

# SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PHAM THE LAI

**Théorie spectrale d'une classe d'opérateurs elliptiques  
dégénérés non nécessairement auto-adjoint**

*Séminaire Jean Leray*, n° 3 (1974-1975), exp. n° 6, p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=SJL\\_1974-1975\\_\\_3\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SJL_1974-1975__3_A7_0)

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# THEORIE SPECTRALE D'UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES NON NECESSAIREMENT AUTO-ADJOINT.

par PHAM THE LAI.

## INTRODUCTION.

Nous donnons ici le résumé d'un travail qui va paraître au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Il est essentiellement la suite de [10] dans lequel nous avons considéré une classe d'opérateurs différentiels d'ordre  $2m$ , auto-adjoints, elliptiques à l'intérieur, dégénérant à l'ordre  $m$  au bord d'un domaine  $\Omega$  borné, très régulier de  $\mathbb{R}^n$ . Ces opérateurs constituent une généralisation, en dimension quelconque, de l'opérateur de Legendre  $\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx}$  sur l'intervalle  $[-1,1]$ .

Dans [10], nous avons déterminé le comportement asymptotique des valeurs propres dans le cas  $n=2$  ; le cas  $n=1$  est résolu auparavant par M.S. Baouendi, C. Goulaouic dans [2].

Nous donnons ici le résultat correspondant lorsque  $n > 2$ .

Dans cette direction, il n'y a pas de résultats connus dans le cas général d'un opérateur d'ordre  $2m$ . Dans le cas d'un opérateur auto-adjoint d'ordre 2, C. Nordin (cf. [8]) a résolu le problème pour l'opérateur  $\text{div}(\varphi \text{ grad})$ ,  $\varphi$  étant une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  vérifiant les propriétés :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) > 0\}$$

$$\Gamma = \text{bord de } \Omega = \{s \in \mathbb{R}^n ; \varphi(s) = 0\}$$

$$\text{grad } \varphi(s) \neq 0 \text{ pour } s \in \Gamma$$

Auparavant, L. Boutet de Monvel, P. Grivard (cf. [6]) et J. Skimakura (cf. [11]) ont considéré le même opérateur avec  $\Omega$  la boule unité et ont déterminé indépendamment le comportement asymptotique des valeurs propres à l'aide de la connaissance explicite de ces valeurs propres dans ce cas.

Toujours dans le cas d'un opérateur d'ordre 2, des généralisations sont étudiées

par M. Guillemot (cf. [7]) et par L. Vulis, Z. Solomjak (cf. [12]). Les méthodes utilisées par ces auteurs sont assez voisines et basées essentiellement sur le principe variationnel de R. Courant et sur le fait (exceptionnel), que pour l'ordre 2, il y a "séparation des variables". Elles ne semblent donc pas utilisables pour un opérateur d'ordre  $2m$  quelconque.

Nous utilisons ici la méthode "indirecte" de S. Agmon (cf. [1]).

Nous l'avons déjà utilisée dans [10] pour traiter le cas  $n = 2$ ; dans ce cas, bien que l'équivalent de  $N(\lambda)$  (le nombre de valeurs propres qui sont majorées par  $\lambda$ ) soit donné en fonction d'une constante exprimée par une intégrale sur le bord de  $\Omega$ , il est obtenu par une étude à l'intérieur de  $\Omega$ . Dans ce sens, la méthode de résolution est analogue à celle des problèmes non dégénérés traités par S. Agmon; de fait, cet équivalent de  $N(\lambda)$  est le même pour toutes les réalisations de l'opérateur différentiel, comme dans le cas non dégénéré.

Lorsque  $n > 2$ , nous montrons ici que cet équivalent de  $N(\lambda)$  est déterminé essentiellement par les données sur le bord de  $\Omega$ ; il en résulte que pour deux réalisations distinctes de l'opérateur différentiel, les deux équivalents de  $N(\lambda)$  sont distincts.

Nous traitons ici les réalisations de Neumann et de Dirichlet.

Nous remercions P. Bolley et J. Camus pour les nombreuses discussions que nous avons eues avec eux.

## § 1. - HYPOTHÈSES ET RÉSULTATS

Nous utilisons les notations classiques :

$$D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad j = (1, \dots, n), \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$$

$$\partial_t = -i \frac{\partial}{\partial t}$$

Pour  $m$  entier  $\geq 0$  et  $k$  réel, nous considérons les espaces de Sobolev avec poids (cf. [3]):

$$H_m^k(\Omega) = \{ u \in \mathcal{D}'(\Omega); \varphi^k D^\alpha u \in L_2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \}$$

Ces espaces sont munis des normes hilbertiennes naturelles notées  $\| \cdot \|_{m,k;\Omega}$

On définit de manière analogue les espaces  $H_m^k(\mathbb{R}_+^n)$

Nous considérons une forme intégral-différentielle :

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \varphi^m \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta} D_u^\alpha D_{\overline{v}}^\beta dx$$

où les coefficients  $a_{\alpha\beta}$  sont des fonctions  $\in C^\infty(\overline{\Omega})$  et notons  $Q(., D)$  l'opérateur différentiel d'ordre  $2m$  associé à cette forme.

Il est clair que  $a(u,v)$  est une forme sesquilinéaire continue sur  $H_{\frac{m}{2}}(\Omega) \times H_{\frac{m}{2}}(\Omega)$ ; comme on vérifie aisément que  $H_{\frac{m}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$  avec une image dense, il est bien connu que ces données définissent un opérateur  $A$ , non borné dans  $L_2(\Omega)$ ;  $A$  est une réalisation de  $Q(., D)$ ; nous dirons que  $A$  est la réalisation de Neumann de  $Q(., D)$ , par analogie avec des problèmes non dégénérés.

Pour  $s \in \Gamma$ , notons :

$T_s$  le sous espace vectoriel des vecteurs tangents, associé à l'hyperplan tangent en  $s$  à  $\Gamma$ .

$S_{T_s}$  la sphère unité de  $T_s$

$$v_s = \frac{\text{grad } \varphi(s)}{|\text{grad } \varphi(s)|}$$

Nous faisons les hypothèses (H) suivantes sur  $a(u,v)$  :

(i) Il existe une constante  $C > 0$  telle que l'on a :

$$\sum_{\substack{|\alpha| = m \\ |\beta| = m}} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} \geq C |\xi|^{2m}$$

pour tout  $x \in \Omega$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

(ii)  $a_{\alpha\beta}(x) = a_{\beta\alpha}(x)$

pour tout  $x \in \Omega$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  vérifiant  $|\alpha| = |\beta| = m$

(les  $a_{\alpha\beta}(x)$  sont réelles en vertu de (i))

(iii) pour  $s \in \Gamma$  et  $\omega \in S_{T_s}$ , il existe une constante  $C > 0$

telles que :

$$\int_0^\infty t^m \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(s) (\omega + v_s \partial_t)^\alpha u (\omega + v_s \partial_t)^\beta u dt \leq C \|u\|_{m, \frac{m}{2}}^2; \mathbb{R}_+$$

pour tout  $u \in H_{\frac{m}{2}}^m(\mathbb{R}_+)$

Notons :

$$b_{\omega, s}(u, v) = \int_0^\infty t^m \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(s) (\omega + v_s \partial_t)^\alpha u \overline{(\omega + v_s \partial_t)^\beta v} dt$$

C'est une forme intégrale-différentielle d'une variable, homogène, à coefficients constants. En notant  $\mathcal{B}_{\omega, s}$  l'opérateur différentiel d'une variable d'ordre  $2m$  associé à  $b_{\omega, s}$ , nous pouvons considérer  $\beta_{\omega, s}$  la réalisation de Neumann de  $\mathcal{B}_{\omega, s}$ .

Nous avons alors les résultats suivants :

THEOREME 1.1. - Supposons que  $n > 2$  et soit  $a(u, v)$  la forme définie précédemment avec les hypothèses (H).

alors :

(1) Pour  $s \in \Gamma$ ,  $\omega \in S_{T_s}$ ,  $\beta_{\omega, s}$  est auto-adjointe, strictement positive, à résolvante

compacte.

(2) Si  $(\mu_j(\omega, s))_{j \geq 1}$  est la suite  $(*)$  des valeurs propres (réelles et positives) de  $\beta_{\omega, s}$ , rangé par ordre de valeur croissante et si nous notons :

$(*)$

avec la convention habituelle : chaque valeur propre est répétée suivant sa multiplicité, qui est finie en vertu de la compacité de la résolvante.

$$\rho_j(s) = \frac{1}{n-1} \int_{S_{T_s}} \mu_j(\omega, s) \frac{1-n}{m} d\omega \quad (*)$$

la série  $\sum_{j \geq 1} \rho_j(s)$  est convergente et la somme est une fonction bornée sur  $\Gamma$ .

THEOREME 1.2. - Avec la donnée et les hypothèses du théorème 1.1, soit  $A$  la réalisation de Neumann de  $\mathcal{Q}(\cdot, D)$ . Alors :

- (1) La résolvante de  $A$  est compacte et pour tout  $\theta$  vérifiant  $0 < \theta < 2\pi$ ,  $e^{i\theta}$  est une direction de croissante minimale de la résolvante (terminologie de S. Agmon)
- (2) Si  $(\lambda_j)_{j \geq 1}$  est la suite des valeurs propres de  $A$ , rangée par ordre croissant des modules et si nous notons :

$$N(\lambda) = \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j \leq \lambda} 1$$

$N(\lambda)$  vérifie la formule asymptotique :

$$N(\lambda) = \gamma \lambda^{\frac{n-1}{m}} + o\left(\lambda^{\frac{n-1}{m}}\right) \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

avec  $\gamma$  la constante :

$$\gamma = (2\pi)^{1-n} \int_{\Gamma} |\operatorname{grad} \varphi(s)|^{1-n} \left[ \sum_{j \geq 1} \rho_j(s) \right] ds \quad (**)$$

Remarque Si l'on note  $H_m^k(\Omega)$  l'adhérence de  $\mathcal{B}(\Omega)$  dans  $H_m^k(\Omega)$ , l'opérateur  $A$

engendré par le triplet  $\{ H_m^2(\Omega), L_2(\Omega), a(u, v) \}$  est appelé la réalisation de Dirichlet de  $\mathcal{Q}(\cdot, D)$

Pour  $s \in \Gamma$  et  $\omega \in S_{T_s}$ , soit  $\beta_{\omega, s}^0$  la réalisation de Dirichlet de  $\mathcal{B}_{\omega, s}$  ;  
alors  $\beta_{\omega, s}^0$  a des propriétés analogues à  $\beta_{\omega, s}$ . En particulier, si  $\{ \mu_j^0(\omega, s) \}_{j \geq 1}$  est la suite des valeurs propres de  $\beta_{\omega, s}^0$  et si nous notons :

(\*)  $d\omega$  est la mesure de surface  $((n-2)$ -dimensionnelle) de la sphère  $S_{T_s}$ .

(\*\*)  $ds$  est la mesure de surface  $((n-1)$ -dimensionnelle du bord)  $\Gamma$  de  $\Omega$

$$\rho_j^0(s) = \frac{1}{n-1} \int_{S_{T_s}} \mu_j^0(\omega, s) \frac{1-n}{m} d\omega$$

la série  $\sum_{j \geq 1} \rho_j^0(s)$  est convergente et la somme est une fonction bornée sur  $\Gamma$ .

Cependant, d'après [5],  $\tilde{A}^0$  n'a pas les propriétés de régularité que possède  $A$  ; alors, moyennant une hypothèse supplémentaire, nous avons un résultat analogue au théorème 1.2.

THEOREME 1.2'. - Avec la donnée et les hypothèses du théorème 1.2, supposons de plus que :

$$m > n.$$

Alors la réalisation de Dirichlet  $\tilde{A}^0$  vérifie :

(1) La résolvante de  $\tilde{A}^0$  est compacte et pour tout  $\theta$  vérifiant  $0 < \theta < 2\pi$ ,  $e^{i\theta}$  est une direction de croissance minimale de la résolvante.

(2) Si  $(\lambda_j^0)_{j \geq 1}$  est la suite des valeurs propres de  $\tilde{A}^0$  et si nous notons :

$$N^0(\lambda) = \sum_{\substack{0 \\ \operatorname{Re} \lambda_j \leq \lambda}} 1$$

$N^0(\lambda)$  vérifie la formule asymptotique :

$$N^0(\lambda) = \gamma^0 \lambda^{\frac{n-1}{m}} + o\left(\lambda^{\frac{n-1}{m}}\right) \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

avec  $\gamma^0$  la constante :

$$\gamma^0 = (2\pi)^{1-n} \int_{\Gamma} |\operatorname{grad} \varphi(s)|^{1-n} \left[ \sum_{j \geq 1} \rho_j^0(s) \right] ds$$

## § 2. - NOYAU DE LA RESOLVANTE

Les résultats annoncés au § 1 s'obtiennent par une étude du noyau de la résolvante, la résolvante est un opérateur intégral avec un noyau d'Agmon continu et borné (cf [10]) lorsque  $m > n$ .

Nous faisons donc dans toute cette partie l'hypothèse :

$$(2.1) \quad m > n > 2.$$

a - Le cas d'un opérateur homogène à coefficients constants dans un demi-espace.

Soit  $E_+^n$  un demi-espace ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , défini par son bord  $T$  et par un vecteur

unitaire  $v$ , normale intérieure à  $E_+^n$ .

Nous supposons que  $T$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et pour  $x \in E_+^n$  nous notons  $\delta(x) = \text{dist}(x, T)$ . On définit les espaces  $H_m^k(E_+^n)$  avec le poids  $\delta(x)$ .

Nous considérons ici une forme intégrro-différentielle homogène :

$$c(u, v) = \int_{E_+^n} \delta(x)^m \sum_{\substack{|\alpha| = m \\ |\beta| = m}} a_{\alpha\beta} D_u^\alpha \overline{D_v^\beta} dx$$

avec  $a_{\alpha\beta}$  constants

Nous notons  $\mathcal{C}(\cdot, D)$  l'opérateur différentiel associé et  $C$  la réalisation de Neumann de  $\mathcal{C}(\cdot, D)$  dans  $L_2(E_+^n)$

Pour  $\omega \in S_T$ , la sphère unité de  $T$ , nous considérons la forme  $b_\omega(u, v)$ , l'opérateur  $\mathcal{B}_\omega(\cdot, \partial_t)$  associé et la réalisation de Neumann  $\beta_\omega$  de  $\mathcal{B}_\omega$  comme au § 1.

Nous avons le :

LEMME 2.1 - Supposons qu'il existe  $C > 0$  telle que :

$$(2.2) \quad \text{Re } c(u, u) \geq C |u|^2 \quad \forall u \in H_{m, \frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}(E_+^n)$$

Alors, pour  $\omega \in S_T$

(1)  $\beta_\omega$  est à résolvante compacte

(2) Si  $(\mu_j(\omega))_{j \geq 1}$  est la suite des valeurs propres de  $\beta_\omega$ , rangée par ordre de module croissant et si nous notons :

$$\rho_j = \frac{1}{n-1} \int_{S_T} \mu_j(\omega)^{\frac{1-n}{m}} d\omega$$

la série  $\sum_{j \geq 1} \rho_j$  est absolument convergente.

(dans l'intégrale précédente, sachant que  $\text{Re } \mu_j(\omega) > 0$ , la puissance de  $\mu_j(\omega)$



correspond à la détermination holomorphe de  $\mu^\alpha$ ,  $\mu \notin \overline{R_-}$ , qui est positive sur  $R_+$ )

On prouve ce lemme en utilisant le théorème du noyau établi dans [9] qui permet de montrer que la suite  $(\mu_j(\omega))_{j \geq 1}$  a un comportement :

$$|\mu_j(\omega)^{-1}| \leq C j^{-m}$$

pour tout  $\omega \in S_T$  et  $j \geq 1$

Grâce à l'hypothèse (2.1), le noyau de la résolvante de  $C$  est continu et borné. Une transformation de Fourier partielle par rapport aux variables tangentielles permet d'exprimer le noyau en fonction des éléments "spectraux" de la réalisation de Neumann  $\beta_\omega$ . C'est le :

THEOREME 2.2. - Sous les hypothèses (2.1) (2.2), nous avons :

(1) Pour  $\lambda \geq 0$ ,  $F_\lambda = (C + \lambda)^{-1}$  existe et est un opérateur intégral dont le noyau d'Agmon  $F_\lambda(x, y)$  associé est continu et borné sur  $E_+^n \times E_+^n$

(2) Nous avons la formule :

$$\int_0^\infty F_\lambda(vt, vt) dt = (2\pi)^{1-n} \frac{\pi(n-1)}{m} (\sin \frac{\pi(n-1)}{m})^{-1} \left[ \sum_{j \geq 1} \rho_j \right] \lambda^{-1 + \frac{n-1}{m}}$$

pour tout  $\lambda > 0$ .

(3) Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que :

$$\left| \int_0^\epsilon F_\lambda(vt, vt) dt - \int_0^\infty F_\lambda(vt, vt) dt \right| \leq C_\epsilon \lambda^{-1 + \frac{n-1}{m} - \frac{n-2}{2m}}$$

pour tout  $\lambda > 0$

b - Le cas général

Nous considérons ici la situation générale du §1; nous avons noté  $A$  la réalisation de Neumann de l'opérateur différentiel  $\mathcal{A}(\cdot, D)$ .

En vertu des hypothèses du § 1, il existe  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tel que l'opérateur  $G_\lambda = (A + \lambda)^{-1}$  existe pour tout  $\lambda \geq \lambda_0$ .

Grâce à l'hypothèse (2.1),  $G_\lambda$  est un opérateur intégral dont le noyau d'Agmon  $G_\lambda(x, y)$  associé est continu et borné sur  $\Omega \times \Omega$ .

Sur tout compact inclus dans  $\Omega$ , ce noyau a un comportement asymptotique bien connu (cf. [1] par exemple). Au voisinage de chaque point  $s$  du bord  $\Gamma$ , nous étudions ce noyau en le comparant à celui qui correspond à la réalisation de Neumann de l'opérateur différentiel homogène, à coefficients constants obtenu en prenant la partie homogène de degré  $2m$  de  $\mathcal{Q}(\cdot, D)$ , les coefficients étant ceux de  $\mathcal{Q}(\cdot, D)$ , pris au point  $s$ . On utilise les résultats de la partie a et nous avons le :

**THEOREME 2.3.** - Le noyau  $G_\lambda(x, y)$  de  $G_\lambda = (A + \lambda)^{-1}$  vérifie la formule asymptotique :

$$\int_{\Omega} G_\lambda(x, x) dx = (2\pi)^{1-n} \frac{\pi(n-1)}{m} \left( \sin \frac{\pi(n-1)}{m} \right)^{-1} \left( \int_{\Gamma} |\text{grad } \varphi(s)|^{1-n} \left[ \sum_{j=1}^n \varphi_j(s) \right] ds \right)$$

$$\lambda^{-1 + \frac{n-1}{m}} + O\left(\lambda^{-1 + \frac{n-1}{m}}\right) \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

c) - Esquisse de la preuve du résultats du §1. Le théorème 1.1. se prouve comme le lemme 2.1.

Lorsque  $m > n$ , on utilise le théorème 2.3 et un théorème taubérien classique donne la conclusion du théorème 1.2. Dans le cas contraire, on considère  $k$  entier tel que  $km > n$  et on étudie  $A^k$  à la place de  $A$ , sachant que  $\mathcal{B}(A^k) = H_{2km}^{km}(\Omega)$ . On achève la preuve comme auparavant.

### § 3. - LE CAS D'OPÉRATEURS D'ORDRE DEUX (\*)

#### a) - L'opérateur $-\text{div}(\varphi \text{grad})$

Cet opérateur est étudié par C. Nordin dans [8]. La structure simple de cet opérateur permet de "séparer" les variables tangentielles de la variable normale et l'opérateur différentiel  $\mathcal{B}_{\omega, s}(\cdot, \partial_t)$  ne dépend ni de  $\omega$ , ni de  $s$ .

(\*) Il est prouvé dans [5] que  $H_m^k(\Omega)$  coïncide avec  $H_m^{0k}(\Omega)$  lorsque  $k \geq m - \frac{1}{2}$ . Donc, pour la classe des opérateurs que nous étudions, la réalisation de Neumann coïncide avec la réalisation de Dirichlet pour les opérateurs d'ordre 2 puisque  $H_1^{\frac{1}{2}}(\Omega) = H_1^{\frac{1}{2}}(\Omega)$

En effet, cet opérateur s'écrit, comme il est aisé de le voir :

$$\mathcal{B}_{s,w} = t + \partial_t t \partial_t$$

C'est donc l'opérateur de Laguerre. C'est un cas particulier d'une classe d'opérateur différentiel d'ordre 2 étudié par P. Bolley et J. Camus dans [4].

$$Lu = P^2(\partial_t)(tu(t)) + P^1(\partial_t)u(t)$$

où  $P^2(\partial_t)$  et  $P^1(\partial_t)$  sont des opérateurs différentiels à coefficients constants d'ordre  $\leq 2$  et  $\leq 1$  respectivement. En supposant que  $P^2(\tau) \neq 0$  pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  et que les deux racines  $\tau_+$  et  $\tau_-$  de  $P^2(\tau) = 0$  vérifient  $\text{Im } \tau_+ > 0$  et  $\text{Im } \tau_- < 0$ , les valeurs propres  $(*)$  de la réalisation de Neumann (ou de Dirichlet) de  $L$  sont données par les formules explicites :

$$\mu_j = P^1(\tau_+) - ij(\tau_+ - \tau_-) \quad j \geq 1$$

Dans le cas de l'opérateur de Laguerre, nous avons :

$$\mu_j = 2j-1 \quad j \geq 1$$

Comme on a, en notant  $V_{n-1}$  le volume de la boule de  $\mathbb{R}^{n-1}$ :

$$\frac{1}{n-1} \int_{S_T} d\omega = V_{n-1}$$

le théorème 1.2 donne la formule asymptotique :

$$N(\lambda) = (2\pi)^{1-n} V_{n-1} \left[ \sum_{j \geq 1} \frac{1}{(2j-1)^{n-1}} \right] \cdot \left( \int_{\Gamma} |\text{grad } \varphi(s)|^{1-n} ds \right) \lambda^{n-1} \\ + o(\lambda^{n-1}) \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

C'est la formule donnée par C. Nordin

#### b) - Opérateur de second ordre général

Dans le cas présent, écrivons la forme  $a(u,v)$  de la manière classique suivante :

(\*) Ce calcul nous est communiqué par P. Bolley et J. Camus.

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \varphi(x) \sum_{k,j=0}^n a_{kj}(x) D_k u \overline{D_j v} dx$$

Pour  $x \in \overline{\Omega}$ , notons  $a(x)$  la matrice  $(a_{kj}(x))_{k,j:1,\dots,n}$

Par un changement de variable localement au voisinage de chaque point du bord  $\Gamma$  on se ramène au calcul de la partie  $a$  et on a le :

THEOREME 3.1. - Supposons que  $n > 2$  et que  $a(x)$  soit une matrice réelle symétrique, uniformément définie positive.

Alors, les conclusions du théorème 1.2 sont vérifiées pour  $A = \overset{\circ}{A}$  et la constante  $\gamma$  est donnée par la formule :

$$\gamma = (2\pi)^{1-n} V_{n-1} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2j-1)^{n-1}} \right] \int_{\Gamma} \frac{\langle a(s) v_s, v_s \rangle^{1-\frac{n}{2}} ds}{|\text{grad } \varphi(s)|^{n-1} (\det a(s))^{\frac{1}{2}}}$$

Remarque. Le théorème 3.1, donne dans le cas auto-adjoint, un résultat de L. Vulis, Z. Solomjak [12]. Ces auteurs ont étudié, dans le cadre qui nous intéresse, le cas :

$$a(u,v) = \int_{\Omega} d(x) \sum_{k,j=1}^n a_{kj}(x) D_k u \overline{D_j v} dx + h \int_{\Omega} u \overline{v} dx$$

avec  $d(x) = \text{dist}(x, \Gamma)$

La formule du théorème 3.1 donne le résultat de [12] avec ici  $|\text{grad } \varphi| = 1$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [ 1] S. AGMON - Lectures on Elliptic Boundary value Problems, Princeton  
Van Nostrand Mathematical Studies, (1965)
- [ 2] M.S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC - Régularité et théorie spectrale pour une  
classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Arch. Rational  
Mech. Anal., Vol. 34, (1969), p. 361-379
- [ 3] P. BOLLEY - J. CAMUS - Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec  
poids. Publications de l'Université de Rennes, (1969).
- [ 4] P. BOLLEY, J. CAMUS - Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés  
à une variable. J. Math. Pures Appl. vol. 51, (1972) p. 429-440.
- [ 5] P. BOLLEY, J. CAMUS - Régularité pour une classe de problèmes aux limites  
elliptiques dégénérés variationnels. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 278  
(1974), p. 651-653.
- [ 6] L. BOUTET de MONVEL, P. GRISVARD - Le comportement asymptotique des valeurs  
propres d'un opérateur. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 272, (1971),  
p. 23-25.
- [ 7] M. GUILLEMOT, TESSIER - Application des méthodes variationnelles à l'étude  
spectrale d'opérateurs dégénérés. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 277,  
(1973), p. 739-742.
- [ 8] C. NORDIN - The asymptotic distribution of eigenvalues of a degenerate ...  
elliptic operator. Arkiv för Matematik, vol. 10, (1972) p. 3-21
- [ 9] PHAM THE LAI - Noyaux d'Agmon. Séminaire Jean LERAY - Collège de France  
(1973).
- [ 10] PHAM THE LAI - Comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe  
d'opérateurs elliptiques dégénérés en dimension 2. Séminaire  
Jean LERAY - Collège de France, (1973).
- [ 11] J. SHIMAKURA - Quelques exemples des 3 fonctions d'Epstein pour les opéra-  
teurs elliptiques dégénérés de second d'ordre. Proc. Japan  
Acad. Sc., vol. 46, (1970) p. 1065-1069.
- [ 12] I.L. VULIS, M.Z. SOLOMJAK - Spectral asymptotics of degenerate elliptic  
operators. Soviet. Math. Dokl, vol 13, (1972), p. 1484-1488.