Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Cécile DeWitt-Morette

Contribution des termes de queue des fonctions de Green dans un espace de Riemann à quelques équations du mouvement de particules dans les champs

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 4 (1960-1961), exp. n° 6, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1960-1961__4__A6_0>

Séminaire JANET
(Mécanique analytique et Mécanique céleste)
4e année, 1960/61, n° 6

11 mars 1961

CONTRIBUTION DES TERMES DE QUEUE DES FONCTIONS DE GREEN DANS UN ESPACE DE RIEMANN À QUELQUES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DE PARTICULES DANS LES CHAMPS

par Mme Cécile DEWITT-MORETTE

INTRODUCTION. - Afin de mettre en évidence certaines propriétés du champ de gravitation, je voudrais comparer les équations du mouvement d'une particule dans trois cas particuliers :

(1) Le mouvement d'une particule de charge e dans un champ électromagnétique dans un espace plan ;

(2) Le mouvement précédent dans un espace de Riemann donné ;

(3) Le mouvement d'une particule de masse m dans un champ de gravitation faible.

A l'approximation de la correction de radiation (termes d'ordre e^2 dans le cas (1) et (2), termes d'ordre m^2 dans le cas (3)), les équations de ces mouvements s'écrivent respectivement :

$$0 = m\ddot{z}^\alpha - ec^{-1} F^\alpha{}_\beta \dot{z}^\beta - \frac{2}{3} e^2 c^{-3} (\dddot{z}^\alpha - c^{-2} \ddot{z}^2 \dot{z}^\alpha) \tag{1}$$

$$0 = m\ddot{z}^\alpha - ec^{-1} F^\alpha{}_\beta \dot{z}^\beta - \frac{2}{3} e^2 c^{-3} (\dddot{z}^\alpha - c^{-2} \ddot{z}^2 \dot{z}^\alpha) + \mathfrak{J}^\alpha \tag{2}$$

$$0 = m_0 \ddot{z}^\alpha + \frac{11}{3} G m_0^2 c^{-3} (\dddot{z}^\alpha - c^{-2} \ddot{z}^2 \dot{z}^\alpha) + \gamma^\alpha \ . \tag{3}$$

NOTATIONS.

$z^\alpha(\tau)$ est la ligne d'univers de la particule, τ est le temps propre

$\ddot{z}^\alpha \equiv \frac{d^2}{d\tau^2} z(\tau) + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \dot{z}^\beta \dot{z}^\gamma$. Dans le cas (1), $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ est nul ; dans le cas (2), $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ est donné ; dans le cas (3), $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ s'exprime en fonction d'un tenseur métrique de référence dont la relation avec le tenseur métrique total sera précisé au deuxième paragraphe.

$F^\alpha{}_\beta$ est le champ électromagnétique qui, ajouté aux ondes retardées, donne le champ total. Dans le cas (3), il n'existe pas de termes équivalents à $F^\alpha{}_\beta$, le champ de gravitation n'apparait pas en tant que tel, il est inclu dans la métrique.

Les termes $\mathfrak{J}^{\alpha}$ et γ^{α} sont des termes introduits dans les équations par la courbure de l'espace, ce sont ces termes que nous allons étudier dans cet exposé.

c est la vitesse de la lumière, G est la constante de gravitation universelle.

Un point désigne une dérivée covariante, une virgule désigne une dérivée ordinaire.

1. Étude de l'équation (2).

a. Propriétés générales de $\mathfrak{J}^{\alpha}$ (cf. [1]).

$$\mathfrak{J}^{\alpha} \equiv e^2 c^{-1} \dot{z}^{\beta} \int_{-\infty}^{\tau} (v^{\alpha}{}_{\gamma'.\beta} - v_{\beta\gamma'.}{}^{\alpha}) \, \dot{z}^{\gamma'}(\tau') \, d\tau' \quad .$$

Les $v_{\alpha\gamma'}$ sont les termes de queue des fonctions de Green correspondant aux équations vectorielles **covariantes** suivantes :

$$g^{\nu\sigma} A_{\mu.\nu\sigma} + R_{\mu}{}^{\nu} A_{\nu} = 0 \quad .$$

Les fonctions de Green avancées et retardées correspondant à cette équation s'écrivent :

$$(4) \qquad G^{\pm}_{\mu\nu'}(x\,,\,x') = [1 \pm \varepsilon(x\,,\,x')](8\pi)^{-1}[\Delta^{1/2} g_{\mu\nu'}\,\delta(\sigma) - v_{\mu\nu'}\,\theta(-\sigma)]$$

ou

$\sigma \equiv \pm \frac{1}{2} s^2$ où s est la distance géodésique, $\sigma > 0$ pour un intervalle du genre espace, σ est la fonction Ω de Synge.

$g_{\mu\nu'}(x\,,\,x')$ est le bivecteur de transport parallèle le long de la géodésique de x à x'.

$$\Delta = |g_{\mu\nu'}|^{-1}\,|-\sigma_{.\mu\nu'}|$$

$$\theta(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \sigma < 0 \\ 1 & \text{pour } \sigma > 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon(x\,,\,x') = \begin{cases} 1 & \text{quand } x' \text{ est dans le futur de } x \\ -1 & \text{quand } x' \text{ est dans le passé de } x\,. \end{cases}$$

Les $v_{\mu\nu'}(x\,,\,x')$ sont donnés sous forme d'un développement en série dont chaque terme s'obtient, par récurrence, en intégrant un système d'équations différentielles ordinaires le long des géodésiques originaires de x (ou de x').

b. Calcul de $\mathfrak{J}^\alpha$ dans un champ de gravitation faible à symétrie sphérique.

Soit un champ de gravitation faible $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, les $v_{\mu\nu'}$ peuvent alors être obtenus par un procédé variationnel comme suit :

La dérivée variationnelle de l'équation satisfaite par $G^-_{\mu\nu'}$:

$$g^{1/2}\, g^{\mu\nu}\, g^{\sigma\tau}\, G^-_{\mu\nu'.\sigma\tau} + g^{1/2}\, R^{\mu\nu}\, G^-_{\mu\nu'} = - g^\nu_{\nu'}\, \delta(x , x')$$

donne l'équation satisfaite par $\dfrac{\delta G^-_{\mu\nu'}(x , x')}{\delta g_{\alpha\beta}(z)}$ que l'on met sous la forme :

$$g^{1/2}\, g^{\mu\nu}\, g^{\sigma\tau} \left(\frac{\delta G^-_{\mu\nu'}}{\delta g_{\alpha\beta}}\right)_{.\sigma\tau} + g^{1/2}\, R^{\mu\nu}\, \frac{\delta G^-_{\mu\nu'}}{\delta g_{\alpha\beta}} = - A^{\nu}{}_{\nu'}{}^{\alpha\beta}(x , x' , z)$$

et dont la solution peut s'écrire :

$$\frac{\delta G^-_{\mu\nu'}}{\delta g_{\alpha\beta}} = \int G^-_{\mu\nu''}(x , x'')\, A^{\nu''}{}_{\nu'}{}^{\alpha\beta}(x'' , x' , z)\, d^4 x'' \quad .$$

Dans le cas d'un champ faible, on peut, grâce à l'expression ci-dessus, développer $G^-_{\mu\nu'}$ en série de Taylor autour de la fonction correspondante G^{0-} de l'espace plan

$$G^-_{\mu\nu'} = \eta_{\mu\nu'}\, G^{0-} + \int \left(\frac{\delta G^-_{\mu\nu'}}{\delta g_{\rho''\sigma''}}\right)_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} \delta g_{\rho''\sigma''}\, d^4 x'' + \ldots \quad . \tag{5}$$

Les termes de queue $v_{\mu\nu'}$ s'obtiennent par comparaison des équations (4) et (5). A l'approximation de l'équation (5), on obtient

$$\begin{aligned} v_{\mu\nu'}(x,x') = - 4\pi c \int dt''\, d^3 r'' \{ & \eta_{\mu\nu'}\, G^{0-}{}_{,\alpha''}(x,x'')\,(h^{\alpha''\beta''} - \tfrac{1}{2}\eta^{\alpha''\beta''} h'')\, G^{0-}{}_{,\beta''}(x'',x') \\ & - G^{0-}(x , x'')\, \eta^{\alpha''\beta''}\, h_{\mu''\nu'',\alpha''}\, G^{0-}{}_{,\beta''}(x , x') \\ & + G^{0-}{}_{,\alpha''}(x , x'')\, h^{\alpha''}{}_{\nu'',\mu''}\, G^{0-}(x'' , x') \\ & + G^{0-}(x , x'')\, h^{\alpha''}{}_{\mu'',\nu''}\, G^{0-}{}_{,\alpha''}(x'' , x') \\ & + \tfrac{1}{2}(G^{0-}(x , x'')\, G^{0-}(x'' , x'))_{,\mu''\nu''}\, h'' \} \quad . \end{aligned}$$

Nous avons entrepris le calcul de $\mathfrak{J}^{\alpha}$ dans le cas suivant :

- champ **statique** à symétrie sphérique **autour** d'un point r_1 ,
- mouvement rectiligne uniforme le long d'une droite passant par r_1 .

Cette approximation est valide lorsque la particule est suffisamment rapide et suffisamment loin de la source du champ.

r_1	position de la source du champ
r	position de la particule au temps t
r'	variable d'intégration dans $\mathfrak{J}^{\alpha}$-position de la particule au temps t'

Les $v_{\mu\nu'}$ sont alors des fonctions de x , x' , r_1 discontinues et singulières pour une source ponctuelle au point r' tel que

$$ct - ct' = |r - r_1| + |r_1 - r'|$$

c'est-à-dire lorsque le temps nécessaire pour que la particule aille de r en r' soit égal au temps nécessaire pour qu'un signal se propage avec la vitesse c de r' en r_1 , puis retourne en r . Les $v_{\mu\nu'}$ peuvent être rendues régulières en remplaçant la source ponctuelle par une source étendue de rayon infinitésimal.

Une des quantités physiques intéressantes les plus simples à calculer à partir des $\mathfrak{J}^{\alpha}$ est la perte d'énergie par radiation

$$W = -\int_{-\infty}^{T} \mathfrak{J}^0 \, d\tau \qquad .$$

Le calcul de W n'est pas terminé, mais il semble qu'il soit possible de le mener à bien par un calcul algébrique dont la seule difficulté soit la longueur.

2. <u>Étude de l'équation</u> (3).

Dans ce cas, il ne s'agit pas d'une particule dans champ de gravitation donné comme dans le cas (2), mais d'une particule de masse m en interaction avec le champ de gravitation telle qu'elle est décrite par le système d'équations dynamiques :

$$(6) \qquad \begin{cases} \ddot{z}^{\alpha} = 0 \\ \mathfrak{g}^{\mu\nu} + 8\pi G c^{-4} \, T^{\mu\nu} = 0 \end{cases}$$

dans lequel la dérivée covariante de $z(\tau)$ est prise par rapport au tenseur métrique total du système (ou tenseur métrique vrai)

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = g^{1/2}(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R)$$

$$T^{\mu\nu} = mc \int g^{\mu}{}_{\alpha}\, g^{\nu}{}_{\beta}\, \dot{z}^{\alpha}\, \dot{z}^{\beta}\, g^{1/4}(x)\ \delta^4(x\ ,\ z)\ g^{-1/4}(z)\ d\tau \quad .$$

Le système (6) ne détermine que formellement le mouvement de la particule puisque le tenseur métrique est infini sur la ligne d'univers de la particule.

Pour contourner cette difficulté, on peut séparer du tenseur métrique vrai, un tenseur métrique de référence $g_{\mu\nu}$:

$$\overset{\text{vrai}}{g_{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

de telle sorte que $g_{\mu\nu}$ soit fini partout, que $\mathfrak{g}^{\mu\nu}(g_{\rho\sigma}) = 0$ et que

$$(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} h)_{.\nu} = 0 \quad .$$

Par une méthode absolument covariante qui est, à la Relativité générale, ce qu'est, à la Relativité restreinte, la méthode utilisée par Dirac pour établir l'équation (1), on obtient l'équation (3)

$$0 = m_0\, \ddot{z}^{\alpha} + \frac{11}{3} Gm_0{}^2\, c^{-3} (\dddot{z}^{\alpha} - c^{-2}\, \ddot{z}^2\, \dot{z}^{\alpha}) + \gamma^{2} \tag{3}$$

ou

$$\gamma^{\alpha} \equiv Gm^2\, c^{-3} \{2c^{-2}\, V_{\delta\gamma\varepsilon}\ \dot{z}^{\delta}\ \dot{z}^{\gamma}\ \dot{z}^{\varepsilon}\ \dot{z}^{\alpha} + 4V^{\alpha}{}_{\delta\gamma}\ \dot{z}^{\delta}\ \dot{z}^{\gamma} - 2V_{\delta\gamma}{}^{\alpha}\, \dot{z}^{\delta}\, \dot{z}^{\gamma} - V^{\gamma}{}_{\gamma\varepsilon}\, \dot{z}^{\varepsilon}\, \dot{z}^{\alpha} - c^2\ V^{\gamma\alpha}{}_{\gamma}\}$$

$$V^{\alpha\beta\gamma} = - \int_{-\infty}^{\tau} v^{\alpha\beta}{}_{\delta'\varepsilon'.}{}^{\gamma}\, (z(\tau)\ ,\ z(\tau'))\, \dot{z}^{\delta'}(\tau')\ \dot{z}^{\varepsilon'}(\tau')\ d\tau' \quad .$$

La masse m_0 de l'équation (3) est la masse observée obtenue par renormalisation de la masse m du système (6).

On remarque que le terme en $\dddot{z}^{\alpha}$ a un signe positif, c'est-à-dire un signe qui correspond à une accélération. La présence de γ^{α} interdit toute conclusion hâtive et spectaculaire de ce fait. Seul l'effet global du terme en $\dddot{z}^{\alpha}$ et du terme γ^{α} a un sens physique, et l'on ne peut pas conclure de la présence de ce signe positif qu'il y a accélération de la particule par émission de radiation !

BIBLIOGRAPHIE

[1] DEWITT (B. S.) and BREHME (R. W.). - Radiation damping in a gravitational field, Annals of Phys., t. 9, 1960, p. 220-259.

[2] DEWITT-MORETTE (Mme C.) et GING (J. L.). - Freinage dû à la radiation gravitationnelle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 251, 1960, p. 1868-1870.

[3] DIRAC (P. A. M.). - Classical theory of radiating electrons, Proc. Royal Soc. London, Series A, t. 167, 1938, p. 148-169.