

SÉMINAIRE JANET. MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE CÉLESTE

CÉCILE DEWITT-MORETTE

**Quantification des champs classiques admettant une
invariance de groupe à un nombre infini de dimensions,
d'après les travaux de H. Van Dam**

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962),
exp. n° 12, p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A11_0

© Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUANTIFICATION DES CHAMPS CLASSIQUES
 ADMETTANT UNE INVARIANCE DE GROUPE À UN NOMBRE INFINI DE DIMENSIONS,
 D'APRÈS LES TRAVAUX DE H. VAN DAM
 par Mme Cécile DEWITT-MORETTE

Les exemples les mieux connus sont l'électrodynamique quantique, le champ de Yang-Mills et la relativité générale.

1. Théorie classique.

Soit $S[\Phi]$ l'action de la théorie classique, $S[\Phi]$ est une fonctionnelle des variables du champ Φ^i , où Φ^i est une notation abrégée pour $\Phi^i(x)$.

$S[\Phi]$ est invariant dans les transformations $\delta\Phi^i$ caractérisées par les fonctions ξ^α (ξ^α est également une notation abrégée pour $\xi^\alpha(x)$)

$$(1) \quad \delta\Phi^i = R^i[\Phi, \xi]$$

auxquelles correspondent les transformations infinitésimales

$$(2) \quad \delta\Phi^i = R^i_\alpha \delta\xi^\alpha = \left(\frac{\delta R^i[\Phi, \xi]}{\delta\xi^\alpha} \right)_{\xi=0} \delta\xi^\alpha .$$

2. Quantification par la méthode de Feynman.

Supposons que la théorie quantique des champs soit exprimée entièrement en termes des nombres suivants :

$$(3) \quad \langle 0 | T(I[\Phi]) | 0 \rangle \text{ égal par définition à } \frac{\int d[\Phi] e^{iS[\Phi]} I[\Phi]}{\int d[\Phi] e^{iS[\Phi]}}$$

où

$I[\Phi]$ est un invariant fonctionnel de la théorie classique ,

$S[\Phi]$ est l'action classique ,

$d[\Phi]$ est un invariant intégral de l'espace fonctionnel .

Les difficultés introduites par l'invariance (1) sont bien connues, et peuvent être résumées ainsi : En raison de son invariance, $S[\Phi]$ ne contient pas assez de variables dynamiques pour être couplée à une source extérieure T_i . Cette difficulté est en fait superficielle comme le montre la solution du problème suivant : Est-il possible d'étendre $S[\Phi]$ de telle sorte qu'elle contienne suffisamment de variables dynamiques pour être couplée à une source extérieure T_i , sans toutefois changer les nombres (3) associés aux invariants $I[\Phi]$?

Remarquons que $\int d[\Phi]$ peut être mis sous la forme suivante :

$$(4) \quad \int d[\Phi] = \int d[\Phi'] \int d[\xi] \frac{\delta R[\Phi', \xi]}{\delta \Phi^i}$$

où Φ' est choisie de telle sorte qu'elle satisfasse à une condition supplémentaire arbitraire :

$$(5) \quad R^i_{\alpha}[\Phi'] \Phi'^j g_{ij} = 0 \quad .$$

Supposons que $R[\Phi, \xi]$ soit au plus linéaire en Φ (hypothèse qui est satisfaite dans tous les cas intéressants, y compris la relativité générale), on montre facilement grâce à (4) et à l'invariance de I et de S que

$$\langle 0 | T(I[\Phi]) | 0 \rangle = \frac{\int d[\Phi'] e^{iS[\Phi']} I[\Phi']}{\int d[\Phi'] e^{iS[\Phi']}} \quad .$$

Par le même raisonnement, on trouve une extension possible $S \rightarrow S + T$ pour l'électrodynamique quantique et le champ de Yang-Mills qui réponde à la question posée ci-dessus.

$$T = (R^i_{\alpha}[\Phi] \Phi^j g_{ij}) R^i_{\beta}[\Phi] \Phi^j g_{ij} g^{\alpha\beta} \quad .$$

Considérons, par exemple, le champ électromagnétique libre.

$$S[\Phi] = -\frac{1}{4} \int F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) dx \quad .$$

Choisissons d'abord la condition supplémentaire $\partial^{\mu} A_{\mu} = 0$ qui conduit à l'extension

$$T[\Phi] = \int g(x) (\partial^\mu A_\mu(x))^2 dx \quad ,$$

et limitons-nous au cas $g(x) = \lambda$

$$S_{,\mu\nu} + T_{,\mu\nu} = (g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) \delta(x, x') + \lambda \partial_\mu \partial_\nu \delta(x, x')$$

d'où l'on tire les fonctions de Green

$$G_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^4} (g_{\mu\nu} k^2 + \frac{1-\lambda}{\lambda} k_\mu k_\nu) \quad ,$$

$\lambda = 1$ correspond à la théorie de Gupta-Bleuler.

Les différentes théories obtenues par les différents choix de la condition supplémentaire et de la fonction $g(x)$ conduisent toutes aux mêmes invariants (3), et peuvent être utilisées indifféremment.

La liberté de ce choix correspond à la liberté du choix de la jauge en théorie classique.

Le schéma ci-dessus s'applique à l'électrodynamique quantique, au champ de Yang-Mills, et semble s'appliquer à la relativité générale.
