Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Jean Leray

Particules et singularités des ondes

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 4 (1960-1961), exp. nº 8, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1960-1961__4__A8_0>

© Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire JANET
(Mécanique analytique et Mécanique céleste)
4e année, 1960/61, n° 8

22 avril 1961

PARTICULES ET SINGULARITÉS DES ONDES [1]

par Jean LERAY

Introduction

Dans un espace X, de dimension ℓ, de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_\ell)$, soit un opérateur différentiel linéaire d'ordre m

$$a(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{i+\dots+j \leq m} a_{i\dots j}(x) \frac{\partial^{i+\dots+j}}{\partial x_1^i \dots \partial x_\ell^j} \quad ;$$

nommons <u>onde</u> toute solution u de l'équation

$$(1) \qquad a(x, \frac{\partial}{\partial x}) u(x) = 0 \quad .$$

Notons x un point de X et $p = (p_1, \dots, p_\ell)$ un covecteur d'origine x, par exemple un gradient :

$$s_x = (s_{x_1}, \dots, s_{x_\ell}) \text{ , où } s_{x_i} = \frac{\partial s}{\partial x_i} \quad ;$$

soit une fonction $G(x, p)$; nommons <u>trajectoires</u> les solutions du <u>système d'Hamilton</u>

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{G_{p_1}(x, p)} = \dots = \frac{dx_\ell}{G_{p_\ell}} = - \frac{dp_1}{G_{x_1}(x, p)} = \dots = - \frac{dp_\ell}{G_{x_\ell}} , \quad G(x, p) = 0 \quad ,$$

qui se compose d'un système différentiel ordinaire et d'une intégrale première de ce système. Ces trajectoires sont évidemment les caractéristiques de <u>l'équation de Jacobi</u>

$$(3) \qquad G(x, V_x) = 0 \quad ,$$

qui est une équation non-linéaire du premier ordre.

---

[1] Une conférence intitulée "Application de la Mécanique analytique à la Théorie des ondes" fut faite à ce Séminaire, le 22 avril 1961 ; son contenu était extrait de [7], I, II, IV, et de la Conférence reproduite ci-dessus, qui fut faite, en 1959, dans le cycle "Applications des équations non-linéaires à la physique théorique", organisé par Louis de BROGLIE.

Supposons donnée sur X une mesure

$$\rho(x)\ dx_1 \wedge \dots \wedge dx_\ell$$

on peut de façon invariante, c'est-à-dire indépendante du choix des coordonnées locales, faire correspondre à chaque équation d'ondes un système d'Hamilton : c'est ce que montre le § 1. Peut-on alors faire correspondre à une onde des trajectoires ? Le § 2 rappelle que le théorème d'Ehrenfest n'est énoncé que pour les ondes de Schrödinger et de Dirac. Le § 3 rappelle, en le précisant, comment certaines solutions de l'équation de Jacobi (V_x grand) approximent certaines ondes (ondes courtes). Enfin, le § 4 résume l'emploi que la théorie des singularités des ondes fait de celle des trajectoires.

§ 1. Système d'Hamilton correspondant à une équation d'ondes.

1. Fonctions de (x , p) définies par un opérateur $a(x , \frac{\partial}{\partial x})$.

Notons

$$g(x , p) = \sum_{i+\dots+j=m} a_{i\dots j}(x)\ p_1^i \dots p_\ell^j \quad ,$$

$$g'(x , p) = \sum_{i+\dots+j=m-1} a_{i\dots j}(x)\ p_1^i \dots p_\ell^j \quad ;$$

on a donc, ... désignant des termes d'ordres $< m - 1$

$$a(x , \frac{\partial}{\partial x}) = g(x , \frac{\partial}{\partial x}) + g'(x , \frac{\partial}{\partial x}) + \dots \quad . \tag{4}$$

Notons

$$g_{x.p}(x , p) = \frac{1}{\rho(x)} \sum_j \frac{\partial^2[\rho(x)\ g(x , p)]}{\partial x_j\ \partial p_j} \quad . \tag{5}$$

On a le

THÉORÈME 1. - La donnée de l'opérateur $a(x , \frac{\partial}{\partial x})$ sur l'espace X , muni de la mesure $\rho\ dx_1 \wedge \dots \wedge dx_\ell$, définit d'une façon indépendante du choix des coordonnées locales, les deux fonctions

$$g(x , p) \ , \qquad 2g'(x , p) - g_{x.p}(x , p) \quad .$$

$g(x\ ,\ p)$ est appelé <u>polynôme caractéristique</u> de a ; si a est <u>self-adjoint</u>, alors $2g' - g_{x.p} = 0$; nous noterons

$$(6) \qquad g(x\ ,\ p) + g'(x\ ,\ p) - \frac{1}{2}\, g_{x.p}(x\ ,\ p) = G(x\ ,\ ip) \quad .$$

<u>Preuve</u>. - Si τ est un paramètre,

$$e^{-\tau V(x)}\ a(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x})\ e^{\tau V(x)}$$

est un polynôme en τ de degré m , dont le coefficient principal est le polynôme caractéristique $g(x\ ,\ V_x)$; ce polynôme est donc indépendant du choix des coordonnées locales.

Soit $a^*(\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ x)$ l'adjoint de $a(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x})$ c'est-à-dire l'opérateur différentiel tel que

$$\int_X \rho(x)\ v(x)\ a(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x})\ u(x)\ dx_1 \wedge \dots \wedge dx_\ell =$$

$$\int_X \rho(x)\ u(x)\ a^*(\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ x)\ v(x)\ dx_1 \wedge \dots \wedge dx_\ell \quad ,$$

quelles que soient les fonctions u et v à supports compacts, on a

$$a^*(\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ x)\ v(x) = \frac{1}{\rho(x)} \sum_{i+\dots+j \leq m} \frac{\partial^{i+\dots+j}}{\partial x_1^i \dots \partial x_\ell^j} [\rho(x)\ a_{i\dots j}(x)\ v(x)] \quad ;$$

donc

$$a^*(\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ x) = (-1)^m\ g(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}) + (-1)^m\ g_{x.p}(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}) + (-1)^{m-1}\ g'(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}) + \dots$$

l'opérateur

$$a + (-1)^{m-1}\ a^* = 2g'(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}) - g_{x.p}(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}) + \dots$$

et par suite son polynôme caractéristique

$$2g'(x\ ,\ p) - g_{x.p}(x\ ,\ p)$$

sont indépendants du choix des coordonnées locales ; ce polynôme est nul quand cet opérateur est nul, c'est-à-dire quand a est self-adjoint.

<u>Note</u>. - Le polynôme caractéristique de $aa^* - a^*a$ se rencontre aussi : HÖRMANDER l'emploie à l'étude des équations sans solution [4].

2. Caractéristiques et système d'Hamilton de a .

Commençons par rappeler une notion très classique : on nomme caractéristiques les hypersurfaces

$$K : \quad k(x) = 0$$

solutions de l'équation non-linéaire du premier ordre

$$g(x , k_x) = 0$$

d'après le théorème 1, elles sont attachées de façon indépendantes du choix des coordonnées, à l'équation des ondes (1).

Ce même théorème 1 attache à l'équation des ondes (1), indépendamment du choix des coordonnées, l'équation de Jacobi (3) et le système d'Hamilton (2), G étant défini par (4), (5), (6). Plus généralement, on peut faire correspondre à cette équation d'ondes (1) l'ensemble des équations de Jacobi (3) et des systèmes d'Hamilton (2), où $G(x , p)$ est défini par la relation :

$$g(x , p) + g'(x , p) - \frac{1}{2} g_{x.p}(x , p) + \dots = G(x , ip) \quad , \tag{7}$$

... désignant un polynôme quelconque en p , de degré $< m - 1$, à coefficients fonction de x .

3. Exemple : L'équation non relativiste de Schrödinger.

C'est l'équation

$$H(x , \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}) - \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \quad , \tag{8}$$

H étant un opérateur réel, self-adjoint, d'ordre 2, ne contenant pas $\frac{\partial}{\partial x_1}$; soit

$$H(x , \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}) = G(x , \frac{\partial}{\partial x}) + G'(x , \frac{\partial}{\partial x}) + G''(x) \quad ,$$

G et G' étant homogène en $\frac{\partial}{\partial x}$ d'ordres 2 et 1 ; on a donc

$$2G'(x , p) - G_{x.p}(x , p) = 0$$

l'équation de Jacobi que (6) fait correspondre à l'équation de Schrödinger est donc

$$G(x , V_x) + V_{x_1} = 0 \quad , \tag{9}$$

conformément à la physique théorique.

4. Exemple : L'équation de Dirac ; l'équation relativiste de Schrödinger.

Ce sont des équations du type

$$(10) \qquad \sum_{j=1}^{4} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} + A^j\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^j} + A_j\right) u + Bu = 0 \quad ,$$

où

$$x^1 = -x_1 \ , \quad A^1 = -A_1 \ , \quad x^j = x_j \ , \quad A^j = A_j \quad \text{pour} \quad j = 2 \ , 3 \ , 4 \quad ;$$

$A^j(x)$ sont les composantes du potentiel ; $B(x)$ est une fonction du potentiel, du champ, de la masse ; dans l'équation de Dirac, B et u sont des spineurs.

L'une des équations de Jacobi que (7) fait correspondre à (10) est

$$(11) \qquad \sum_j (V_{x_j} - A^j)(V_{x^j} - A_j) = 1 \quad ;$$

ses caractéristiques sont les solutions du système d'Hamilton ($p^1 = -p_1$, $p^j = p_j$ pour $j = 2 \ , 3 \ , 4$) :

$$\frac{dx_1}{p_1 - A_1} = \frac{dx_2}{p_2 - A_2} = \dots = \frac{dp^1}{\sum_j \frac{\partial A^j}{\partial x_1}(p_j - A_j)} = \frac{dp^2}{\sum_j \frac{\partial A^j}{\partial x_2}(p_j - A_j)} = \dots$$

$$\sum_j (p^j - A^j)(p_j - A_j) = 1 \quad ;$$

en notant $q_j = p_j - A_j$ on transforme ce système en celui de l'électron relativiste :

$$(12) \qquad \frac{dx_1}{q_1} = \frac{dx_2}{q_2} = \dots = \frac{dq^1}{\sum_j \left(\frac{\partial A^j}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_j}\right) q_j} = \frac{dq^2}{\sum_j \left(\frac{\partial A^j}{\partial x_2} - \frac{\partial A^2}{\partial x_j}\right) q_j} = \dots$$

$$\sum_j q_j q^j = 1 \ , \quad (q^1 = -q_1 \ , \quad q^j = q_j \quad \text{pour} \quad j = 2 \ , 3 \ , 4) \quad .$$

§ 2. Le théorème d'Ehrenfest.

Ce théorème classique [2] associe à une onde, de carré sommable, des valeurs probables

$$\overline{x} \ , \ \overline{p} \ , \ \overline{G_x} \ , \ \overline{G_p}$$

de

$$x \ , \ p \ , \ G_x \ , \ G_p$$

qui vérifient le système, analogue à celui d'Hamilton :

$$\frac{d\overline{x_1}}{\overline{G}_{p_1}} = \frac{d\overline{x_2}}{\overline{G}_{p_2}} = \dots = -\frac{d\overline{p_1}}{\overline{G}_{x_1}} = -\frac{d\overline{p_2}}{\overline{G}_{x_2}} = \dots \quad .$$

Ce théorème suppose que l'équation d'ondes est celle de Schrödinger ou de Dirac ; cette restriction est sans doute essentielle.

§ 3. Solutions de l'équation de Jacobi approximant des ondes courtes.

Supposons que (6) ou (7) fasse correspondre à une équation d'ondes une fonction $G(x \ , \ p)$ réelle ; soit $V(x)$ une solution réelle de l'équation de Jacobi :

$$G(x \ , \ V_x) = 0 \quad .$$

Par chaque point de X passe une caractéristique et une seule de cette solution $V(x)$; ces caractéristiques de $V(x)$ sont nommées trajectoires des particules associées à $V(x)$: le long de ces trajectoires, $(x \ , \ p = V_x)$ vérifie le système d'Hamilton (2).

Attribuons à ces particules une densité $W^2(x)$, telle que leur masse se conserve ;

cette condition s'énonce comme suit :

$$(13) \qquad W^2(x) \ \rho(x) \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^j \ G_{p_j}(x \ , \ p) \ dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_\ell$$

est une forme différentielle invariante de ces trajectoires ;

ou encore : $W(x)$ vérifie l'équation linéaire du premier ordre

$$(14) \qquad \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} [W^2(x) \ \rho(x) \ G_{p_j}(x \ , \ V_x)] = 0 \quad ;$$

ou enfin : si l'on prend comme coordonnées dans X

t , telle que le long des trajectoires $dx_j = G_{p_j}\, dt$, $dp_j = -\, G_{x_j}\, dt$,

$y_2 , \dots , y_\ell$ constantes le long des trajectoires (c'est-à-dire : intégrales premières),

alors (2)

$$(15) \qquad W(x) \sqrt{\rho(x) \frac{D(x_1 , \dots , x_\ell)}{D(t , y_2 , \dots , y_\ell)}}$$

est fonction des seules variables $(y_2 , \dots , y_\ell)$.

Supposons qu'on ait, M et N_i étant des constantes,

$$|V_x| > M , \quad |(\frac{\partial}{\partial x})^p V| < N_0 M \quad (p = 2 , \dots , 2m)$$

$$|W| > N_1 , \quad |(\frac{\partial}{\partial x})^p W| < N_2 \quad (p = 1 , \dots , 2m) \quad .$$

On a, dans ces conditions, le

THÉORÈME 2. - <u>Si</u> $a(x , \frac{\partial}{\partial x})$ <u>est de type principal</u> (3), <u>et si</u>, N_0 , N_1 et N_2 <u>étant donnés</u>, M <u>est assez grand, alors</u>

$$W(x)\, e^{-iV(x)}$$

<u>est voisin d'une onde.</u>

<u>La preuve</u> de ce théorème est aisée ; elle consiste à construire une fonction $R(x)$, de norme petite par rapport à celle de $W(x)$, telle que

$$a(x , \frac{\partial}{\partial x})[We^{-iV} + R] = 0 \quad .$$

Il suffit d'appliquer le théorème d'existence de Hörmander [4] - ou, éventuellement, ce qui est plus aisé, ceux de la théorie des équations elliptiques ou hyperboliques - après avoir établi la relation

---

(2) $\frac{D(\dots)}{D(\dots)}$ désigne le déterminant fonctionnel.

(3) $g_p(x , p) \neq 0$ pour $g(x , p) = 0$, p réel $\neq 0$.

$$(16) \qquad e^{iV}\, a(x\,,\, \frac{\partial}{\partial x})[We^{-iV}] =$$

$$[g(x\,,\, -iV_x) + g'(x\,,\, -iV_x) - \frac{1}{2}\, g_{x.p}(x\,,\, -iV_x)]\, W +$$

$$\frac{\rho}{2W} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}[W^2\, \rho\, g_{p_j}(x\,,\, -iV_x)] + b[x\,,\, (\frac{\partial}{\partial x})^q V\,,\, \frac{\partial}{\partial x}]\, W \quad ,$$

où b est un opérateur différentiel d'ordre m, dont les coefficients sont fonction de x et des dérivées de V d'ordres $\leqslant m$, ces coefficients étant, par rapport à l'ensemble de ces dérivées de V, des polynômes de degrés $\leqslant m - 2$.

Note. - Le théorème précédent précise des résultats connus de G. BIRKHOFF [1], M. KLINE [5] et P. LAX [6].

§ 4. Singularités des ondes.

1. Généralités.

Soit une équation d'ondes holomorphe. Soit $u(x)$ une onde ayant, sur une hypersurface analytique

$$K : \; k(x) = 0$$

une singularité de l'un des types

$$u(x) = u'(x)\, k^r(x) + \dots \qquad (r \neq \text{entier} > 0)$$

$$= u'(x)\, k^r(x) \log k(x) + \dots \qquad (r = \text{entier} > 0) \quad ,$$

$u'(x)$ et ... étant des fonctions holomorphes.

D'après un théorème classique, K doit être une caractéristique :

$$(17) \qquad g(x\,,\, k_x) = 0 \quad \text{sur} \quad K \quad .$$

K est donc engendré par des caractéristiques de l'équation du premier ordre (17), c'est-à-dire par des bicaractéristiques de $a(x\,,\, \frac{\partial}{\partial x})$; nommons-les trajectoires des particules associées à K : elles vérifient le système d'Hamilton (2), où l'on a remplacé G par g.

Plus précisément, on peut choisir l'équation $k(x) = 0$ de K, et définir sur K une fonction $\lambda(x)$ de façon à avoir, le long de ces trajectoires

$$(18)\left\{\frac{dx_1}{g_{p_1}(x\,,\,p)} = \frac{dx_2}{d_{p_2}} = \dots = -\frac{dp_1}{g_{x_1}(x\,,\,p)} = -\frac{dp_2}{g_{x_2}} = \dots = \frac{d\lambda}{g'(x\,,\,p) - 1/2\; g_{x.p}}\right.$$

$$g(x\,,\,p) = 0\,,\quad dk = p_1\,dx_1 + \dots + p_\ell\,dx_\ell \quad .$$

Alors, le long de ces trajectoires $u'(x)$ s'obtient par une quadrature, vu le

THÉORÈME 3. - Attribuons à ces particules la densité $u'^2(x)\,e^{2\lambda(x)}$ leur masse se conserve. Autrement dit : sur K, la forme différentielle

$$u'^2(x)\,e^{2\lambda(x)}\,\rho(x)\,\frac{\sum_{j=1}^{\ell}(-1)^j\,g_{p_j}(x\,,\,p)\,dx_1\wedge\dots\wedge dx_{j-1}\wedge dx_{j+1}\wedge\dots\wedge dx_1}{\sum_j p_j\,dx_j}\Bigg|_K$$

qui vaut, en les points de K où $p_1 \neq 0$:

$$u'^2(x)\,e^{2\lambda(x)}\,\frac{\rho(x)}{p_1}\sum_{i=2}^{\ell} g_{p_i}(x\,,\,p)\,dx_2\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\dots\wedge dx_\ell$$

est une forme différentielle invariante de ses trajectoires.

On peut encore énoncer comme suit ce théorème : employons sur K des coordonnées

t, telle qu'on ait le long des bicaractéristiques engendrant K

$$dx_j = g_{p_j}(x\,,\,p)\,dt\,,\quad dp_j = -\,g_{x_j}(x\,,\,p)\,dt\,,\quad d\lambda = (g' - \tfrac{1}{2}\,g_{x.p})\,dt \quad ;$$

$(y_3\,,\,\dots\,,\,y_\ell)$ constantes le long de ces bicaractéristiques ;

alors sur K,

$$(-1)^j\,u'^2(x)\,e^{2\lambda(x)}\,\frac{\rho(x)}{p_j}\,\frac{D(x_1\,,\,\dots\,,\,x_{j-1}\,,\,x_{j+1}\,,\,\dots\,,\,x_\ell)}{D(t\,,\,y_3\,,\,\dots\,,\,y_\ell)}\quad ,$$

qui est évidemment indépendant de j, l'est aussi de t : c'est une fonction de $(y_3\,,\,\dots\,,\,y_\ell)$.

La preuve de ce théorème 3 consiste en le calcul de

$$a(x\,,\,\tfrac{\partial}{\partial x})[u'(x)\,k^r(x)] \quad \text{ou} \quad a[u'\,k^r\log k] \quad \text{si} \quad r = \text{entier} \geqslant 0 \quad ;$$

ce calcul ne diffère guère de celui qui établit (16).

2. Application au problème de Cauchy.

Envisageons, comme dans [7], I, le problème de Cauchy, d'inconnue u, à données holomorphes :

$$(19) \qquad \begin{cases} a(x , \frac{\partial}{\partial x})\, u(x) = v(x) \\ u(x) - w(x) \text{ s'annule } m \text{ fois sur } S \end{cases} ;$$

S est une hypersurface donnée, analytique et sans singularité : $s(x) = 0$; nous supposons qu'elle n'est pas caractéristique.

D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski, $u(x)$ est holomorphe en les points de S non caractéristiques [ceux où $g(x , s_x) \neq 0$]. En les points caractéristiques de S. $u(x)$ a une singularité, dont [7], I, décrit comme suit l'allure.

Soit $\tilde{g}(x , p)$ une quelconque des fonctions vérifiant les deux conditions suivantes :

1° $\tilde{g}(x , p)$ est, par rapport à p, homogène de degré 1 ;

2° $\tilde{g}(x , p)/g(x , p)$ est holomorphe, non nul, près de chaque élément de contact (y , s_y) de S.

Notons $x(t , y)$, $p(t , y)$ la solution du système différentiel ordinaire

$$(20) \qquad dx_j = \tilde{g}_{p_j}(x , p)\, dt , \quad dp_j = - \tilde{g}_{x_j}(x , p)\, dt$$

définie pour t petit, par les conditions initiales

$$(21) \qquad x(0 , y) = y , \quad p(0 , y) = s_y , \text{ où } y \in S \quad .$$

I de [7] constate que le système (20) possède l'intégrale première

$$g(x , p)$$

et la forme différentielle invariante

$$p_1\, dx_1 + \dots + p_\ell\, dx_\ell - g\, dt \quad ;$$

d'où le théorème 2 de [7], I :

le quotient de deux quelconques des trois fonctions

$$g(y\ ,\ s_y)\ ,\quad g(x\ ,\ p)\ ,\quad \frac{D(x)}{D(t\ ,\ y)}$$

est une fonction holomorphe de $(t\ ,\ y)$.

Les trois équations

$$(22)\qquad g(y\ ,\ s_y) = 0\ ,\quad g(x\ ,\ p) = 0\ ,\quad \frac{D(x)}{D(t\ ,\ y)} = 0$$

sont donc équivalentes : elles définissent dans l'espace de coordonnées $(t\ ,\ y)$ une hypersurface que $x(t\ ,\ y)$ projette sur la caractéristique K tangente à S , c'est-à-dire sur la réunion des bicaractéristiques de a issues des éléments de contact caractéristiques de S .

Le théorème 1 de [7], I, affirme qu'en substituant $x(t\ ,\ y)$ à x dans $u(x)$ et dans ses dérivées d'ordres $< m$ [$< n$ si $v(x) - a(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x})\ w(x)$ s'annule $n - m$ fois sur S] on obtient des fonctions de $(t\ ,\ y)$ holomorphes pour t petit et $y \in S$: la projection $x(t\ ,\ y)$ uniformise $u(x)$ et ses dérivées d'ordres $< m$ [$< n$].

De ce qui précède résulte que la projection $x(t\ ,\ y)$ uniformise

$$(23)\qquad \frac{D(x)}{D(t\ ,\ y)}\ a_n(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x})\ u(x)$$

quand a_n est un opérateur différentiel linéaire d'ordre n .

Ces résultats de [7], 1, peuvent être précisés par le théorème 3 du présent article : ce théorème donne la partie principale de la singularité de u , c'est-à-dire les valeurs prises par (23) au-dessus de K ; voici :

COROLLAIRE. - En substituant $x(t\ ,\ y)$ et $p(t\ ,\ y)$ à x et p dans

$$g(x\ ,\ p)\ a_n(x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x})\ u(x)$$

on obtient une fonction holomorphe de $(t\ ,\ y)$; sa valeur, sur l'hypersurface définie par les trois équations équivalentes (22), est donnée par la formule

$$[g(x\ ,\ p)\ a_n\ (x\ ,\ \frac{\partial}{\partial x})\ u(x)]\ e^{\lambda(x)}\sqrt{\frac{g(y\ ,\ s_y)}{g(x\ ,\ p)}}\sqrt{\frac{\rho(x)}{\rho(y)}\ \frac{s_{y_1}}{p_1}\ \frac{D(x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_\ell)}{D(y_2\ ,\ \dots\ ,\ y_\ell)}} =$$

$$g_n(x\ ,\ p)\ (n - m)!\ \frac{v(y) - a(y\ ,\ \frac{\partial}{\partial y})\ w(y)}{s(y)^{n-m}}$$

g_n désigne le polynôme caractéristique de a_n ; $\sqrt{\ldots} = 1$ pour $t = 0$.

3. Autres applications.

Le corollaire précédent se simplifie quand on l'applique à la solution unitaire de a , que II de [7] étudie. Des quadratures portant sur cette solution unitaire donnent :

1° La solution générale du problème de Cauchy (ses singularités ont pour support, outre la caractéristique K tangente à S , les caractéristiques issues des singularités des données) ;

2° La solution élémentaire en un point y (le support de ses singularités est le conoïde de sommet y).

On peut obtenir explicitement, comme dans le corollaire précédent, la partie principale de la singularité de ces solutions : voir [7], IV et V.

On trouvera dans [7], VI, la preuve de ce qu'affirme le présent exposé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRKHOFF (George D.). - Some remarks concerning Schrödinger's wave equation, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 19, 1933, p. 339-344 ; Quantum mechanics and asymptotic series, Bull. Amer. mat. Soc., t. 39, 1933, p. 681-700.

[2] Voir les Traités : de BROGLIE, DIRAC (wave packet), KRAMERS ou SCHIFF (Ehrenfest's theorem).

[3] HÖRMANDER (Lars). - On the theory of general partial differential operators, Acta Math., t. 94, 1955, p. 162-248.

[4] HÖRMANDER (Lars). - Differential equations without solutions, Math. Annalen, t. 140, 1960, p. 169-173.

[5] KLINE (Morris). - Asymptotic solution of linear hyperbolic partial differential equations, J. rat. Mech. and Anal., t. 3, 1954, p. 315-342.

[6] LAX (Peter D.). - Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke math. J., t. 24, 1957, p. 627-646.

[7] LERAY (Jean). - Problème de Cauchy,
I : Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 389-429.
II : La solution unitaire d'un opérateur différentiel linéaire, Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958, p. 75-96.
III : Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 81-180.
IV, V, VI (à paraître).

Voir un résumé de IV dans :

Colloque sur l'Analyse fonctionnelle [1960. Louvain], p. 7-28. - Paris, Gauthier-Villars, 1961 (Centre belge de Recherches mathématiques).

International conference on partial differential equations and continuum mechanics [1960. Madison], p. 137-157. - Madison (Wis.), 1960.