Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Serge Colombo

Magnétohydrodynamique classique

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 3 (1959-1960), exp. nº 2, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1959-1960__3__A2_0>

Séminaire JANET
(Mécanique analytique et Mécanique céleste)
3e année, 1959/60, n° 2

Janvier 1960

MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE CLASSIQUE

par Serge COLOMBO

1. Equations générales de la magnétohydrodynamique.

L'écoulement d'un fluide conducteur de l'électricité et soumis à un champ magnétique présente souvent de remarquables propriétés : en effet, non seulement des forces supplémentaires d'origine électromagnétique agissent sur le fluide dès que le champ magnétique est instauré, mais encore le mouvement du fluide engendre des courants électriques à cause du phénomène d'induction. Ces courants induits modifient aussi les forces d'origine électromagnétique qui, avec les autres forces mécaniques contribuaient à déterminer le mouvement. L'écoulement résultant peut donc différer essentiellement de celui qui serait observé en l'absence de tout champ magnétique.

On se trouve ainsi en présence de phénomènes particuliers, qualifiés "magnétohydrodynamiques". Ceux-ci ont donné lieu à quelques applications techniques. C'est en physique cosmique qu'ils revêtent surtout une plus grande importance.

L'étude théorique des phénomènes magnétohydrodynamiques fera donc intervenir simultanément les équations d'Euler-Navier de la mécanique des fluides et celles de la théorie électromagnétique de Maxwell. On sera, en principe, conduit à résoudre le système suivant (pour lequel il est inutile de préciser les notations qui sont bien familières aux physiciens).

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = - \operatorname{grad} p - \rho \operatorname{grad} \Omega - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{V} + \frac{4}{3} \nu \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V} + \vec{J} \wedge \vec{B} + \eta \vec{E} \quad ;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0$$

$$\rho \frac{dV}{dt} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \varkappa \Delta T$$

$$f(p , \rho , T) = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \eta$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\frac{1}{\mu}\vec{B} = \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) + \eta\vec{V} \quad .$$

On notera que ces équations supposent qu'en tout état de cause la vitesse V du fluide reste très petite devant celle de la propagation des ondes électromagnétiques $(V \ll c)$.

La résolution du système qui vient d'être écrit conduirait à de sérieuses difficultés mathématiques. C'est pourquoi on substitue généralement à ce système un autre plus simple obtenu à partir de l'"approximation hydromagnétique" (CHANDRASEKHAR). Celle-ci consiste à tirer parti du fait que toute modification du champ électromagnétique n'est causée que par le mouvement du fluide. Si nous écrivons

(1) $$\text{rot } \vec{B} = \mu \text{ rot } \vec{H} = \mu\sigma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) + (\mu\varepsilon \text{ div } \vec{E})\,\vec{V} + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

et si nous considérons deux points A et B situés sur la trajectoire d'une particule fluide et distants de $\delta\ell = V\delta t$, nous avons

$$|\text{rot } \vec{E}| = \mathcal{O}\left(\frac{\delta E}{\delta\ell}\right) \quad ,$$

δE étant la variation de $|\vec{E}|$ entre A et B . Nous avons aussi, δB étant la variation correspondante de $|\vec{B}|$,

$$\frac{\delta B}{\delta t} = \frac{V}{\delta\ell}\,\delta B$$

soit $|\delta E| = V|\delta B|$. De sorte que le premier membre de (1) sera de l'ordre de $\frac{\delta B}{\delta t}$, alors que le second et troisième terme au dernier membre sont de l'ordre de $V^2\,\mu\varepsilon\,\frac{\delta B}{\delta\ell} = \frac{V^2}{c^2}\frac{\delta B}{\delta\ell}$. L'approximation hydromagnétique conduit donc à négliger les courants de convection et les courants de déplacement. Elle permet d'écrire

(1') $$\text{rot } \vec{B} = \mu\sigma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) = \mu\vec{J}$$

d'où l'on tire immédiatement

(2) $$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \text{rot } (\vec{V} \wedge \vec{B}) - \frac{1}{\mu\sigma}\text{ rot rot } \vec{B} \quad .$$

Cette nouvelle équation, jointe à la condition

(3) $$\text{div } \vec{B} = 0$$

déterminera l'évolution du champ du vecteur $\vec{B}$.

Il est utile de préciser ici comment s'effectue la marche des calculs dans de nombreux cas, car la façon de procéder diffère fondamentalement de celle en usage chez les électrotechniciens.

En effet, dans la pratique courante, les variations du champ magnétique proviennent de variations dans les intensités des courants parcourant des circuits, ces variations de courant étant fréquemment dues à des phénomènes qui peuvent se schématiser par des variations convenables de la conductibilité σ. La situation est bien différente en magnétohydrodynamique où tout le milieu est généralement excellent conducteur, et où des variations relativement importantes de σ n'altèrent que peu l'allure des phénomènes. Nous introduirons plus loin la notion de nombre de Reynolds magnétique et constaterons que les phénomènes magnétohydrodynamiques ne peuvent se produire que si ce nombre prend des valeurs élevées, c'est-à-dire si dans le second membre de (2) le second terme reste petit devant le premier. De sorte que, finalement, $\vec{B}$ ayant été déterminé à l'aide de (2) et (3), on en déduit $\vec{J}$, et enfin le champ électrique $\vec{E}$ à l'aide de

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad ,$$

les variations de σ n'influant pratiquement que sur $\vec{E}$. On pourrait enfin en déduire la densité de charge électrique η par la relation

$$\varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = \eta \quad .$$

(Relativement à l'équation de conservation de l'électricité

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad ,$$

nous avons déjà souligné qu'en première approximation on devait avoir $\operatorname{div} \vec{J} = 0$, puisque les courants de convection et de déplacement restent faibles devant le courant de conduction).

En ce qui concerne les conditions aux limites, il n'y a rien à changer aux habitudes prises par les hydrodynamiciens et les électriciens ; elles s'expriment de la façon usuelle et propre à chaque type de problème.

2. Nombre de Reynolds magnétique. ([4], [6], [9]).

Si dans (2), on suppose $\sigma = \infty$, cette équation se réduit à

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\vec{V} \wedge \vec{B}) \tag{2'}$$

il suffit de poser $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{V}$ pour retrouver l'équation de Helmholtz relative à l'évolution du vecteur tourbillon $\vec{W} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{V}$ et qui intervient en mécanique des fluides. On sait qu'elle correspond à l'entraînement des lignes de tourbillon par le fluide, de sorte qu'on peut conclure que dans un fluide parfaitement conducteur les lignes magnétiques participent intégralement au mouvement du fluide, ou encore que les lignes de force magnétique sont "figées" dans le fluide.

L'équation de Helmholtz est celle qui correspond au mouvement turbulent ; elle n'est valable que pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds $R = \frac{LV}{\nu}$. On est ainsi conduit à introduire le "nombre de Reynolds magnétique"

$$R_m = LV\mu\sigma \tag{4}$$

où L correspond à une longueur caractéristique de l'écoulement. Pour des valeurs élevées de R_m, le second terme au second membre de (2) est négligeable devant le premier terme. Au contraire, pour de faibles valeurs de σ, (2) se réduit à

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\sigma}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} \tag{2''}$$

qui n'est autre que l'équation de diffusion et qui implique une décroissance exponentielle de $\vec{B}$ avec le temps t. On s'aperçoit ainsi que des valeurs élevées de R_m correspondent à la possibilité de maintenir un champ magnétique grâce à l'effet d'induction électromagnétique en dépit de la dissipation d'énergie par effet Joule.

3. Intégrales premières.

Les équations de la magnétohydrodynamique, même simplifiées par l'introduction de l'approximation hydromagnétique, ne sont pas linéaires. Dans certains cas (étude des ondes d'Alfven), elles peuvent être linéarisées. Mais dans les cas généraux, il y a avantage à rechercher des intégrales premières.

Nous allons considérer ici la recherche d'une intégrale première dans le cas d'un fluide parfait $(\nu = 0)$ occupant un volume fini.

Récrivons l'équation vectorielle d'Euler sous la forme

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = -\,\mathrm{grad}\;p - \rho\;\mathrm{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \Omega\right) - \rho(\mathrm{rot}\,\vec{V})\wedge\vec{V} + \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}\wedge\vec{B} \quad . \tag{5}$$

(On néglige la force $\eta\vec{E}$ due au champ électrique car elle est dans le rapport $\frac{V^2}{c^2}$ avec celle de Lorentz $\vec{J}\wedge\vec{B}$, ainsi qu'il est aisé de le vérifier en raisonnant comme indiqué plus haut).

Multiplions scalairement les deux membres par $\frac{1}{\rho}\vec{B}$ et intégrons dans un volume τ contenant la masse fluide considérée. Nous obtenons

$$\int_\tau \vec{B}.\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\,d\tau = -\int_\tau\left[\frac{\vec{B}}{\rho}.\mathrm{grad}\;p + \vec{B}.\mathrm{grad}\left(\Omega + \frac{V^2}{2}\right) + \vec{B}.(\mathrm{rot}\,\vec{V}\wedge\vec{V})\right]d\tau \quad .$$

Introduisant le potentiel-vecteur $\vec{A}$

$$\frac{1}{\rho}\vec{B}.\text{grad } p = \frac{1}{\rho}\vec{\text{rot}}\,\vec{A}.\text{grad } p$$

et en remarquant que

$$\text{div}\,[\frac{1}{\rho}\vec{A}\wedge\text{grad } p] = (\text{grad } p).\text{rot}\,\frac{\vec{A}}{\rho} = (\text{grad } p).[(\text{grad}\,\frac{1}{\rho})\wedge\vec{A} - \frac{1}{\rho}\,\text{rot}\,\vec{A}]$$

nous avons, S étant la surface limitant τ ,

$$\int_\tau \frac{\vec{B}}{\rho}.\text{grad } p\, d\tau = \int_S \frac{1}{\rho}\vec{A}\wedge\text{grad } p\, d\tau - \int_\tau(\text{grad } p).[(\text{grad}\,\frac{1}{\rho})\wedge\vec{A}]\, d\tau \quad .$$

Supposons maintenant que, dans le fluide considéré, on ait $\rho = f(p)$. La dernière intégrale est nulle. S'il n'y a pas de champ extérieur, on peut prendre $\vec{A} = 0$ sur S . De sorte que finalement

$$\int \frac{\vec{B}}{\rho}.(\text{grad } p)\, d\tau = 0 \quad .$$

Considérons

$$\int_\tau \vec{B}.\text{grad}\,(\frac{V^2}{2}+\Omega)\, d\tau = \int_\tau \text{div}\,(\frac{V^2}{2}+\Omega)\,\vec{B}\, d\tau = \int_S(\Omega+\frac{V^2}{2})\,\vec{B}\, ds \quad ;$$

on peut choisir S de façon que l'on ait sur S : $V = 0$, $\Omega = Cte$. Alors

$$\int_\tau \vec{B}.\text{grad}(\frac{V^2}{2}+\Omega)\, d\tau = 0 \quad .$$

Enfin

$$-\int_\tau \vec{B}.[(\text{rot}\,\vec{V})\wedge\vec{V}]\, d\tau = -\int_\tau(\vec{V}\wedge\vec{B}).\text{rot}\,\vec{V}\, d\tau$$

$$= \int_\tau \text{div}[(\vec{V}\wedge\vec{B})\wedge\vec{V}]\, d\tau - \int_\tau \vec{V}.\text{rot}\,(\vec{V}\wedge\vec{B})\, d\tau = -\int_\tau \vec{V}.\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\, d\tau \quad .$$

Donc

$$\int_\tau(\vec{V}\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{B}.\frac{\partial\vec{V}}{\partial t})\, d\tau = 0$$

d'où l'intégrale première

(6) $$\int_\tau \vec{V}.\vec{B}\, d\tau = Cte \quad .$$

4. <u>Champs asthéniques</u> ([2], [11]).

La magnétostatique des fluides est évidemment régie par les deux équations

(7) $$-\text{grad } p - \rho\,\text{grad}\,\Omega - \vec{J}\wedge\vec{B} = 0 \quad ,$$

(3) $$\text{div}\,\vec{B} = 0 \quad .$$

Dans certains problèmes astrophysiques, on doit avoir un équilibre alors que les ordres de grandeur de $|\text{grad } p|$, $\rho\,|\text{grad}\,\Omega|$ sont très inférieurs à celui du produit $|\vec{J}|\,|\vec{B}|$. On est ainsi conduit à admettre que la condition

$$\vec{J} \wedge \vec{B} = 0$$

est satisfaite en tout point. Le champ magnétique sera donc tel que

(8) $$(\text{rot } \vec{B}) \wedge \vec{B} = 0 \quad .$$

C'est l'équation de Beltrami. L'étude des "champs asthéniques" ("force-free fields") (ou champs à force de Lorents nulle), se trouve donc ramenée à la résolution d'un problème classique. Nous rappelons rapidement les grandes lignes d'une des méthodes connues utilisées pour cette résolution.

L'équation de Beltrami admet évidemment la solution $\vec{B} = \text{grad } U$. C'est un cas banal, dépourvu d'intérêt dans le problème ici envisagé. Mais par contre, l'équation de Beltrami est satisfaite par tout $\vec{B}$ tel que

(9) $$\text{rot } \vec{B} = \alpha\vec{B}$$

le scalaire $\alpha(x\ ,\ y\ ,\ z)$ n'étant astreint qu'à la seule condition

(10) $$\text{div } \alpha\vec{B} = (\text{grad } \alpha).\vec{B} = 0 \quad .$$

De (9), on déduit immédiatement :

$$\text{rot rot } \vec{B} = \text{rot } \alpha\vec{B} = (\text{grad } \alpha) \wedge \vec{B} + \alpha \text{ rot } \vec{B} = (\text{grad } \alpha) \wedge \vec{B} + \alpha^2 \vec{B} \quad ,$$

ou encore en utilisant l'opérateur laplacien <u>vectoriel</u> Δ ,

(11) $$\Delta\vec{B} + \alpha^2 \vec{B} + (\text{grad } \alpha) \wedge \vec{B} = 0 \quad .$$

Toute solution de (11) satisfait également (9). Mais la réciproque n'est pas vraie. (Car on n'a $\Delta\vec{B} \equiv -\text{ rot rot } \vec{B}$ que si $\text{div } \vec{B} = 0$).

Le cas $\alpha = \text{Cte}$ a une grande importance dans certaines applications. L'équation (11) se réduit alors à

(12) $$\Delta\vec{B} + \alpha^2 \vec{B} = 0 \quad .$$

Soit un scalaire ψ satisfaisant à

(13) $$\Delta\psi + \alpha^2 \psi = 0 \quad ;$$

on vérifie aisément que si $\vec{a}$ est un vecteur unitaire <u>constant</u>, les trois vecteurs

$$\vec{L} = \text{grad } \psi \ , \qquad \vec{M} = \text{rot } \psi\vec{a} \ , \qquad \vec{N} = \frac{1}{\alpha} \text{ rot } \vec{M}$$

sont linéairement indépendants et sont solutions de (12).

On a

$$\text{rot}\ \vec{L} = 0 \ , \qquad \text{rot}\ \alpha\vec{N} = \alpha\ \text{rot}\ \vec{N} = \text{rot}\ \text{rot}\ \vec{M} = -\Delta\vec{M} = \alpha^2\ M \quad ,$$

$$\text{rot}\ \vec{N} = \alpha\vec{M} \quad ,$$

$$\text{rot}\ (\vec{M} + \vec{N}) = \alpha(\vec{N} + \vec{M}) \quad ,$$

et on en conclut que

(14) $$\vec{B} = \text{rot}\ \psi\vec{a} + \frac{1}{\alpha}\ \text{rot}\ \text{rot}\ \psi\vec{a}$$

est la solution la plus générale de (12) satisfaisant à la condition supplémentaire (3).

5. Effet dynamo ([3], [6], [7], [10]).

L'existence de champs magnétiques cosmiques a conduit les astrophysiciens à se poser la question de décider si une masse fluide conductrice pouvait dans certaines circonstances maintenir un champ magnétique stable. C'est là le problème de l'effet dynamo, ainsi baptisé à cause de l'analogie existant entre le phénomène supposé et l'amorçage d'une dynamo série qui maintient son propre champ à partir des courants engendrés par la rotation de l'induit dans le champ magnétique dû à l'aimantation rémanente des pièces polaires.

Dans l'état actuel de nos connaissances, il n'existe pas de démonstration rigoureuse sur la possibilité d'un tel effet. Les progrès réalisés jusqu'ici ne l'ont été que dans un sens négatif : on peut prouver que l'effet dynamo est impossible dans certains cas (ce qui n'est pas sans intérêt dans diverses applications). COWLING a démontré dès 1935, que l'effet dynamo est impossible dans une masse sphéroïdale si le champ des vitesses $\vec{V}$ possède une symétrie cylindrique. Plus généralement, l'effet dynamo exige que le champ des vitesses soit suffisamment "asymétrique"[5].

Réécrivons l'équation (2) relative à l'évolution de l'induction magnétique, sous la forme

(15) $$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \text{rot}\ (\vec{V} \wedge \vec{B}) + \frac{1}{\mu\sigma}\ \Delta\vec{B} \quad .$$

Si $\vec{V} = 0$ elle se réduit à l'équation de diffusion déjà envisagée

(16) $$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma}\ \Delta\vec{B} \quad .$$

On recherche les solutions de la forme $\vec{B}(\vec{r}\ ,\ t) = \vec{B}(\vec{r})\ e^{-\lambda t}$ et $\vec{B}(\vec{r})$ doit satisfaire à :

(16')
$$\Delta\vec{B}(\vec{r}) + K^2\,\vec{B}(\vec{r}) = 0\ , \qquad K^2 = \lambda\mu\sigma \quad .$$

On sait qu'on peut trouver une suite de valeurs propres : λ_1 , λ_2 , ... , et de vecteurs propres $\vec{B}_1(r)$, $\vec{B}_2(r)$, ... satisfaisant à (16') et à la condition aux limites

$$(\text{rot}\ \vec{B}_\nu)_n = 0$$

relative à la surface S de la masse fluide conductrice. La suite $\vec{B}_\nu$ est orthogonale

(17)
$$\int \vec{B}_m.\vec{B}_n\ d\tau = 0 \qquad (m \neq n) \quad .$$

On peut aussi la supposer normée de la façon suivante

(17')
$$\int B_m^2\ d\tau = \mu \quad .$$

Tout vecteur $\vec{B}$ indépendant du temps pourra donc s'exprimer par un développement

(18)
$$\vec{B} = \sum b_\nu\,\vec{B}_\nu \quad .$$

De plus,

$$\int \vec{J}_m.\vec{J}_n\ d\tau = \sigma\int\vec{E}_m.\vec{J}_n\ d\tau = \frac{\sigma}{\mu}\int\vec{E}_m.\text{rot}\ \vec{B}_n\ d\tau \quad ;$$

les vecteurs

$$\vec{E}_m(\vec{r}\ ,\ t) = \vec{E}_m\ e^{-\lambda_m t}\ , \qquad \vec{B}_m(\vec{r}\ ,\ t) = \vec{B}_m\ e^{-\lambda_m t}\ , \qquad \vec{J}_m(\vec{r}\ ,\ t) = \vec{J}_m\ e^{-\lambda_m t}$$

satisfaisant aux équations de Maxwell, on a

$$\lambda_m\,\vec{B}_m = \text{rot}\ \vec{E}_m \quad .$$

Donc :

$$\int\vec{J}_m.\vec{J}_n\ d\tau = \frac{\sigma}{\mu}\int\{\text{div}\ (\vec{E}_m \wedge \vec{B}_n) + \vec{B}_n.\lambda_m\,\vec{B}_m\}\ d\tau$$

soit

(19)
$$\begin{aligned}\int\vec{J}_m.\vec{J}_n\ d\tau &= 0 \qquad \text{si}\ \ m \neq n \\ &= \sigma\lambda_m \qquad \text{si}\ \ m = n \quad .\end{aligned}$$

Supposons maintenant $\vec{V} \neq 0$ et astreint à la seule condition $\text{div}\ \vec{V} = 0$. (Le fluide est supposé incompressible). Proposons-nous de déterminer $\vec{B}(\vec{r}\ ,\ t)$ solution de (15). Écrivons à cette fin

(20)
$$\vec{B}(\vec{r}\ ,\ t) = \sum b_\nu(t)\ \vec{B}_\nu(\vec{r})$$

et

(21) $$\vec{J}(\vec{r}\ ,\ t) = \frac{1}{\mu}\ \text{rot}\ \vec{B} = \sum b_\nu(t)\ \vec{J}_\nu(\vec{r}) \quad .$$

Il s'agit de déterminer les fonctions $b_1(t)$, $b_2(t)$, ... On a

$$\int \vec{J}.\vec{J}_\nu\ d\tau = \sigma \int (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}).\vec{J}_\nu\ d\tau$$
$$= \frac{\sigma}{\mu} \int \vec{E}.\text{rot}\ \vec{B}_\nu + \sigma \int (\vec{V}\ ,\ \vec{B}\ ,\ \vec{J}_\nu)\ d\tau \quad ,$$

$(\vec{V}\ ,\ \vec{B}\ ,\ \vec{J}_\nu)$ désignant le produit mixte. Après quelques calculs faciles, on obtient

$$\int \vec{J}.\vec{J}_\nu\ d\tau = - \frac{\sigma}{\mu} \int \vec{B}_\nu.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\ d\tau + \sigma \int (\vec{V}\ ,\ \vec{B}\ ,\ \vec{J}_\nu)\ d\tau$$

d'où

(22) $$b_\nu\ \lambda_\nu = - \frac{db_\nu}{dt} + \sum_{s=1}^{\infty} a_{\nu s}\ b_s$$

avec

(23) $$a_{\nu s} = \int (\vec{V}\ ,\ \vec{B}_s\ ,\ \vec{J}_\nu)\ d\tau \quad .$$

Or, si le champ des vitesses $\vec{V}$ considéré est susceptible de produire un effet dynamo, on aura $\frac{db_\nu}{dt} = 0$ et l'on est ramené à la résolution du système homogène

(24) $$\lambda_\nu\ b_\nu = \sum_s a_{\nu s}\ b_s \quad .$$

En général, ce système n'admet que la solution $b_1 = b_2 = \ldots = b_\nu = 0$. Supposons cependant que K désignant une constante, nous remplacions le champ $\vec{V}$ par $K\vec{V}$. Il résulte de (23) que $a_{\nu s}$ devient égal à $Ka_{\nu s}$ et le système correspondant à (24) aura une solution non identiquement nulle si

(25) $$\begin{vmatrix} Ka_{11} - \lambda_1 & Ka_{12} & Ka_{13} & \cdots \\ Ka_{21} & Ka_{22} - \lambda_2 & Ka_{23} & \cdots \\ Ka_{31} & Ka_{32} & Ka_{33} - \lambda_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0$$

L'effet dynamo sera possible si on peut déterminer une valeur <u>réelle</u> de K satisfaisant à cette dernière condition.

La difficulté provient évidemment du fait que le déterminant est infini. Soient

K_{1N} , K_{2N} , ... , K_{NN} les N racines obtenues en limitant le déterminant aux N premières lignes et colonnes. La question à laquelle il faudrait savoir répondre est la suivante : lorsque $N \to \infty$, peut-on extraire de l'ensemble K_{nN} une suite ayant une limite réelle ? Si la réponse est affirmative, les rapports b_2/b_1 , b_3/b_1 , ... tendront vers des limites, et le problème possédera donc une solution.

Comme ici a_{mn} est différent de a_{nm} on ne peut considérer le problème comme résolu. Par contre, il est possible d'affirmer qu'il n'y aura pas d'effet dynamo si $a_{nm} = - a_{mn}$, toutes les valeurs caractéristiques étant alors imaginaires pures. Le cas de la matrice antisymétrique est précisément celui que l'on retrouve lorsque le champ des vitesses possède certaines symétries ou encore lorsque l'on envisage un écoulement plan ([6], [7]).

6. Ondes d'Alfven ([1], [6], [8]).

Nous ne nous étendrons pas sur ce sujet qui constitue le chapitre le plus étudié de la magnétohydrodynamique, et qui a fait l'objet de nombreuses recherches théoriques et expérimentales. Rappelons simplement que la linéarisation des équations magnétohydrodynamiques, obtenue en posant $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$ et en remplaçant la dérivée totale $d\vec{V}/dt$ par la dérivée locale $\frac{\partial V}{\partial t}$ conduit, en posant $\vec{B}_0 . \vec{b} = 0$ aux deux équations

(26) $$\frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\mu\rho} \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial z^2}$$

(27) $$\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\mu\rho} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} ,$$

le champ $\vec{B}_0$ constant étant supposé dirigé suivant Oz . On en conclut l'existence d'ondes transversales, se propageant dans un liquide avec une vitesse $B_0/\sqrt{\mu\rho}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALFVEN (H.). - Cosmical electrodynamics. - Oxford, The Clarendon Press, 1953 (International Series of Monographs on Physics).

[2] CHANDRASEKHAR (S.) and KENDALL (P. C.). - On force-free magnetic fields, Astrophys. J., t. 126, 1957, p. 457-460.

[3] COLOMBO (Serge). - L'effet dynamo en magnétohydrodynamique, Rev. gén. Electr. t. 66, 1957, p. 325-332.

[4] COLOMBO (Serge). - La théorie hydromagnétique, Cahiers de Phys., t. 12, 1958, p. 129-153.

[5] COWLING (T. G.). - The magnetic field of sunspots, Monthly Notices Roy. astr. Soc., t. 94, 1934, p. 39-48.

[6] COWLING (T. G.). - Magnetohydrodynamics. - New York, Interscience Publishers, 1957 (Interscience Tracts on Physics and Astronomy, 4)

[7] COWLING (T. G.). - The dynamo maintenance of steady magnetic fields, Quart. J. Mech. and appl. Math., t. 10, 1957, p. 129-136.

[8] DUNGEY (J. W.). - Cosmic electrodynamics. - Cambridge, University Press, 1958 (Cambridge Monographs on Mechanics and applied Mathematics).

[9] ELSASSER (Walter M.). - Hydromagnetism, I., Amer. J. of Phys., t. 23, 1955, p. 590-609 ; II., t. 24, 1956, p. 85-110.

[10] ELSASSER (Walter M.). - Hydromagnetic dynamo theory, Rev. of modern Phys., t. 28, 1956, p. 135-163.

[11] LÜST (R.) und SCHLÜTER (A.). - Kraftfreie Magnetfelder, Z. Astrophys., t. 34, 1954, p. 263-282.