - \mu) \left(1 - \frac{1}{r_1^3}\right)$ Donc si $y_2 \neq 0$,
il faut :
où $\Omega_y \equiv A_1 y + A_2 y$ $A_2 = \mu \left(1 - \frac{1}{r_2^3}\right)$ $A_1 = A_2 = 0$, c'est-à-dire $r_1 = r_2 = 1$.

Il y aura équilibre si M est au sommet d'un triangle équilatéral de base
 $M_1 M_2$ (deux positions symétriques par rapport à $M_1 M_2$) (points de Lagrange).

- si $y = 0$, $\Omega_x = 0$ donnera trois valeurs réelles possibles comprises dans les intervalles $(-\infty, a_2)$, (a_2, a_1) , $(a_1, +\infty)$ (points d'Euler).

On obtient ainsi cinq solutions remarquables d'équilibre du problème restreint de trois corps.

Si l'on reconsidère les équations du mouvement

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' - 2y' = \Omega_x \\ y'' + 2x' = \Omega_y \end{array} \right.$$

on a en intégrant

⁽²⁾ Avec ces conventions $r_1^2 = (x - \mu)^2 + y^2$, M_1 est en $(\mu, 0)$ et M_2
en $(\mu - 1, 0)$

$$r_2^2 = (x + 1 - \mu)^2 + y^2 , \quad M(x, y) .$$

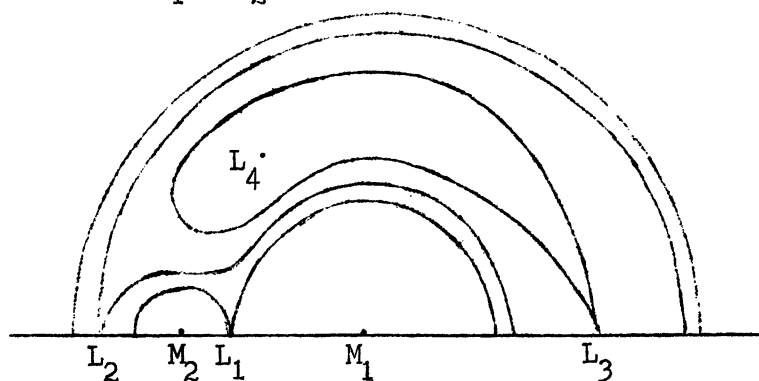
$$x'^2 + y'^2 = 2\Omega(xy) - C$$

C étant la constante de Jacobi.

Les trajectoires correspondant à une valeur donnée de C resteront dans la région du plan (xy) défini par $2\Omega(xy) \geq C$.

Le schéma ci-dessous permettra par interpolation d'obtenir les formes générales des courbes représentées par : $2\Omega - C = 0$ (courbes de vitesse nulle) (on s'est borné à des portions de courbes relatives aux trois valeurs prises par C aux points singuliers L_1, L_2, L_3).

Figure faite en supposant $m_1 > m_2$.



Au sommet d'un quelconque des deux triangles équilatéraux de côté $M_1 M_2$, 2Ω prend la valeur 3, et on peut montrer que c'est là le minimum absolu de 2Ω . Ce n'est donc que si l'on se donne une valeur de C supérieure à 3 que l'on exclut certains domaines pour la variation possible de x, y .

5. Cas particulier de $\mu = 0$.

Dans le cas où $\mu = 0$, 2Ω prend la valeur 3 sur tout le cercle de rayon 1, ayant pour centre le point M_1 de masse 1 (qui coïncide alors avec G) ; dans ce cas, si on donne à C une valeur supérieure à 3, on exclut simplement par là pour x, y la région comprise entre deux cercles concentriques comme on va le voir plus loin : le cas qui nous intéresse est celui où le mouvement a lieu à l'intérieur du petit cercle.

Dans le cas limite $\mu = 0$, le problème est intégrable, et se réduit alors au problème de deux corps, l'un M_1 de masse 1 situé à l'origine, l'autre M de masse infinitésimale situé en (x, y) . Mais l'on étudie le mouvement de M par rapport au plan des axes (x, y) , qui tourne dans le sens positif avec la vitesse angulaire +1 autour de l'origine, par rapport aux axes newtoniens fixes.

Les équations du mouvement s'écrivent

$$(1'') \quad \begin{cases} x'' - 2y' = x(1 - \frac{1}{r^3}) \\ y'' + 2x' = y(1 - \frac{1}{r^3}) \end{cases} \quad (r^2 = x^2 + y^2)$$

$$x'^2 + y'^2 = 2\Omega - C$$

(3'')

$$\Omega = r^2/2 + 1/r \quad .$$

L'équation (3'') s'écrit aussi

$$V^2 = r^2 + \frac{2}{r} - C$$

où V est la vitesse relative de M . M se déplacera sous la force d'attraction newtonienne sur une conique, qui semble tourner dans le sens rétrograde avec une vitesse angulaire unité ; l'équation précédente montre qu'il existe deux cercles de rayon r_1 et r_2 le long desquels la vitesse relative est nulle. r_1 et r_2 sont les deux racines réelles positives ⁽³⁾ de

$$r^3 - Cr + 2 = 0 \quad .$$

Si l'on se borne au cas où $r < r_1$ (r_1 étant la plus petite de deux racines), M se déplacera alors sur une ellipse de demi-grand axe a , d'excentricité e ; on établit aisément la relation suivante liant a et b , (b demi-petit axe) :

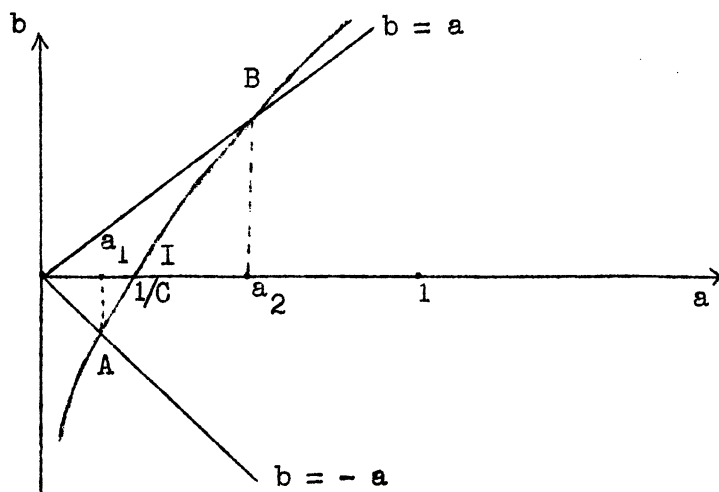
$$b = \frac{\sqrt{a}}{2} \{C - \frac{1}{a}\}$$

la quantité b introduite ici étant positive ou négative suivant que le mouvement par rapport aux axes fixes est direct ou rétrograde : c'est cette relation qui caractérise la famille de **mouvements** correspondant à la valeur donnée de C .

⁽³⁾ Ceci implique comme condition $C > 3$.

Si l'on représente la variation de b en fonction de a , on a une représentation simple de tous les états de mouvement possible :

au point A correspond un mouvement circulaire rétrograde de rayon a_1 , entre A et I mouvement elliptique rétrograde, de I à B mouvement elliptique direct, en B mouvement circulaire direct de rayon a_2 .



Il existe donc pour $C > 3$ deux mouvements périodiques dont les courbes correspondantes dans le plan

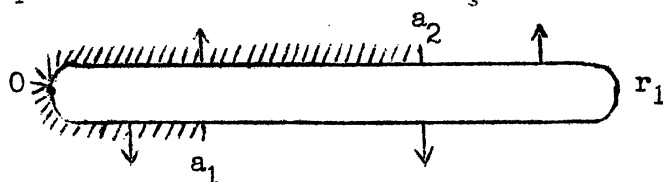
(x, y) sont des cercles de rayons a_1 et a_2 (tous deux à l'intérieur du cercle de vitesse nulle de rayon r_1). a_1 et a_2 sont les racines réelles de

$$\pm 2a^{3/2} = 1 - Ca \quad .$$

Il nous faut maintenant chercher une surface pouvant jouer le rôle de surface de section, pour cela considérons la suite continue d'états de mouvement correspondant à un passage apsidal c'est-à-dire $y = 0$, $x' = 0$. D'après (3"), on a

$$y' = \pm \sqrt{x^2 + 2/x - C} \quad 0 \leq x \leq r_1 < 1$$

(y' ne peut changer de signe qu'en devenant nulle ou infinie). Cette série d'états de mouvement peut se schématiser de la façon suivante



les flèches indiquant le sens de départ.

D'autre part le passage du cas d'une apside supérieure au cas d'une apside inférieure ne peut se faire qu'en passant par le cas d'une orbite circulaire, la partie ombrée du schéma précédent correspond au cas des apsides inférieures, l'autre au cas des apsides supérieures.

Tout cela étant vrai d'une manière analogue sur une demi-droite quelconque issue de 0, il y a lieu de considérer une surface à deux feuillets circulaires de

rayon r_1 , les deux feuillets se raccordant en 0 et le long du cercle de rayon r_1 ; la partie ombrée donnera une zone annulaire formée de l'intérieur du cercle direct (a_2) et de l'intérieur du cercle rétrograde (a_1) .

Pour préciser la notion de "suite continue d'états de mouvement" et cela dans le cas général, μ quelconque compris entre 0 et 1, il convient de faire tout d'abord un changement de variables tel que celui qui correspond à

$$z = \frac{w^2 + \mu(1 - \mu)}{2w + 1 - 2\mu} \quad \text{ou} \quad \frac{z + 1 - \mu}{z - \mu} = \left(\frac{w + 1 - \mu}{w - \mu} \right)^2$$

lequel supprime les singularités en S et J, ou tout au moins

$$z = \mu + w^2$$

lequel supprime la singularité en J. Bornons-nous à ce second changement. On obtient (en utilisant un résultat général indiqué plus haut pour les systèmes dynamiques conservatifs à deux degrés de liberté) :

$$(1) \rightarrow (1') \quad \begin{cases} \frac{d^2 p}{d\tau^2} - 8(p^2 + q^2) \frac{dq}{d\tau} = \Omega_p^* \\ \frac{d^2 q}{d\tau^2} + 8(p^2 + q^2) \frac{dp}{d\tau} = \Omega_q^* \end{cases}$$

$$2\Omega^* = \dot{p}^2 + \dot{q}^2 \quad (4)$$

$$(3) \rightarrow (3')$$

$$\Omega^*(p, q, \mu, C) \equiv 2(p^2 + q^2) [\mathcal{Q}[\mu + p^2 - q^2, 2pq, \mu] - C]$$

Ω^* reste fini et analytique même si $p = q = 0$. Si l'on prend $(p, q, \dot{p}, \dot{q})$ comme coordonnées d'un état de mouvement dans un espace à quatre dimensions, $(3')$ définit un sous-espace S_3 , partout analytique et régulier, variant analytiquement avec μ et C et défini par :

$$F(p, q, \dot{p}, \dot{q}, \mu, C) = \dot{p}^2 + \dot{q}^2 - 2\Omega^* = 0 \quad .$$

On démontre que les points de S_3 sont en correspondance biunivoque et continue avec les points de l'espace ordinaire complété par un point à l'infini, deux

⁽⁴⁾ $\dot{p}$ et $\dot{q}$ représentent respectivement $\frac{dp}{d\tau}$ et $\frac{dq}{d\tau}$.

points $\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta'$ constituent un couple de points équivalents si $\xi\xi' = \eta\eta' = \zeta\zeta' = -\rho^2$, où ρ est une constante réelle. Les deux mouvements circulaires de rayons a_1 et a_2 sont représentés par des courbes L_1 et L_2 .

S_3 est défini par

$$F \equiv \dot{p}^2 + \dot{q}^2 - 4(p^2 + q^2)^3 + 4C(p^2 + q^2) - 8 = 0 \quad .$$

Si l'on considère la surface $\Sigma_2 \in S_3$ définie par

$$p\dot{p} + q\dot{q} = 0 \quad .$$

Σ_2 représente l'ensemble des états de mouvement de S_3 pour lesquels la direction de projection est tangente en n'importe quel sens à un cercle du plan (p, q) cercle centré sur 0 ; Σ_2 correspond donc à la surface totale à deux feuillets définie précédemment et est de la nature d'un tore ; on a évidemment $\rho^2 = p^2 + q^2 = r$, et si l'on prend ρ négatif pour les cercles parcourus dans le sens rétrograde, on définit une surface S_2 par la condition $-\sqrt{a_1} \leq \rho \leq \sqrt{a_2}$ (correspondant à la partie ombrée du schéma), surface qui prendra le rôle de surface de section. La partie complémentaire S_2' serait définie par

$$-\sqrt{r_1} \leq \rho < -\sqrt{a_1}, \quad \sqrt{a_2} < \rho \leq +\sqrt{r_1} \quad .$$

6. La transformation T pour $\mu = 0$.

$\rho^2 = p^2 + q^2$ est périodique en τ , de période $\frac{\pi\sqrt{a}}{2}$, le long de toute trajectoire.

Soit $P(p, \theta)$ ⁽⁵⁾ un point quelconque de S_2 et $P_1(p_1, \theta_1)$ le point de S_2 qui suit P le long de la même trajectoire ; on a évidemment $p_1 = p$; pendant la période du mouvement de l'ellipse le grand axe tourne dans le sens négatif d'un angle $2\pi a^{3/2}$, donc θ , longitude de la ligne des apsides relativement à l'axe mobile Ox , diminue de cette même quantité.

La transformation T , analytique, biunivoque, de S_2 en elle-même est donc définie par ⁽⁵⁾

⁽⁵⁾ $\theta = 2 \operatorname{arctg} q/p$; d'autre part, d'après la valeur de b indiquée plus haut, a et r sont liés par la relation $4ar(r - 2a) + (Ca - 1)^2 = 0$, d'où la valeur indiquée pour $a(\rho)$: nous rectifions ici une légère inexactitude des mémoires de BIRKHOFF ([9] p. 14 et collected papers, II, p. 479).

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho \\ \theta_1 = \theta - 2\pi a^{3/2}(\rho) \end{cases}$$

avec

$$a(\rho) = \frac{1}{C - 2\rho^4 - 2\rho\sqrt{\rho^6 - C\rho^2 + 2}} \quad .$$

Si le mouvement est périodique le point P est transformé en lui-même au bout d'un certain nombre de répétitions de T , soit

$$T^k(P) = P$$

si pendant ce temps θ diminue de $2\ell\pi$, nous devons avoir comme condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement soit périodique

$$\theta_k = \theta - 2\pi k a^{3/2} = \theta - 2\ell\pi$$

soit

$$\frac{k}{\ell} = a^{-3/2}$$

donc

$$a_2^{-3/2} < \frac{k}{\ell} < a_1^{-3/2} \quad .$$

Le point décrit k fois l'ellipse pendant que celle-ci fait ℓ tours. Il suffit de trouver un nombre rationnel compris entre $a_2^{-3/2}$ et $a_1^{-3/2}$ pour avoir un mouvement périodique.

Dans le cas $\mu = 0$, il existe donc une infinité de mouvements périodiques dépendant de deux entiers k, ℓ .

7. Cas de $\mu \neq 0$: Continuation analytique, symétrique, des deux solutions périodiques.

C étant fixé, considérons pour une valeur μ voisine de 0 l'orbite qui, pour une valeur donnée x_0 voisine de a_2 , part, pour $t = 0$, du point $(x_0, 0)$ perpendiculairement à Ox dans le sens positif (correspondant donc à la valeur initiale $y'_0 = +\sqrt{2\Omega(x_0, 0, \mu) - C}$). Elle rencontre pour la première fois l'axe des x pour une certaine valeur t_1 de t , et, x^* prend alors une certaine

valeur dont on démontre que c'est une fonction ψ , analytique de x_0 et de μ ; cette fonction s'annule par $x_0 = a_2$, $\mu = 0$, puisque le cercle de centre 0 et de rayon a_2 coupe l'axe Ox à angle droit au point d'abscisse $-a_2$.

Alors, d'après le théorème classique des fonctions implicites, si

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(a_2, 0) \neq 0$$

il existe une fonction analytique et une seule $x_0(\mu)$ telle que identiquement

$$\psi(x_0(\mu), \mu) = 0,$$

$x_0(\mu)$ se réduisent à a_2 pour $\mu = 0$. Cette fonction définit une continuation analytique (et une seule) de la portion supérieure de l'orbite circulaire primitive en un morceau d'orbite partant de l'axe des x et, d'après la signification x' de ψ , aboutissant à Ox perpendiculairement (en chacun des deux points extrêmes). D'autre part, le système d'équations différentielles considéré (l'équation de Jacobi comprise) ne change pas si on change x, y, t en $x, -y, -t$. En prenant la symétrique par rapport à Ox , de la portion d'orbite trouvée, on a donc la continuation de la portion inférieure de l'orbite primitive. D'où au total la continuation complète (et unique) de l'orbite en question.

Cela n'est valable que dans le cas

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(a_2, 0) \neq 0.$$

On démontre que $\frac{\partial \psi}{\partial x}(a_2, 0)$ est nul, si et seulement si le temps mis par la particule, sur l'orbite circulaire, pour passer d'une intersection avec Ox à la suivante, est une multiple de la semi-période dans le plan fixe. D'où certaines valeurs singulières de C .

(Le même raisonnement serait applicable à l'orbite circulaire rétrograde.)

8. Valeurs singulières de C .

Dans le problème restreint des trois corps, quand on étudie les solutions périodiques de la 1re sorte (selon la terminologie de POINCARÉ, méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 1, p. 97) un cas exceptionnel est tout de suite en évidence, celui où le rapport des "moyens mouvements" n et n' des deux corps autour du troisième est égal au rapport de deux entiers consécutifs

$$\frac{n}{n'} = \frac{N + 1}{N} \quad (N \text{ entier}) \quad .$$

Dans notre problème si ω est la vitesse angulaire relative de la particule sur le cercle de rayon a_2 . La vitesse angulaire absolue est $\omega + 1$, celle du point de masse $\mu = 0$ est 1 ; le cas exceptionnel est celui où

$$\frac{\omega + 1}{1} = \frac{N + 1}{N}$$

soit

$$\omega = \frac{1}{N}$$

or ω est lié à C par la relation

$$\omega = \frac{3 - Cr}{Cr - 1}$$

soit

$$C = \frac{\omega + 3}{(\omega + 1)^{1/3}} \quad .$$

Les valeurs exceptionnelles de C sont donc

$$C = \frac{3 + 1/N}{(1 + 1/N)^{1/3}}$$

la plus grande valeur exceptionnelle de C est obtenue pour $N = 1$ soit

$$C = \sqrt[3]{32} \quad .$$

(On démontre que ce sont précisément les valeurs singulières qui apparaissent précédemment.)

En conclusion on peut affirmer qu'il existe une extension analytique de l'orbite circulaire rétrograde si $C > 3$, et une extension de l'orbite circulaire directe si $C > \sqrt[3]{32}$. Il convient pour la suite de supposer $C \geq C_1 > \sqrt[3]{32}$.

9. Surface de section pour $\mu \neq 0$.

On définira S_2 comme l'ensemble des états tangents aux extensions analytiques de mouvements circulaires direct et rétrograde pour les valeurs précédentes de $C \geq C_1$. Considérons une valeur particulière de C , $C^* > C$ (C arbitrairement grande, mais finie).

On utilise la transformation

$$x - \mu = \lambda^2 \bar{x}, \quad y = \lambda^2 \bar{y}, \quad t = \lambda^3 \bar{t} \quad (\lambda^2 = 1/C^*)$$

grâce à laquelle les dimensions des frontières L_1, L_2 ne tendent pas vers 0 quand λ tend vers 0. Le système initial s'écrit alors

$$\begin{cases} \bar{x}'' - 2\lambda^3 \bar{y}' = \bar{\Omega} \bar{x} \\ \bar{y}'' + 2\lambda^3 \bar{x}' = \bar{\Omega} \bar{y} \end{cases}$$

$$\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 = 2\bar{\Omega} - (1 - 3\lambda^2 \mu)$$

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \lambda^6 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \frac{1 - \mu}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}$$

en négligeant les termes en $\lambda^6 \mu, \lambda^8 \mu, \dots$ dans les seconds membres des équations. En introduisant l'anomalie moyenne

$$t^* = \frac{2\pi \bar{t}}{\bar{T}}$$

où $\bar{T}(\lambda, \mu)$ est la période du mouvement, on obtient d'ailleurs les développements ⁽⁶⁾ :

$$\begin{cases} \bar{x} = (1 - \mu) \cos t^* + 3\lambda^2 \mu (1 - \mu) \cos t^* + \lambda^3 \bar{a}_3(\mu, t^*) + \dots \\ \bar{y} = (1 - \mu) (1 + 3\lambda^2 \mu) \sin t^* + \lambda^3 \bar{b}_3(\mu, t^*) + \dots \end{cases}$$

$\bar{a}_3$ et $\bar{b}_3^*$ sont analytiques en μ et t^* , et périodiques en $t^*(2\pi)$.

Si l'on passe de $(\bar{x}, \bar{y})$ à $(\bar{p}, \bar{q})$ avec

$$p = \lambda \bar{p}, \quad q = \lambda \bar{q}, \quad \tau = \lambda \bar{\tau}$$

on a, en introduisant $\tau^* = \frac{2\pi \bar{\tau}}{\bar{T}}$ ($\bar{T}$ période relative en $\bar{\tau}$)

⁽⁶⁾ On constate que le développement de

$$(1 + \lambda^2 x)^2 + \frac{2}{\sqrt{(1 + \lambda^2 x)^2 + \lambda^4 y^2}} - 3$$

commence par des termes en λ^4 .

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \sqrt{1-\mu} \cos \frac{\tau^*}{2} + \lambda^2 f(\lambda, \mu, \tau^*) \\ \bar{q} &= \sqrt{1-\mu} \sin \frac{\tau^*}{2} + \lambda^2 g(\lambda, \mu, \tau^*)\end{aligned}$$

Pour $\tau^* = 0$, on aura $\bar{q} = 0$, et $\bar{p}$ se réduit à $\bar{\rho}$, où $\bar{\rho}$ est l'abscisse de croisement avec l'axe de $\bar{p}$ dans le plan $(\bar{p}, \bar{q})$. On aura donc

$$\rho = \lambda \sqrt{1-\mu} + \lambda^3 f(\lambda, \mu, 0)$$

ρ jouera ici le rôle de paramètre de surface pour S_2 , le second paramètre étant τ^* que l'on notera désormais θ . On peut donc écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \rho \cos \frac{\theta}{2} + \rho^3 f^*(\rho, \theta, \mu) \\ q = \rho \sin \frac{\theta}{2} + \rho^3 g^*(\rho, \theta, \mu) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} f^* \\ g^* \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{analytiques en } \rho, \theta, \mu \\ \text{de période } 4\pi \text{ en } \theta \end{array}$$

On trouverait aisément des équations analogues pour $\dot{p}, \dot{q}$ composantes des vitesses; la surface de section S_2 s'écrira alors, en fonction des paramètres $(p, q, \dot{p}, \dot{q})$, caractérisant un état de mouvement.

10. La transformation T correspondante.

Soient $P(\rho, \theta)$ un point de S_2 , $P_1(\rho_1, \theta_1)$ le point obtenu en suivant la même trajectoire dans le sens positif de (ρ, θ) jusqu'au premier point de rencontre avec S_2 . Pour μ suffisamment petit, on définit ainsi une transformation analytique biunivoque T de S_2 en elle-même

$$T \quad \left| \begin{array}{l} \rho_1 = f(\rho, \theta) \\ \theta_1 = \theta + g(\rho, \theta) \end{array} \right.$$

f et g sont analytiques en ρ, θ (de période 2π en θ). D'autre part, la symétrie $(x, y, t) \rightarrow (x, -y, -t)$ montre que si $T(\rho, \theta) = (\rho_1, \theta_1)$,

$$T(\rho_1, -\theta_1) = (\rho, -\theta)$$

soit ⁽⁷⁾ en notant R la symétrie par rapport à Ox , $R(\rho, \theta) = (\rho, -\theta)$.
Cela donne

$$RTRT = I$$

ou encore

$$T = RU \quad \text{avec} \quad UU = I \quad .$$

On démontre que T reste analytique le long des bords de S_2 (au moins pour μ petit).

On examine spécialement le cas où μ est petit et C grand.

Conformément à ce qui précède on introduit

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\lambda}, \quad \bar{a} = \frac{a}{\lambda^2}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{C}},$$

et on peut écrire T sous la forme

$$\begin{cases} \bar{\rho}_1 = \bar{\rho} + \mu r(\bar{\rho}, \theta, \lambda, \mu) \\ \theta_1 = \theta - 2\pi\lambda^3 \bar{a}^{3/2} + \mu s(\bar{\rho}, \theta, \lambda, \mu) \end{cases}$$

où r, s sont analytiques en $\bar{\rho}, \theta, \lambda, \mu$, de période 2π .

On démontre qu'il y a, en plus de la symétrie (véritable) par rapport à $O\bar{x}$, une symétrie par rapport à $O\bar{y}$ jusqu'aux termes en $\lambda^8 \mu$.

Cette dernière remarque a été suggérée à BIRKHOFF par l'étude du problème de Hill, où il y a une symétrie (véritable) par rapport à l'axe des y .

11. - A la suite des recherches précédentes, BIRKHOFF a obtenu aussi des résultats sur les mouvements périodiques généraux (non-symétriques) du problème restreint des trois corps. On les trouvera dans les mémoires de 1935 indiqués ci-après [9].

⁽⁷⁾ On fait les opérations dans l'ordre T, R, T, R .

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

- [1] POINCARÉ (Henri). - Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Tome 3. - Paris, Gauthier-Villars, 1899.
[Voir en particulier : p. 175-178.]
 - [2] POINCARÉ (Henri). - Sur un théorème de géométrie, Rend. Circ. mat. Palermo, t. 33, 1912, p. 375-407.
 - [3] BIRKHOFF (George D.). - Proof of Poincaré's geometric theorem, Trans. Amer. math. Soc., t. 14, 1913, p. 14-22.
 - [4] BIRKHOFF (George D.). - Démonstration du dernier théorème de géométrie de Poincaré, Bull. Soc. math. France, t. 42, 1914, p. 1-12.
[Traduction française de [3].]
 - [5] BIRKHOFF (George D.). - The restricted problem of three bodies, Rend. Circ. mat. Palermo, t. 39, 1915, p. 265-334.
 - [6] BIRKHOFF (George D.). - Dynamical systems with two degrees of freedom, Trans. Amer. math. Soc., t. 18, 1917, p. 199-300.
 - [7] BIRKHOFF (George D.). - Dynamical systems. - New York, American mathematical Society, 1927 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 9).
 - [8] BIRKHOFF (George D.). - Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques, Memorie Pontificia Accad. nuovi Lincei, t. 1, 1934, p. 85-216.
 - [9] BIRKHOFF (George D.). - Sur le problème restreint des trois corps, Annali Scuola norm. sup. Pisa, t. 4, 1935, p. 267-306 et t. 5, 1936, p. 9-50.
 - [10] JANET (Maurice). - Cours de mécanique analytique et mécanique céleste, professé en 1955/56 et 1956/57 : Solutions périodiques et solutions asymptotiques. - Paris, Association corporative des Etudiants en Sciences, 1957.
 - [11] BLAIVE (Jean-Claude). - Le dernier théorème de Poincaré, ses généralisations, leurs applications (Thèse 3e cycle. Paris. 1962).
-