SÉMINAIRE JANET.
MÉCANIQUE ANALYTIQUE
ET MÉCANIQUE CÉLESTE

GEORGES REEB

**Sur un théorème de Seifert sur les trajectoires fermées de certains champs de vecteurs**

*Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste*, tome 4 (1960-1961), exp. n$^o$ 9, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1960-1961__4__A9_0>

# SUR UN THÉORÈME DE SEIFERT SUR LES TRAJECTOIRES FERMÉES DE CERTAINS CHAMPS DE VECTEURS

par Georges REEB

Introduction. - La situation suivante se présente dans de nombreuses questions de mécanique analytique classique [1].

Sur une variété compacte $V_n$ (que l'on supposera orientée, munie d'une structure de variété différentiable de classe $C_\infty$ et d'une structure d'espace de Riemann) est défini un champ de vecteurs $E$, de classe $C_\infty$, sans singularités, dont les trajectoires sont homéomorphes au cercle $T$ et constituent les fibres d'une structure fibrée de $V_n$. La base de cette structure fibrée est alors une variété $V_{n-1}$ de classe $C_\infty$, orientée et compacte. On se propose l'étude des trajectoires d'un champ $E + \Delta E$ obtenu par perturbation de $E$ ; en fait ici on s'intéressera uniquement à l'étude de (certaines) trajectoires fermées. La petitesse de la perturbation sera mesurée, selon l'usage, par l'une des normes habituelles : les deux normes les plus intéressantes sont la norme habituelle (ou $C_0$-norme) notée $\| \|_0$ et la norme qui porte sur les composantes et leurs dérivées appelée la $C_1$-norme et notée $\| \|_1$. Il convient d'attirer tout de suite l'attention sur un point fondamental qui a souvent été mal compris.

La locution " $\Delta E$ est une petite perturbation" signifie $\|\Delta E\|_i < \varepsilon$ ($i = 0$ ou $1$), où $\varepsilon > 0$ et où $\varepsilon$ ne dépend que du couple $(V_n , E)$. Dans la méthode classique du "petit paramètre" la notion d'une petite perturbation est tout à fait différente : une perturbation de la forme $\mu\Delta E$ ($\mu$ réel) est dite petite si $|\mu| < \varepsilon$ où $\varepsilon$ dépend du triplet $(V_n , E , \Delta E)$.

En fait, nous nous intéressons ici à une classe particulière de trajectoires fermées : la classe des trajectoires simplement fermées ou, si l'on préfère, la classe des trajectoires qui se ferment après un tour. Cette notion est précisée par la construction naturelle mais utile que voici.

On définit dans $V_n$ la famille de plaques $Q(x)$. La plaque $Q(x)$ est l'ensemble des points qu'il est possible de joindre au point $x$ par un arc de géodésique orthogonal en $x$ à $E(x)$ de longueur inférieure à $\ell$, $\ell > 0$ pour un $\ell$ fixe convenable. Ces plaques sont homéomorphes à des cellules à $n - 1$ dimensions. Si la perturbation $\Delta E$ est petite, la trajectoire du champ perturbé $E + \Delta E$, issue de $x$, suit approximativement la fibre $Tx$ contenant $x$ et recoupe $Q(x)$ une première fois en $x'$ . On désigne par $V(x)$ le vecteur tangent en $x$ à l'arc de géodésique orientée joignant $x$ à $x'$ et de longueur égale à la longueur de cet arc de géodésique.

Si $\varepsilon$ est choisi convenablement, $V(x)$ est bien défini, et le champ de vecteurs $V(x)$ est continu. <u>La trajectoire issue de</u> $x$ <u>est dite simplement fermée si</u> $V(x) = 0$ . Les vecteurs $V(x)$ et $E(x)$ sont orthogonaux.

Il est quelquefois intéressant de considérer le cas où $V_n$ est une variété à bord et où la perturbation $\Delta E$ vérifie l'hypothèse de "relaxation" $\mathcal{H}$ suggérée par la mécanique classique.

$\mathcal{H}$ : <u>le champ</u> $V(x)$ <u>est dirigé, en tout point du bord de</u> $V_n$ , <u>vers l'intérieur de</u> $V_n$ .

On trouvera des exemples en [1].

Ici nous nous proposons de démontrer sous diverses hypothèses l'existence de trajectoires simplement fermées du champ perturbé. Le théorème le plus fin est certainement le théorème dû à SEIFERT [2] (cf. 1). La démonstration de ce théorème est délicate. Nous donnerons une démonstration plus directe de ce théorème, mais en substituant la $C_1$-norme à la $C_0$-norme. Notre démonstration offre l'avantage de pouvoir être transposée à certains cas où $V_n$ est de dimension supérieure.

## 1. <u>Examen de quelques cas particuliers.</u>

Dans certains cas, l'existence d'au moins une trajectoire simplement fermée pour une petite perturbation (dans la $C_0$-norme) est évidente.

Il convient de signaler tout d'abord le cas où la structure fibrée associée à $(V_n , E)$ est triviale et où la caractéristique d'Euler Poincaré $\chi(V_{n-1})$ de l'espace de base est non nulle. L'existence de trajectoires simplement fermées résulte alors du théorème de points fixes de Lefschetz ; d'ailleurs ce théorème montre de plus que la somme des index des trajectoires simplement fermées (supposées isolées) est égale à $\chi(V_{n-1})$ . Malheureusement le cas envisagé ne se présente guère dans les problèmes suggérés par la mécanique des systèmes conservatifs (l'invariant intégral d'Elie Cartan permet de le montrer).

Un deuxième cas intéressant correspond aux variétés $V_n$ n'admettant pas deux champs de vecteurs linéairement indépendants : le champ $V$ admet dans ce cas des points singuliers et, par conséquent, le champ perturbé admet au moins une trajectoire simplement fermée. Un exemple intéressant correspond au cas où $V_n$

est la sphère $S_{4p+1}$ ( $p$ entier, $p > 0$ ) et où $E$ admet, comme lignes intégrales, les fibres de la fibration classique de Hopf. De même, si

$$V_n = S_{4P+1} \times [0 , 1] \quad ,$$

si $E$ désigne le champ associé à la fibration de Hopf du facteur $S_{4p+1}$ et si $\Delta E$ vérifie l'hypothèse de relaxation $\mathcal{H}$ énoncée dans l'introduction, on peut affirmer que le champ perturbé admet au moins une trajectoire simplement fermée. On remarque cependant que dans le cas envisagé nous n'avons aucun résultat sur les index des trajectoires simplement fermées.

Le cas des variétés à trois dimensions échappe aux remarques précédentes. Mais le théorème de Seifert affirme précisément :

Si $n = 3$ et si la base $V_2$ n'est pas le tore à deux dimensions, alors le champ perturbé admet au moins une trajectoire simplement fermée.

En fait le théorème de Seifert comporte un complément affirmant que la somme des index des trajectoires simplement fermées (supposées isolées) est égale à la caractéristique d'Euler Poincaré $\chi(V_2)$ .

2. Examen du cas où $n = 3$ .

Nous supposons à partir de maintenant $n = 3$ ; nous supposons également que le champ perturbé étudié n'admette pas de trajectoire simplement fermée (donc $V(x) \neq 0$ pour tout point $x$ de $V_3$ ) ; notre but est évidemment d'aboutir sous certaines hypothèses à une contradiction, établissant ainsi l'existence d'au moins une trajectoire fermée.

A tout point $x$ de $V_3$ associons l'entier $I(x)$ ainsi défini : soit $p$ la projection canonique de $V_3$ sur la base $V_2$ ; l'entier $I(x)$ est la variation angulaire, divisée par $2\pi$ , du vecteur $p(V(y))$ lorsque $y$ parcourt la fibre $T(x)$ contenant $x$ dans le sens direct. L'entier $I(x)$ est indépendant de $x$ , on le désignera simplement par $I$ , ou éventuellement par $I(\Delta E)$ pour rappeler que $I$ dépend de la perturbation $\Delta E$ .

On peut supposer la base $V_2$ triangulée ; on distingue un simplexe à deux dimensions $e_2$ de cette triangulation et le complexe $K$ obtenu en privant $V_2$ des points internes de $e_2$ . Le simplexe $e_2$ est muni de l'orientation induite par l'orientation de $V_2$ , et $\partial e_2$ désigne le bord de $e_2$ muni de l'orientation cohérente. La théorie de la construction d'une section de l'espace fibré $V_3$ montre :

(i) qu'il existe des sections $f_1$ et $f_2$ au-dessus de $e_2$ et $K$. (Donc $f_1$ et $f_2$ sont des applications continues de $e_2$ et $K$ dans $V_3$ telles que $pf_1$ et $pf_2$ soient respectivement les applications identiques de $e_2$ et $K$.)

(ii) que $(f_1, \partial e_2)$ et $(f_2, \partial e_2)$ définissent de façon naturelle deux éléments $\alpha_1$ et $\alpha_2$ du groupe de Poincaré $\pi(T)$ de la fibre. La différence $i = \alpha_1 - \alpha_2$ est donc un entier rationnel ; cet entier $i$ ne dépend pas du choix particulier des sections $f_1$ et $f_2$, cet entier caractérise le premier obstacle de la structure fibrée.

Les champs de vecteurs $V_1$ et $V_2$ sur $e_2$ et $K$ qui associent à $x \in e_2$ le vecteur $p(V(f_1(x)))$ et qui associent à $y \in K$ le vecteur $p(V(f_2(y)))$ ne se raccordent pas le long de $\partial e_2$ ; la somme $S$ des index des singularités des champs $V_1$ et $V_2$ est nulle d'après l'hypothèse $V(x) \neq 0$. D'autre part il est clair, d'après la formule d'Euler-Poincaré pour les singularités d'un champ de vecteurs, que

$$S = \chi(V_2) + iI$$

donc

$$0 = \chi(V_2) + iI \quad . \tag{1}$$

La démonstration (de la première partie) du théorème de Seifert résulterait donc de l'affirmation $I = 0$. En fait l'affirmation $I = 0$ constitue le lemme fondamental de l'article de SEIFERT. C'est également ce lemme fondamental que nous étudions dans la suite et que nous démontrons dans le cas d'une petite perturbation par rapport à la $C_1$-norme.

Signalons une conséquence directe de la formule (1). Le cas $i = 0$ correspond à une structure fibrée triviale de $V_3$ et par conséquent nous laissons ce cas de côté. La formule (1) montre alors que l'absence de trajectoires simplement fermées implique : $i$ est un diviseur de $\chi(V_2)$. (On rappelle que $i$ ne dépend que de la structure fibrée de $V_3$.) Si $V_2$ est la sphère à deux dimensions $S_2$ et si $i \neq 1$ et $i \neq 2$ (les cas $i = 1$ et $i = 2$ correspondent respectivement à $V_3 = S_3$ et $V_3 = p_3(R)$) alors le champ perturbé $E + \Delta E$, où $\Delta E$ est petit dans la $C_1$-norme, admet au moins une trajectoire simplement fermée.

On observera que ce dernier résultat est sans objet puisque le théorème de Seifert le contient comme cas particulier ; mais ce résultat est obtenu par des moyens élémentaires ; les raisonnements utilisés se transposent sans difficulté au cas où $V = V_3 \times (0 , 1)$ et où le champ perturbateur $\Delta E$ vérifie l'hypothèse de relaxation énoncée dans l'introduction. Il n'en est pas de même des techniques de Seifert.

## 3. Étude du lemme fondamental $(I = 0)$ .

Dans le plan $xOy$ les inégalités

$$|y| \leq 0,9 , \qquad |y| \leq 1 \qquad \text{et} \qquad |y| \leq 1,1$$

définissent trois bandes emboitées $D'DD''$ . Nous étudions un homéomorphisme $\varphi$ de $D$ dans $D''$ vérifiant, pour tout point $m$ , les propriétés suivantes :

(i) $\varphi(m + e) = \varphi(m) + e$ où $e$ est le vecteur $(1 , 0)$ ;

(ii) $\|\varphi(m) - m\| < 0,1$ ;

(iii) $\varphi(m) \neq m$ .

Cet homéomorphisme $\varphi$ est compatible avec la relation d'équivalence $\rho$ engendrée par le groupe des translations de vecteurs $ne$ ( $n$ entier) ; l'homéomorphisme $\varphi$ vérifie l'inclusion $\varphi(D) \supset D'$ . Par passage au quotient selon la relation d'équivalence $\rho$ , l'homéomorphisme $\varphi$ définit un homéomorphisme d'une couronne circulaire dans une couronne circulaire un peu plus grande.

La construction, classique, suivante associe à $\varphi$ un entier rationnel $I(\varphi)$ ; faisons décrire au point $m$ le segment $\ell$ d'origine $(0 , 0)$ et d'extrémité $(1 , 0)$ et soit $U(m)$ le vecteur $\varphi(m) - m$ . Au segment $\ell$ correspond dans l'espace quotient un chemin fermé qui représente un générateur du groupe de Poincaré. L'entier $I(\varphi)$ est la variation angulaire, divisée par $2\pi$ , du vecteur $U(m)$ lorsque $m$ décrit le segment $\ell$ .

Considérons maintenant un deuxième exemplaire des bandes emboitées $D'DD''$ et un homéomorphisme $\psi$ de $D$ dans $D''$ vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) imposées à $\varphi$ ; soit $I(\psi)$ l'entier associé à $\psi$ .

Supposons de plus qu'il existe un homéomorphisme $\Phi$ du rectangle fondamental $0 \leq x \leq 1$ de $D$ dans $D''$ vérifiant les propriétés suivantes :

($\alpha$) $\|\Phi(m) - m\| \leq 0,1$

($\beta$) $\varphi(m) = \Phi^{-1}\psi\Phi(m)$ (modulo $e = (0 , 1)$) .

En d'autres termes, $\Phi$ transporte l'homéomorphisme $\varphi$ sur l'homéomorphisme $\psi$. Nous affirmons que le lemme fondamental du paragraphe précédent est une conséquence de l'égalité :

$$(1) \qquad I(\varphi) = I(\psi) \quad .$$

Cette implication sera établie au paragraphe 4.

Il est probable que l'égalité (1) soit susceptible d'une démonstration géométrique simple, mais je ne suis pas capable d'indiquer une telle démonstration.- Par contre l'égalité (1) est évidente si, en plus des conditions $\alpha$ et $\beta$, on impose à $\Phi$ la condition $\gamma$, qui exprime la petitesse des dérivées partielles de $\Phi$ :

($\gamma$) $\|\Phi\|_1 < \varepsilon'$ pour un $\varepsilon'$ ($\varepsilon' > 0$) convenable).

4. L'égalité $I(\varphi) = I(\psi)$ implique $I = 0$.

Pour établir le lemme $I = 0$, il suffit de se restreindre au cas où $V_3$ est la variété (à bord) $V_3 = B_2 \times T$, où $T$ est le cercle trigonométrique et $B_2$ le disque plan défini par $x^2 + y^2 \leq 2$ ; le champ $E$ a pour composantes $(0, 0, 1)$. Mieux encore, il suffit de considérer le cas où $V_3 = \Gamma_2 \times T$ ; ici $\Gamma_2$ est la couronne circulaire définie par l'inégalité $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$. Le champ $V$ ne sera évidemment défini que pour les points d'un sous-espace $\Gamma'_2 \times T$ de $\Gamma'_2 \times T$, où $\Gamma'_2$ est la couronne définie par les inégalités $1,1 \leq x^2 + y^2 \leq 1,9$. Dans l'espace $\Gamma_2 \times T$, nous construisons deux sections $h_1$ et $h_2$ :

(i) $h_1$ est la section droite $h_1 : (x, y) \to (x, y, 0)$ ;

(ii) $h_2$ décrit un tour autour de la fibre $T$, elle est définie par

$$h_2 : (x, y) \to (x, y, \theta(x, y))$$

où $\theta(x, y)$ est l'argûment de $(x, y)$.

Les deux sections $h_1$ et $h_2$ peuvent être envisagées comme des applications du recouvrement universel $D$ (cf. 3) de $\Gamma_2$ dans $\Gamma_2 \times T$ ; on peut même supposer que $D'$ est appliqué par $h_1$ et $h_2$ au-dessus de $\Gamma_2$. Nous définissons maintenant deux homéomorphismes $\varphi$ et $\psi$ dans $\Gamma_2$, ou (ce qui revient au même) dans $D$, par la construction suivante :

Au point $m$ de $\Gamma'_2$ faisons correspondre le point $m_i$ de la section $h_i$ ($i = 1$ ou $2$) qui recouvre $m$ ; la trajectoire du champ perturbé $E + \Delta E$, issue de $m_i$ , recoupe la section $h_i$ une première fois en $m'_i$ , le point $m'_i$ se projette en $p(m'_i) = m''_i$ . Le point $m''_i$ est précisément $\varphi(m)$ si $i = 1$ et $\psi(m)$ si $i = 2$ . Il est clair que $\varphi$ et $\psi$ vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) requises en 3 ; la propriété (iii) résulte de l'hypothèse $V(x) \neq 0$ pour tout $x$ .

Il reste à voir que $\varphi$ et $\psi$ sont bien reliés par un homéomorphisme $\Phi$ vérifiant les propriétés ($\alpha$) et ($\beta$) de 3. A cet effet il convient d'étudier le rectangle fondamental $Q$ de $D$ .

Si $m_0$ est le point de $Q$ de coordonnées $(0 , \frac{1}{2})$ , on désignera par $m'_0 = \Phi(m_0)$ la projection $p(\mu')$ du premier point de rencontre $\mu'$ de $h_2(Q)$ avec la trajectoire de $E + \Delta E$ , issue de $\mu \in h_1(Q)$ . La correspondance $m \to \mu'$ peut être étendue de façon continue à $Q$ de telle sorte que $\mu$ et $\mu'$ appartiennent à la même trajectoire ; cette correspondance définit l'homéomorphisme $\Phi$ qui remplit les conditions requises.

Concluons en remarquant que si la perturbation $\Delta E$ est faible, dans la $C_1$-norme, alors $\Phi$ vérifie la condition ($\gamma$) du paragraphe 3 ; ce qui établit la version du théorème de Seifert obtenue en remplaçant la $C_0$-norme par la $C_1$-norme.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] REEB (Georges). - Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques, Acad. royale Belg., Mém. Cl. Sc., 2e série, t. 27, 1952, n° 9, 64 p.

[2] SEIFERT (Herbert). - Closed integral curves in 3-space and isotopic two-dimensional deformations, Proc. Amer. math. Soc., t. 1, 1950, p. 287-302.