

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A. CRUMEYROLLE

Revêtements « spinoriels » du groupe symplectique et indices de Maslov

Séminaire Jean Leray, n° 3 (1974-1975), exp. n° 5, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1974-1975__3_A6_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REVÊTEMENTS "SPINORIELS" DU GROUPE SYMPLECTIQUE ET INDICES DE MASLOV

par A. CRUMEYROLLE

1°) Définition algébrique des indices de Maslov .

Les résultats antérieurs sont admis et nous conservons les mêmes notations.

Proposition 1 : Une base symplectique $(\epsilon_\alpha, \epsilon_{\beta^*})$ adaptée à la somme directe $E' = E_1 \oplus E_2$ étant choisie, $\gamma \in Sp_2(r)$ se factorise de manière unique en :

$$(11) \quad \gamma = \sigma \cdot \tau_2 \cdot \tau_1, \quad p(\sigma) \in U(r, \mathbb{C}), \quad \tau_i \in \exp \sqrt[2]{V} \mathcal{L}_i, \quad i = 1, 2,$$

On a : $\sigma = \exp \left(- \frac{i \sum a^{\alpha\alpha^*}}{2} \right) \exp a^{\alpha\beta^*} \epsilon_\alpha \epsilon_{\beta^*}, \quad a^{\alpha\beta^*} = \bar{a}^{\beta\alpha^*}.$

Posant $\text{Ind } \gamma = \exp \left(\frac{i \sum a^{\alpha\alpha^*}}{2} \right)$, alors $\text{Ind } \gamma = \det p(\sigma) \in S^1$ et ne dépend que de la donnée de γ dans $Sp_2(r)$.

Cette factorisation peut se voir comme un cas particulier d'un théorème de Cartan sur les sous-groupes compacts maximaux; on peut l'établir en détails en remarquant :

- que le sous-groupe G'_i des éléments de $M'_p(r)$ qui conservent $\mathcal{L}_i$ point par point est engendré par les $\exp u$, $u \in \mathbb{C} \oplus \sqrt[2]{V} \mathcal{L}_i$
- que $\underline{GL}(r, \mathbb{C}) \oplus \underline{G}'_i$ est une sous-algèbre de Lie de $M'_p(r)$ et $\underline{G}'_i$ est un idéal de cette sous-algèbre.
- que l'on peut en raison de la connexité de $Sp_2(r)$ raisonner sur un voisinage de l'identité et appliquer aux éléments $\prod_i (\exp u_i)$, $u_i \in \sqrt[2]{V} \mathcal{L}_i$, la formule de Campbell-Hausdorff.
- que le calcul de $\det p(\sigma)$ se fait à l'aide de $[a^{\alpha\beta^*} \epsilon_\alpha \epsilon_{\beta^*}; \epsilon_\gamma]$

Remarque : La factorisation de Cartan n'étant pas un produit direct, en général $\text{Ind } (\gamma\gamma') \neq \text{Ind } \gamma \cdot \text{Ind } \gamma'$. Toutefois on a égalité si dans le calcul de la factorisation de $\gamma\gamma'$ n'apparaît aucune permutation sur des couples tels que $\tau_1 \tau_2$.

Proposition 2. (Arnold [1]).

$U(r, \mathbb{C})$ opère transitivement sur l'ensemble des sous-espaces lagrangiens avec stabilisateur $O(r, \mathbb{R})$.

On sait que l'on appelle lagrangien tout sous-espace (réel ici) totalement isotrope maximal pour F .

L et L' sont des lagrangiens transverses si $E = L \oplus L'$. A quelle condition le transformé de L par $\gamma \in Sp_2(r)$ est-il transverse ? Il est possible de se ramener à $L = E_1$, $L' = E_2$ introduits plus haut. $\gamma_0 = \nu^{-1} \circ \gamma \circ \nu$, avec $p(\gamma_0) \in U(r, \mathbb{C})$ est tel que $p(\gamma_0)e_\alpha = t_\alpha e_{\alpha^*}$ et $p(\gamma_0)e_{\alpha^*} = -t_\alpha e_\alpha$, $t_\alpha = \pm 1$, en choisissant convenablement (e_α, e_{β^*}) base symplectique adaptée à $E = E_1 \oplus E_2$. D'après la proposition 10, $\exp(\sum_\alpha -\frac{\pi i}{2} t_\alpha e_\alpha e_{\beta^*})$ donne γ_0 par projection.

Mais si $\gamma'_0 \in Sp_2(r)$ envoie E_1 sur E_2 , $\gamma'_0 = \nu'_2 \circ \gamma_0$, ν'_2 conservant E_2 , on peut se ramener, modulo un changement de repère symplectique, à ν'_2 conservant E_2 point par point, la remarque qui suit la proposition 1 assure que $\text{Ind } \gamma_0 = \text{Ind } \gamma'_0$ puis la proposition 1 assure que $\text{Ind } \gamma = \text{Ind } \gamma_0$. Ainsi :

Proposition 3 : Si $\gamma \in Sp_2(r)$ envoie le lagrangien L sur le lagrangien L'

transverse : (I) Il existe r nombres $t_\alpha = \pm 1$, tels que

$$\text{Ind } \gamma = \exp\left(-\frac{\pi i}{2} \sum t_\alpha\right) \in \mathbb{Z}_4. \quad (12)$$

(II) Il existe $\gamma' \in Sp_2(r)$, avec $p(\gamma') \in U(r, \mathbb{C})$, tel que
s. (e_α, e_{β^*}) est une base symplectique adaptée à la décomposition $E = L \oplus L'$;
 $\gamma'(e_\alpha) = t_\alpha e_{\alpha^*}$, $\gamma'(e_{\alpha^*}) = -t_\alpha e_\alpha$, et $\text{Ind } \gamma = \text{Ind } \gamma'$.

Définition : Nous appellerons $m_2(\gamma) = \frac{r}{2} - \frac{1}{i\pi} \log(\text{Ind } \gamma)$, (mod 4), (13)

indice de Maslov de $\gamma \in Sp_2(r)$, transformant le lagrangien L en le lagrangien transverse L' .

Nous nous proposons de relier cette définition à celle de J. Leray (2).

Soient encore L et L' , (e_α, e_{β^*}) une base symplectique adaptée à la somme directe $L \oplus L' = E$. Si L'' est un autre lagrangien, $L'' \neq L$, il existe $\gamma \in Sp_2(r)$ qui conserve L' point par point et envoie L sur L'' , on a :

$$p(\gamma)(e'_\alpha) = a^{\alpha*}_\alpha e_{\beta*} + e_\alpha \text{ avec } a^{\alpha*}_\beta = a^{\beta*}_\alpha \quad (14)$$

Pour que L et L'' soient transverses il faut et il suffit que la matrice $||a^{\alpha*}_\beta||$ soit régulière.

Selon J. Leray [2] introduisons $z \in L$, $z' \in L'$, $z'' \in L''$ avec $z+z'+z'' = 0$, L, L', L'' deux à deux transverses.

$z \rightarrow z'$ est un isomorphisme de L sur L', $F(z, z') = F(z, p(\gamma)z) = F(z', z'') = F(z'', z)$; $p(\gamma) - \text{Id}$ considérée comme application de L dans L' est inversible, sa matrice est $||a^{\alpha*}_\beta|| = u$.

L et L' s'identifient à des espaces duaux, $(e_{\beta*})$ base duale de (e_α) . Il est possible de réduire dans le groupe spécial orthogonal la matrice de $||a^{\alpha*}_\beta||$ à une forme de Sylvester, soient (e'_α) dans L et $e'_{\alpha*}$ dans L' les nouvelles bases duales, alors $(p\gamma)(e'_\alpha) = t'_\alpha e'_{\alpha*} + e'_\alpha$, $t'_\alpha = \pm 1$, $E'_{\alpha**} = t'_\alpha e'_\alpha + e_{\alpha'*}$ est une base de L'', $F(e_{\alpha'}, E'_{\beta**}) = \delta_{\alpha\beta}$. L'indice d'inertie de la forme quadratique $z \rightarrow F(z, \rho(z))$, noté $\text{Inert}(L, L', L'')$ est $\frac{r - \text{Tr}u}{2}$, $\rho = p(\gamma)$

γ ayant le même sens que dans la proposition 3 posons :

$$M_\gamma(L, L') = \exp\left(-\frac{i\pi r}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{\pi i}{2} \sum t_\alpha\right) \quad (15)$$

Envoyons L sur L' par γ_2 avec : $\gamma_2(e_\alpha) = e_{\alpha*}$, $\gamma_2(e_{\alpha*}) = -e_\alpha$ puis L' sur L'' par γ_0 avec : $\gamma_0(e_{\alpha*}) = e_{\alpha**} = \gamma(e_\alpha)$, $\gamma_0(e_{\alpha**}) = -e_{\alpha*}$, enfin L'' sur L par γ_1 avec $\gamma_1(E'_{\alpha**}) = -t'_\alpha e'_\alpha$, $\gamma_1(e'_\alpha) = t'_\alpha E'_{\alpha**}$.

$$P = M_{\gamma_0}(L', L'') \cdot M_{\gamma_1}(L'', L) \cdot M_{\gamma_2}^{-1}(L', L) = \exp\left(\frac{i\pi}{2}(r - \text{Tr}u)\right) \quad (16)$$

$$(i\pi)^{-1} \log P = \frac{r - \text{Tr}u}{2} + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (17)$$

$$\text{Inert}(L, L', L'') = (i\pi)^{-1} \log P \pmod{2}.$$

Ceci montre que $m_2(\gamma)$ est l'indice de Maslov, (mod 4), de $\gamma \in \text{Sp}_2(r)$ tel qu'il est défini dans [2].

Toujours selon J. Leray, $\text{Sp}_2(r)$ opère transitivement et effectivement sur

Le revêtement $\Lambda_u(r)$ de la grassmannienne lagrangienne $\Lambda(r)$; on peut donc définir pour $\lambda_u, \lambda'_u \in \Lambda_u(r)$ et $\gamma \in \text{Sp}_2(r)$:

$m_2(\lambda_u, \lambda'_u) = m_2(\lambda_u, \gamma(\lambda_u)) = m_2(\gamma) \in \mathbb{Z}_4$, sous la condition que λ_u et λ'_u se projettent sur L et L' transverses et $\gamma(L) = L'$.

En imposant aux lagrangiens la condition d'être orientés $m_2(\gamma)$ prend ses valeurs dans un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}_2$, d'où la définition de

$$m_2(\lambda_2, \lambda'_2) \in \mathbb{Z}_2.$$

Indices de Maslov d'ordre quelconque :

On utilisera $\gamma \in \text{Sp}_q(r)$, alors $\text{Ind } \gamma = \exp \left(-\frac{\pi i}{q} \sum t_\alpha \right) \in \mathbb{Z}_{2q}$,

P étant défini comme dans (16) :

$$(2i\pi)^{-1} q \log P = \frac{r - \text{Tr} u}{2} + kq, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{Inert}(L, L', L'') = (2i\pi)^{-1} q \log P \pmod{q} \quad (18)$$

et l'indice de Maslov, mod $2q$, de $\gamma \in \text{Sp}_q(r)$ est :

$$m_q(\gamma) = -\frac{r}{2} - \frac{q}{2i\pi} \log(\text{Ind } \gamma), \quad \text{mod } 2q, \quad (19)$$

On passe ensuite comme ci-dessus à la grassmannienne lagrangienne d'ordre $2q$ puis q .

Pour le cas où γ appartient au revêtement universel $\text{Sp}_\infty(r)$, l'indice de Maslov sera :

$$m_\infty(\gamma) = -\frac{r}{2} + \frac{\sum t_\alpha}{2} \in \mathbb{Z}, \quad (20)$$

il donne $m_q(\gamma)$ par réduction mod $2q$.

2') Définition cohomologique des indices de Maslov .

V est une variété différentielle réelle de dimension $2r$, à structure presque symplectique; une sous-variété $\mathcal{L}$ de dimension r de V , telle que $L_x = T_x(\mathcal{L})$ soit pour tout x un sous-espace lagrangien est dite sous-variété lagrangienne.

Considérons un recouvrement de $\mathcal{L}$ par des ouverts connexes (U_α) , et au-dessus de chaque U_α , un sous-fibré lagrangien L_α tel que :

$$\underline{T_x(V) = L_x \oplus L_\alpha(x) \quad , \quad \forall x \in U_\alpha \quad , \quad (A)}$$

Au-dessus de chaque U_α il est loisible de choisir (passer au besoin à un recouvrement plus fin) de manière différentiable $\lambda_x, \lambda_\alpha(x) \in \Lambda_{2q}(T_x(V))$ se projetant respectivement sur L_x et $L_\alpha(x)$.

Soit $\chi_\alpha : x \mapsto m_q(\lambda_\alpha(x), \lambda_\alpha(x)) \in \mathbb{Z}_{2q}$, application constante de U_α dans $\mathbb{Z}_{2q}$. Le système des (U_α, χ_α) définit un cocycle au-dessus de $\mathcal{L}$ de fibre type $\mathbb{Z}_{2q}$.

Mais de (18) on déduit que :

$\text{Inert}(L_\alpha, L_\beta, L)_x = m_q(\lambda_\beta, \lambda)_x - m_q(\lambda_\alpha, \lambda)_x + m_q(\lambda_\alpha, \lambda_\beta)_x$ de sorte que pour 2 systèmes (U_α, χ_α) , $(U'_\alpha, \chi'_\alpha)$, tels que $L_\alpha(x) = L'_\alpha(x)$, pour tout α , les deux cocycles obtenus au-dessus de $\mathcal{L}$ sont cohomologues.

A la situation (A) on peut donc associer univoquement un cocycle $\hat{\alpha} \in H^1(\mathcal{L}, \mathbb{Z}_{2q})$.

Définition : Soit (C) une courbe fermée orientée de $\mathcal{L}$, image continue d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Nous appelons indice de Maslov généralisé d'ordre $2q$ de (C) pour le cocycle $\hat{\alpha}$ la valeur prise par le cocycle $\hat{\alpha}$ sur le cycle que définit (C).

Cette valeur est indépendante du système des (U_α) représentant $\hat{\alpha}$, elle est invariante par homologie et par homotopie sur (C).

On définit un indice d'ordre q en considérant des lagrangiens orientés et de manière analogue un indice à valeurs dans $\mathbb{Z}$, en partant de m_ω .

Si on prend $V = \mathbb{R}^{2r}$, on peut écrire : $\mathbb{R}^{2r} = E_1 \oplus E_2$.

Comme plus haut, en général on a :

$$T_x(V) = L_x \oplus E_2^x, \quad E_2^x \text{ translaté de } E_2.$$

Il existe une transformation symplectique ρ_x telle que les

$$\rho_x(e_\alpha) = a_\alpha^{\beta*}(x) e_{\beta*} + e_\alpha, \quad (21) \quad \text{constituent une base naturelle}$$

de L_x , car en général L_x et E_2^x sont transverses. Il n'existe pas sur $\mathcal{L}$ d'autres points "singuliers" que ceux pour lesquels L_x et E_2^x sont non transverses. Comme $a_\alpha^{\beta*}(x) = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha*}}$ et $\frac{\partial x^{\beta*}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha*}}{\partial x^\beta}$, on pourra déterminer localement une fonction S

$$\text{telle que :} \quad x^{\beta*} = \partial_\beta S(x^\alpha), \quad a_\alpha^{\beta*}(x) = \partial_{\beta\alpha} S(x^\alpha). \quad (22)$$

Les points singuliers correspondront au "contour apparent" Σ de $\mathcal{L}$ relativement à E_1 et seront définis par : $J(x) = \det \left| \left| \frac{\partial x^{\beta*}}{\partial x^\alpha} \right| \right| = 0$. On pourra construire un cocycle au-dessus de $\mathcal{L} - \Sigma$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Z}_q$) .

C'est l'indice à valeurs dans $\mathbb{Z}$ d'une courbe (C) de $\mathcal{L}$, sous-variété lagrangienne de $\mathbb{R}^{2r}$, calculé pour ce cocycle, que définit Maslov [1].

(22) montre pourquoi l'indice de Morse est un cas particulier de l'indice de Maslov.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARNOL' D Une classe caractéristique intervenant dans les cond. de quantification (dans le livre de Maslov - Dunod . Paris 1972) .

- [2] LERAY J. a) Solutions asymptotiques et groupe symplectique. Colloque de Nice 1970
 b) Sol. asympt. et phys. math. Colloque d'Aix 1974.