

# SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

HÉLÈNE AIRAULT

## **Problèmes de Dirichlet-Neumann étalés et fonctionnelles multiplicatives associées**

*Séminaire Jean Leray*, n° 3 (1974-1975), exp. n° 3, p. 1-25

[http://www.numdam.org/item?id=SJL\\_1974-1975\\_\\_3\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SJL_1974-1975__3_A3_0)

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES DE DIRICHLET-NEUMANN ÉTALES ET  
FONCTIONNELLES MULTIPLICATIVES ASSOCIÉES.

par Hélène AIRAULT

Dans [1,2], on a résolu un problème de Dirichlet-Neumann mélangé pour des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs vectorielles. On a montré [2] comment ce problème apparaissait de façon naturelle si on cherche à résoudre de manière probabiliste certains problèmes de Neumann-Spencer. Ici, on étudie de façon plus précise la forme multiplicative des fonctionnelles  $\mathcal{A}(s)$  associées aux différentes conditions frontalières, ainsi que les semi-groupes correspondants.

TABLE DES MATIÈRES

- I - LES PROBLÈMES DE NEUMANN - SPENCER.
- II - FIBRÉ DES REPERES ORTHONORMÉS TRADUCTION DES CONDITIONS FRONTIÈRES ET ÉNONCÉ DES PROBLÈMES.
- III - PROCESSUS RÉFLÉCHIS SUR  $M$  ET SUR  $O(M)$ 
  - 1) La symétrie par rapport au bord, applications induites.
  - 2) Le processus réfléchi sur la variété  $M$ .
  - 3) Les semi-groupes de Spencer opérant sur les formes.
  - 4) Les semi-groupes réfléchis sur  $O(M)$ .
- IV - LE TEMPS LOCAL.
- V - CAS PLAT - SOLUTION DU PROBLÈME DE SPENCER - LE SEMI-GROUPE ASSOCIÉ - THÉORÈME D'ANNULATION - LA FONCTIONNELLE  $\mathcal{A}(s)$ .
  - 1) Solution du problème (1) et théorème d'annulation.
  - 2) Le semi-groupe associé.
  - 3) La forme multiplicative de  $\mathcal{A}(s)$ .
    - Obtention à partir du système intégral (T')
    - Détermination à partir de  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}_\epsilon(s)$  dans les cas particuliers du  $\frac{1}{2}$ -plan et d'un polygone.



I . - LES PROBLEMES DE SPENCER - NEUMANN.

Ces problèmes sont étudiés dans [4,16] et une introduction à notre étude est faite dans [2].  $M$  désigne une sous-variété à bord et finie d'une variété riemannienne et  $n_x$  est la normale au bord au point  $x$ .

On note  $T_x(M)$  l'espace tangent en  $x$  à la variété  $M$  et  $T_x^*(M)$  l'espace vectoriel dual de  $T_x(M)$ . Soit  $\theta$  une forme différentielle définie dans un voisinage du bord (prenons par exemple une forme de degré 1).

Dans un système de coordonnées locales,  $\theta$  s'exprime sous la forme

$$\theta = \theta_1 dx_1 + \dots + \theta_n dx_n$$

où  $(dx_1(x), \dots, dx_n(x))$  est une base de  $T_x^*(M)$

On peut supposer que  $dx_n(x)$  est la différentielle qui correspond à la normale  $n_x$  sous l'isomorphisme canonique  $T_x^*(M) \simeq T_x(M)$  défini par la métrique riemannienne. La composante normale de  $\theta$  est alors au point  $x$ ,  $\theta_n dx_n$  et la composante normale de  $d\theta$  est

$$(d\theta)_n = \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x_n} - \frac{\partial \theta_n}{\partial x_1} \right) dx_n \wedge dx_1 + \dots + \left( \frac{\partial \theta_{n-1}}{\partial x_n} - \frac{\partial \theta_n}{\partial x_{n-1}} \right) dx_n \wedge dx_{n-1}$$

Un des problèmes de Spencer-Conner [4,16] consiste à déterminer une forme différentielle  $\pi$  harmonique dans  $M$  (c'est à dire telle que  $\square \pi = 0$ , où  $\square = d\delta + \delta d$  est le Laplacien de De Rham-Hodge)

et telle que

$$\begin{cases} \pi_n = \theta_n \\ (d\pi)_n = (d\theta)_n \end{cases} \quad \text{au bord de } M.$$

Ces problèmes ont été résolus par des techniques  $L^2$ . On étudiera ces problèmes dans le fibré des repères orthonormés de la variété  $M$ .

## II. - FIBRE DES REPÈRES ORTHONORMÉS - TRADUCTION DES CONDITIONS FRONTIÈRES ET ENONCÉ DES PROBLÈMES - [2, 12]

Un repère au dessus du point  $x \in M$  est un isomorphisme d'espace vectoriel euclidien de  $E = \mathbb{R}^n$  sur  $T_x(M)$ .

L'ensemble des repères orthonormés au dessus des points de la variété  $M$  noté  $O(M)$  est un fibré au dessus de  $M$  sur lequel agit le groupe orthogonal  $O(n)$  par l'opération suivante.

$$(g, r) \rightarrow g.r = \text{rog de } O(n) \times O(M) \text{ dans } O(M).$$

Soit  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$  une base orthonormale de  $E = \mathbb{R}^n$ . A une forme  $\pi$  de degré

$p$  sur  $M$  correspond la valeur de la forme  $\pi$  lue dans le repère  $r$ .

$$f_{\pi}(r) = \pi_{p(r)}(r(e_{i_1}) \wedge \dots \wedge r(e_{i_p})) \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n)$$

$f_{\pi}$  est une application de  $O(M)$  dans  $\bigwedge^p E$ .

### DEFINITION 1.II [12]

Une application  $f$  définie sur  $O(M)$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  est équivariante

si  $\forall g \in O(n)$ , on a  $f(g.r) = g(f(r))$

### THEOREME 1.II [12]

Les applications de  $O(M)$  dans  $E = \mathbb{R}^n$  qui correspondent à des formes différentielles de degré 1, sont les fonctions de  $O(M)$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui sont équivariantes.

Ces résultats se généralisent immédiatement aux formes de degré  $p$ .

A l'opérateur de De Rham - Hodge  $\square$  est associé un opérateur elliptique dégénéré

$\Lambda$  sur  $O(M)$ . [12]  $\square \pi = 0$  si et seulement si  $\Lambda f_\pi(r) = f_\theta(r)$ .

On note  $F_{p,r}$  le sous espace de  $\bigwedge^p E$  engendré par les vecteurs

$$r^{-1}(n_x) \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{p-1}} \quad (i_1 < \dots < i_{p-1})$$

Pour un repère  $r$  au dessus du point  $x$ , on désigne par  $P(r)$  la projection orthogonale dans  $\bigwedge^p E$  sur le sous-espace  $F_{p,r}$ , et on note  $Q(r) = I - P(r)$ .

$df_\pi(r) (\text{rel } n)$  désigne la dérivée de l'application  $f_\pi$  suivant le relèvement horizontal du vecteur  $\vec{n}$ .

Pour une forme différentielle  $\pi$ , les conditions frontières ( $\pi_n = 0$  et  $(d\pi)_n = 0$ )

se traduisent [2] sur la fonction  $f_\pi$  par les conditions

$[P(r) f_\pi(r) = 0$  et  $Q(r) df_\pi(r) (\text{rel } n) = 0$  pour les repères  $r$  au dessus des points du bord de  $M$ ].

On notera  $bO(M)$  l'ensemble des repères  $r$  au dessus des points du bord de  $M$ .

Le problème de Spencer mentionné au § I, se ramène donc au problème  $(F_q)$  suivant sur les fibré des repères. Etant donné une fonction  $\varphi(r)$  définie sur  $bO(M)$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^q$ , déterminer une fonction  $f$  définie sur  $O(M)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^q$  telle que

a)  $\Lambda f(r) = 0$  pour tout repère  $r$  au dessus des points à l'intérieur de  $M$ .

b)  $P(r)f(r) - Q(r)df(r) (\text{rel } n) = \varphi(r)$  pour les repères  $r$  au dessus de  $bM$ .

Trouver une représentation intégrale pour les solutions lorsqu'elles existent.

$Q(r)$  est dégénérée ;  $P(r)$  et  $Q(r)$  sont deux projecteurs orthogonaux tels que  $I = P(r) + Q(r)$ .

Dans le cas du problème concernant les formes de degré 1,  $P$  et  $Q$  vérifient

$$P(\text{rog}) = g^{-1} \circ P(r) \circ g \quad \text{et} \quad g^{-1} \circ Q(r) \circ g = Q(\text{rog}) \quad \text{pour tout } g \in O(n)$$

En effet, si  $P(r)$  est la projection sur  $r^{-1}(n_x)$ , on a

$$P(\text{rog}) = \text{proj. sur } g^{-1}(r^{-1}(n_x)) = g^{-1} \circ \text{proj. sur } r^{-1}(n_x) \circ g$$

On cherche les solutions du problème  $(F_q)$  qui sont équivariantes.

### III. - PROCESSUS RÉFLÉCHIS SUR $M$ ET SUR $O(M)$

#### 1 - La symétrie par rapport au bord - applications induites

On note  $V$  la variété doublée de  $M$  [14,15,16] et  $\nu$  la "symétrie" par rapport au bord ; on suppose que  $\nu \circ \nu$  est l'application identique.

LEMME 1. III

Soit  $f$  une fonction définie sur  $V$ , et différentiable

a) si  $f(x) = f(\nu x)$  alors  $\frac{\partial f}{\partial n}(x) = 0$  au bord.

b) si  $f(x) = -f(\nu x)$  alors  $f(x) = 0$  au bord.

La démonstration est immédiate ; pour a), on remarque que

$$df(\nu x) (\vec{n}) = df(x) \cdot d\nu(x) (\vec{n}) = -df(x) (\vec{n})$$

Dans les notations qui suivent, on considérera généralement des formes de degré 1 ; les formules s'étendant facilement au cas des formes de degré  $p$ .

La symétrie  $\nu$  induit une application  $\hat{\nu} : \beta \rightarrow \hat{\beta}$  définie sur les formes de degré 1 par

$$(1) \quad \langle \hat{\beta}(x), h \rangle = \langle \beta(\nu x), d\nu(x) \cdot h \rangle$$

[  $\beta$  étant la forme différentielle et  $h$  un vecteur de  $T_x(V)$  ]

A l'application  $\hat{\nu}$  définie sur les formes, correspond l'application  $\nu^*$  qui agit sur les fonctions de la manière suivante

$$(2) \quad (\nu^* f)(r) = f(d\nu(p(r)) \text{ or}) = f(\nu r)$$

où on pose  $\nu(r) = d\nu(p(r)) \text{ or}$

LEMME 2. III

Si une forme  $\beta$  sur  $V$  vérifie  $\hat{\beta} = \beta$  ; on a  $\beta_n = 0$  et  $(d\beta)_n = 0$  au bord de  $M$ .

Démonstration :

Si  $x \in bM$ , on a  $\nu x = x$  et d'après (1), on a

$$\langle \hat{\beta}(x), n_x \rangle = \langle \beta(x), d\nu(x) n_x \rangle = - \langle \beta(x), n_x \rangle$$

donc  $\beta = \hat{\beta}$  entraîne  $\beta_n = 0$

Soit  $\beta = \beta_1 dx_1 + \dots + \beta_n dx_n$  une décomposition de  $\beta$  dans une carte au voisinage

du bord telle que  $dx_n$  corresponde à la normale au bord

$$(d\beta)_n = \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial x_n} - \frac{\partial \beta_n}{\partial x_1} \right) dx_n \wedge dx_1 + \dots + \left( \frac{\partial \beta_{n-1}}{\partial x_n} - \frac{\partial \beta_n}{\partial x_{n-1}} \right) dx_n \wedge dx_{n-1}$$

La relation  $\beta = \hat{\beta}$  entraîne  $\beta_i(x) = \hat{\beta}_i(vx)$ , donc  $\frac{\partial \beta_i}{\partial x_n} = 0$  pour  $i = 1, \dots, n-1$

Comme  $\beta_n = 0$  au bord, on a  $\frac{\partial \beta_n}{\partial x_i} = 0$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ , donc  $d\beta_n = 0$  au bord

### LEMME 3.III

Si une forme  $\beta$  sur  $V$  vérifie  $\hat{\beta} = -\beta$ , on a  $\beta_t = 0$  et  $(\varepsilon\beta)_t = 0$  au bord de  $M$

Démonstration: - Pour l'opération  $*$ , voir [19]

$$\text{Si } \hat{\beta} = -\beta \text{ alors } \widehat{* \beta} = * \beta$$

En effet

$$\begin{aligned} \langle \widehat{* \beta}(x), h \rangle &= \langle (*\beta)(vx), \wedge^{n-1} dv(x).h \rangle \\ &= \varepsilon \langle \beta(vx), * \wedge^{n-1} dv(x).h \rangle \end{aligned}$$

$$\text{où } \varepsilon = \pm 1; \text{ or } * \wedge^{n-1} dv(x).h = -dv(x)(*h)$$

$$\text{donc } \langle \beta(vx), * \wedge^{n-1} dv(x).h \rangle = - \langle \beta(vx), dv(x)(*h) \rangle$$

$$= \langle \beta(x), *h \rangle \text{ car } \hat{\beta} = -\beta$$

$$\text{or } \langle \beta(x), *h \rangle = \varepsilon \langle *\beta(x), h \rangle$$

$$\text{donc } \widehat{* \beta} = * \beta$$

On utilise alors les résultats du lemme 2.

### LEMME 2 bis - III

Soit  $f$  une fonction définie sur le fibré des repères  $O(V)$  qui est équivariante et à valeurs dans  $\wedge^p E$

Si  $f$  vérifie  $*f = f$ , on a  $f(r)$  est orthogonal à  $F_{p,r}$  et  $df(r)(rel \cdot)$  appartient à  $F_{p,r}$  pour les repères  $r$  au dessus du bord de  $M$ ;

C'est à dire, on a  $P(r)f(r) - Q(r)df(r)(rel \cdot) = 0$ .

Démonstration : (cas d'une 1<sup>re</sup> forme)

Au bord  $v(r) = g.r$  où  $g$  est la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans la base } (r^{-1}(n_x), e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-1}})$$

Avec l'équivariance, on a  $f(vr) = g.f(r)$

et  $g.f(r) = f(r)$  entraîne  $f(r)$  est orthogonal au sous-espace  $F_{1,r}$  engendré par  $r^{-1}(n_x)$

$$\text{alors } d(v^*f)(r) = df(vr) dv(r)$$

$$\text{comme } dv(r)(\text{rel } n_x) = -\text{rel } n_x, \text{ on a}$$

$$-df(vr)(\text{rel } n_x) = df(r)(\text{rel } n_x)$$

$$\text{donc } (I + g) df(r) (\text{rel } n_x) = 0$$

$$\text{et } df(r)(\text{rel } n_x) \in F_{1,r}$$

## 2 - Le processus réfléchi sur la variété M

Le processus  $X_S^+$  sur la variété  $M$  est construit en doublant la variété  $M$  [14,15], puis en prenant le processus  $X_S$  de diffusion sur "la variété doublée" et en faisant une réflexion de  $X_S$  sur le bord, quand  $X_S$  touche le bord.

Le semi-groupe du processus réfléchi  $X_S^+$  s'obtient de la façon suivante : Etant donné une fonction  $f$ , continue sur  $M$ , on prolonge sur  $V$  en posant  $f(vx) = f(x)$  si  $x \in M$  ;

On désigne par  $f_1$  le prolongement de  $f$  et on définit le semi-groupe sur  $V$  par

$$P_t^+ f_1(x_0) = \frac{1}{2} [ P_t f_1(x_0) + P_t f_1(vx_0) ]$$

On notera  $P_t^+ f$  sa restriction à  $M$

$$P_t^+ f_1 \text{ vérifie } P_t^+ f_1(x_0) = P_t^+ f_1(vx_0) \text{ donc } \frac{\partial P_t^+}{\partial n} f(x_0) = 0$$

si  $x_0$  appartient au bord de  $M$ .

## LEMME 4.III

Le temps de vie de  $X_s^+$  est infini

Démonstration :

Soit  $\xi(\omega)$  le temps de vie de  $X_s^+$

$$P_x(t < \xi(\omega)) = p^+(t, x, M) = \frac{1}{2} [p(t, x, V) + p(t, vx, V)] = 1$$

3 - Les semi-groupes de Spencer [16] opérant sur les formes.

Soit  $T_t$  le semi-groupe opérant sur les formes définies sur  $V$  et correspondant à l'opérateur  $\square$  de Hodge.

a) Si  $\beta$  est une forme sur  $M$ , on la prolonge sur  $V$  en posant

$$\langle \hat{\beta}(x), h \rangle = \langle \beta(vx), dv(x).h \rangle$$

On note  $\beta_1$  le prolongement ;  $\beta_1$  vérifie  $\hat{\beta}_1 = \beta_1$

On définit

$$\mathcal{L}_t^+ \beta_1(h) = \frac{1}{2} [T_t^+ \beta_1 + \widehat{T_t^+ \beta_1}]$$

et  $T_t^+ \beta$  est défini comme la restriction à  $M$  de  $\mathcal{L}_t^+ \beta_1$

Le semi-groupe  $T_t^+$  correspond aux opérateurs  $M_s^+$  de [16, p. 12]

b) De la même façon, le semi-groupe correspondant aux opérateurs  $M_s^-$  de [16, p. 12] est obtenu comme suit :

on prolonge sur  $V$  une forme  $\beta$  définie sur  $M$ , en posant

$$\langle \beta_2(x), h \rangle = - \langle \beta(vx), dv(x).h \rangle$$

et  $T_t^- \beta$  est la restriction à  $M$  de  $\frac{1}{2} [T_t^- \beta_2 - \widehat{T_t^- \beta_2}]$

## LEMME 5.III

Les semi-groupes  $T_t^+$  et  $T_t^-$  sont reliés par  $*T_t^+ = T_t^- *$

Démonstration:

$$*T_t^+ \beta = \frac{1}{2} [*T_t^+ \beta_1 + \widehat{*T_t^+ \beta_1}]$$

or

$$\begin{aligned} \langle \widehat{*T_t \beta_1}(x), h \rangle &= \epsilon \langle T_t \beta_1(x), *h \rangle \quad \text{où } \epsilon = \frac{+}{-} \\ &= \epsilon \langle T_t \beta_1(vx), dv(x)(*h) \rangle \end{aligned}$$

comme

$$dv(x)(*h) = *dv(x).h$$

$$\begin{aligned} \langle \widehat{*T_t \beta_1}(x), h \rangle &= - \langle *T_t \beta_1(vx), dv(x)h \rangle \\ &= - \langle \widehat{*T_t \beta_1}(x), h \rangle \end{aligned}$$

$$\langle *T_t^+ \beta_1(x), h \rangle = \frac{1}{2} [ \langle *T_t \beta_1(x), h \rangle - \langle \widehat{*T_t \beta_1}(x), h \rangle ]$$

or

$$*T_t = T_t^*$$

et

$$*(\beta_1) = (*\beta)_2 \quad \text{d'où le résultat.}$$

Remarque : Les semi-groupes  $T_t^+$  et  $T_t^-$  ne sont pas "conservatifs", c'est à dire si on leur associe un processus, il y a un "killing" de ce processus sur le bord de M.

En effet si h est un vecteur normal au bord dans l'espace tangent à M en un point

du bord bM,  $\mathcal{L}_t^+ \beta_1(h) = 0$

et si h est un vecteur dans l'espace tangent au bord bM

$$\mathcal{L}_t^- \beta_2(h) = 0$$

On étudiera ce Killing au (§ V, n° 3).

#### 4 - Les semi-groupes réfléchis sur O(M)

On note  $P_t$  le semi-groupe sur  $O(V)$  défini par le générateur infinitésimal  $\Lambda$  correspondant à l'opérateur de De Rham Hodge sur V. [12]. On a  $P_t f_\pi = f_{T_t \pi}$ .

On va définir les deux semi-groupes  $P_t^+$  et  $P_t^-$  sur  $O(M)$  qui correspondent aux semi-groupes du § 3 par les relations

$$f_{T_t^+ \pi} = P_t^+ f_\pi \quad \text{et} \quad f_{T_t^- \pi} = P_t^- f_\pi$$

Soit f une fonction équivariante définie sur  $O(M)$  et à valeurs dans  $E = \mathbb{R}^n$ .

1) On la prolonge en une fonction définie sur  $O(V)$  et à valeurs dans  $E$ , en posant

$$f_1(r) = f(dv(p(r))or) \quad \text{si } r \in O(V-M)$$

On note  $f_1$  le prolongement ;  $f_1$  vérifie  $v^* f_1 = f_1$

On définit le semi-groupe  $\rho_t^+$  sur  $O(V)$  par

$$\rho_t^+ f(r) = \frac{1}{2} [P_t f_1(r) + P_t f_1(vr)] \text{ et}$$

on prend sa restriction à  $O(M)$  notée  $P_t^+$

Remarquons que quand on prolonge  $P_t^+ f$  par la méthode (1) ci dessus, on a

$$(P_t^+ f)_1 = \rho_t^+ f.$$

$\rho_t^+ f$  satisfait les conditions du lemme 2 bis et la forme différentielle qui lui correspond satisfait les conditions du lemme 2

[On "réfléchit" les composantes tangentiellles et on "absorbe" les composantes normales]

2) On prolonge  $f$  en une fonction sur  $O(V)$  à valeurs dans  $E$ , en posant

$$f_2(r) = - f(dv(p(r))or) = - f(vr). \quad \text{Le prolongement } f_2 \text{ vérifie } f_2(vr) = - f_2(r).$$

On définit le semi-groupe  $\rho_t^-$  sur  $O(V)$  par  $\rho_t^- f(r) = \frac{1}{2} [P_t f_2(r) - P_t f_2(vr)]$  et on

prend sa restriction sur  $O(M)$  notée  $P_t^-$ . Si on prolonge  $P_t^- f$  par la méthode (2)

ci-dessus, on a

$$(P_t^- f)_2 = \rho_t^- f$$

[On "réfléchit" les composantes normales et on "absorbe" les composantes tangentiellles]

#### IV. - TEMPS LOCAL

##### 1 - Le temps local au bord de $M$ [6,8,15]

C'est la limite de la moyenne du temps de séjour du processus  $X_s$  dans une bande de largeur  $\rho$  autour du bord quand  $\rho$  tend vers zéro.

Sous forme précise, si on pose

$$D_\rho = \{x \in M \mid \text{distance}(x, bM) < \rho\}$$

alors

$$\tau(t) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_0^t 1|_{D_\rho}(X_s^+) ds$$

$\tau(t)$  est une fonctionnelle de Markov croissante qui croît seulement quand le processus  $X_s^+$  touche le bord et  $d\tau$  est une mesure qui a pour support un parfait de dimension de Hausdorff  $1/2$  [9,p.50 et 17]

On pose

$$\tau^{-1}(t) = \sup \{s \mid \tau(s) \leq t\}$$

et on considère le processus  $Y_u = X_{\tau^{-1}(u)}^+$

Alors  $Y_u$  est un processus qui vit sur le bord et son générateur infinitésimal est obtenu de la façon suivante [15 ; 8 ]

On se donne une fonction  $\varphi$  sur  $bM$  ; on note  $H\varphi$  la fonction dans  $M$  qui est harmonique à l'intérieur de  $M$  et qui coïncide avec  $\varphi$  au bord de  $M$ . On pose  $A\varphi = \frac{\partial}{\partial n} H\varphi$ . Alors  $A$  est le générateur infinitésimal de  $Y_u$ .

V. - CAS PLAT - SOLUTION DU PROBLEME DE SPENCER - LE SEMI-GROUPE 'ASSOCIÉ' - THEOREME D'ANNULATION - LA FONCTIONNELLE  $\mathcal{A}(s)$

Dans § III, on a déterminé le semi-groupe  $P_t^+$  [16] qui satisfait  $\Delta P_t^+ f = \frac{\partial}{\partial t} P_t^+ f$  dans  $M$

et au bord  $P(r)P_t^+ f(r) - Q(r)d(P_t^+ f)(r)(rel n) = 0$

On va donner une autre expression de ce semi-groupe en construisant le processus associé.

Pour cela, on cherche à déterminer une forme  $\pi$  telle que  $\square \pi = 0$  dans  $M$  et

$\pi_n = \theta_n$  ;  $(d\pi)_n = (d\theta)_n$  au bord de  $M$ .

c'est à dire

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta f_{\pi}(r) = 0 \text{ dans } M \\ \text{et } P(r)f_{\pi}(r) - Q(r)df_{\pi}(r)(rel n) = \psi(r) \\ \hspace{15em} \text{au bord de } M \end{cases}$$

1. - Cas d'une variété plate - Solution du problème (1)

Soit  $r_0(x)$  un repère donné. Tout repère  $r(x)$  s'écrit  $r(x) = g(x)r_0(x)$  où  $g(x) \in O(n)$ .

Si  $f$  est une fonction équivariante définie sur  $O(M)$ ,  $f(r) = g(x)^{-1}f(x)$  où on a posé  $f(x) = f(r_0)$

Si  $r(x)$  est le repère  $(f_1(x), \dots, f_n(x))$  et  $r_0(x)$  est le repère  $(e_1(x), \dots, e_n(x))$ , les formules de changement de repère sont les suivantes :

$$\begin{aligned} f(r) &= \pi_1(x)f_1(x) + \dots + \pi_n(x)f_n(x) \\ &= \sum_{i,j} g_{ij}(x) \pi_i(x)e_j(x) = \sum_j \varphi_j(x)e_j(x) \end{aligned}$$

Si  $\pi_n(x) = 0$ , on a  $df_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \pi_i}{\partial n}(x) f_i(x)$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ j=1, \dots, n}}^{n-1} g_{ij} \frac{\partial \pi_i}{\partial n} e_j$$

et  $\pi_i = g_{ij}^{-1} \varphi_j$

Choisissons un repère  $r_0(x)$  tel que  $\Delta_{O(M)} f(r) = 0$  si et seulement

si  $f(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  où  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  sont des applications de  $M$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant  $\Delta \varphi_i = 0$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

Soit  $P$  la matrice de projection sur le  $n$ -ième vecteur  $\vec{e}_n$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $Q = I - P$ .

Pour un repère  $r$  tel que  $r^{-1}(n_x) = \vec{e}_n$ , on a  $P(r) = P$  et  $Q(r) = I - P$ .

Dans un tel repère, les conditions frontières sont

$$P(r)f(r) - Q(r) df(r)(rel n) = \psi(r)$$

c'est à dire

$$(\alpha) \quad P \cdot g(x)^{-1}f(x) - Q \frac{\partial}{\partial n} g(x)^{-1}f(x) = g(x)^{-1} \psi(x)$$

En multipliant par  $g(x)$  et en posant  $P(r_0) = P(x)$ , on a

$$(\beta) \quad P(x)f(x) - Q(x)g(x) \frac{\partial}{\partial n} [g(x)^{-1}f(x)] = \psi(x)$$

c'est à dire  $P(r_0)f(r_0) - Q(r_0)df(r_0)(\text{rel } n) = \psi(r_0)$

On peut supposer que  $\frac{\partial}{\partial n} g(x)^{-1} = 0$ , il suffit de prendre un prolongement convenable

"à l'intérieur" de  $g(x)^{-1}$  et les conditions  $(\beta)$  deviennent

$$(\gamma) \quad P(x)f(x) - Q(x) \frac{\partial}{\partial n} f(x) = \psi(x)$$

On a ramené le problème (1) à celui étudié dans [2] [Théorème 4-4]

On remonte l'expression [36 - Théorème 4-4 [1]]

$$f(x) = E_x \left[ \int_0^{+\infty} \mathcal{A}(s) \psi(X_s^+) \tau(ds) \right] - E_x \left[ \int_0^{+\infty} d\mathcal{A}(s) \psi(X_s^+) \right]$$

En posant

$\psi(r) = P(r) f_\theta(r) - Q(r)df_\theta(r)(\text{rel } n)$  et en utilisant les relations [2]

$$\mathcal{A}(s)P(r_s^+) = 0 \quad \text{et} \quad d\mathcal{A}(s)Q(r_s^+) = 0$$

On obtient

$$(\delta) \quad -f(r) = E_r \left[ \int_0^{+\infty} \mathcal{A}(s)df_\theta(r_s^+)(\text{rel } n)\tau(ds) \right] + E_r \left[ \int_0^{+\infty} d\mathcal{A}(s)f_\theta(r_s^+) \right]$$

( $\delta$ ) donne la solution du problème (1)

[Théorème 5.5 - [1]]

### Remarques

1) Comme  $\mathcal{A}(0) = \text{id}$  et  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(s)h = 0$ , on obtient la formule ( $\delta$ ) "en gros" en

intégrant la différentielle stochastique  $d(\mathcal{A}(s)f_\theta(r_s^+))$

En effet

$$- f_{\theta}(r) = E_r \left[ \int_0^{+\infty} d(\mathcal{A}(s)f_{\theta}(r_s^+)) \right]$$

2) On obtient en utilisant  $\mathcal{A}(s)$  des théorèmes d'annulation faisant intervenir la courbure du bord.

Des théorèmes de ce type sont obtenus dans [18], par exemple proposition 3.2.p.133 (ii), par des méthodes différentes.

THÉOREME (d'annulation) 1 - V

Dans le cas plat, pour un domaine borné, il n'y a pas de formes harmoniques "tangentiellles" [18] autres que zéro, c'est à dire  $\square \pi = 0$  et  $\tau_n = (d\pi)_n = 0$  entraînent  $\pi = 0$ .

Démonstration:

cela résulte immédiatement de  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(s)h = 0$  et de la formule (6)

Pour un domaine borné tel que le 2ème tenseur fondamental du bord par rapport à la normale au bord définit une forme définie négative en tout point [18 p. 90], on peut déduire le théorème 1-V de la proposition 3.2 p. 133 (ii) de [18]

- Remarque sur le processus associé aux conditions frontières

$\frac{\partial f}{\partial n}(x) + R(x)f(x) = \psi(x)$  où  $R(x)$  est antisymétrique

La solution de

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta f = 0 \text{ dans } M \\ \text{et } \frac{\partial f}{\partial n}(x) + R(x)f(x) = \psi(x) \text{ au bord} \\ f(x) = f(r_0(x)) \end{cases}$$

est [15,2]

$$f(x) = E_x \left[ \int_0^{+\infty} \exp(* \int_0^s R(X_u^+) \tau(du)) \cdot \psi(X_s^+) \tau(ds) \right]$$

où  $Z_s = \exp(* \int_0^s R(X_u^+) \tau(du))$  est solution de l'équation différentielle matricielle.

$$dZ_s = Z_s R(X_s^+) \tau(ds) \text{ et } Z_0 = \text{id}$$

$R(X_s^+)$  est antisymétrique ( $R + R^* = 0$ ) entraîne que  $Z_s Z_s^* = \text{id}$

en effet

$$Z_s d Z_s^* + d Z_s Z_s^* = (Z_s R^*(X_s^+) Z_s^* + Z_s R(X_s^+) Z_s^*) \tau(ds) = 0$$

donc  $Z_s$  est une matrice orthogonale ; si  $\psi(X_s^+) = \psi(r_o(X_s^+))$

alors,  $Z_s \cdot \psi(r_o(X_s^+)) = \psi(Z_s^{-1} \cdot r_{o,s}) = \psi(r_s^+)$  où on a posé  $r_s^+ = r_o(X_s^+) \circ Z_s^{-1}$

La solution de (2) est alors

$$f(r) = E_r \left[ \int_0^{+\infty} \psi(r_s^+) \tau(ds) \right]$$

et la projection  $p(r_s^+) = X_s^+$ .

## 2. - Cas d'une variété plate - Le semi-groupe associé aux conditions frontières

$$p(r) f(r) - Q(r) df(r)(rel n) = 0$$

THEOREME 2.V

$$P_t^+ f(r) = E_r \left[ \mathcal{A}(r_t^+) f(r_t^+) \right] \quad \text{où} \quad r_s^+ = (X_s^+, g)$$

si  $r = (x, g)$

Démonstration :

Comme  $\mathcal{A}(r_t^+)$  ne varie que sur le bord, pour un point  $x$  à l'intérieur de  $M$  et  $r$  un repère au dessus de  $x$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_r \left[ \mathcal{A}(r_t^+) f(r_t^+) \right] - f(r)}{t} = \Lambda f(r)$$

il suffit de vérifier (1)  $P(r) P_t^+ f(r) = 0$  et

$$(2) \quad Q(r) d(P_t^+ f)(r)(rel n) = 0$$

$$(1) \text{ résulte de } \mathcal{A}(X_s^+) \circ P(X_s^+) = 0$$

Pour (2), on utilise le lemme 2 bis III, n° 1,

$$E_{dv(p(r))} \left[ \mathcal{A}(r_t^+) f(r_t^+) \right] = P_t^+ f(r).$$



valles contigus disjoints  $R(\omega)^c = \bigcup_k J_k$

D'après [9,17],  $R(\omega)$  est de dimension de Hausdorff 1/2 et pour presque toute trajectoire  $\omega$  dans  $\Omega$ , la mesure 1/2-dimensionnelle de Hausdorff de  $R(\omega)$  est nulle :

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} R(\omega) = 0 \quad dP(\omega) \text{ p.s}$$

Pour toute suite  $(\delta_p)$  qui tend vers 0, il existe un recouvrement fini de  $R(\omega) \cap [0,s]$  par des ensembles de longueur inférieure à  $\delta_p$

$$R(\omega) \cap [0,s] = \bigcup_n A_n^\delta$$

et tels que  $\lim_{\delta_p \rightarrow 0} \sum |A_n^\delta|^{\frac{1}{2}} = 0$

On peut supposer les ensembles du recouvrement  $B_{\delta_p} = \bigcup_n A_n^\delta$  contigus et les recouvrements  $B_{\delta_p}$  emboîtés

En effet  $B_{\delta_p}$  étant construit, on construit  $B_{\delta_{p+1}}$  en prenant des recouvrements de  $A_n^\delta$  pour tout n.

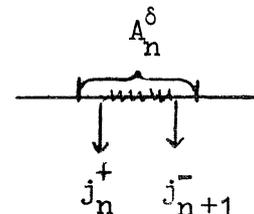
On appellera une telle famille de recouvrements  $B_{\delta_p}$ , une famille adaptée à la suite  $(\delta_p)$ .

Soit T le premier temps de sortie du processus  $X_s^+$  de la variété M

Pour un recouvrement  $B_\delta$ , on pose

$$j_n^+ = \inf \{ \text{supp } d\tau \cap A_n^\delta \}$$

$$j_{n+1}^- = \sup \{ \text{supp } d\tau \cap A_n^\delta \}$$



alors  $(j_n^-, j_n^+)$  est un des contigus constituant la réunion  $\bigcup_n J_n = R(\omega)^c$  soit

$E[\delta,s]$  l'ensemble des intervalles  $J_n$  associés au recouvrement  $B_\delta(\omega)$  comme ci dessus et tels que  $J_n \subset [T,s]$ .

On ordonne les ensembles  $J_n$  qui appartiennent à  $E[\delta,s]$  en ordre croissant et on forme le produit fini

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\delta &= Q(X_T) Q(X_{j_1^+}) \dots Q(X_{j_r^+})(\omega) \\ &= Q(X_T) \prod_{J \in E(\delta, s)(\omega)} Q(X_{j^+}) \quad \text{où } j^+ = \sup J \end{aligned}$$

LEMME 1 . V.

Soit  $\delta_p$  une suite qui tend vers zéro et  $(B_{\delta_p})$  une famille de recouvrements adaptés à  $(\delta_p)$  alors  $\|\mathcal{A}_{\delta_p}(s)\|$  décroit quand  $\delta_p$  tend vers zéro

Démonstration :

$$\|Q_1 Q_2 \dots Q_n\| \cong \|Q_1 Q' Q_2 \dots Q_n\|$$

Lorsque  $Q_1, Q', \dots, Q_n$  sont des projecteurs.

Remarque

on pose  $\tilde{Q}_j = Q(X_{j^-}) Q(X_{j^+})$

et on considère le produit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_\delta &= Q(X_T) \tilde{Q}_{j_1} \dots \tilde{Q}_{j_r} \quad \text{où } (j_i^-, j_i^+) \in E[\delta, s] \\ &= Q(X_T) \prod_{J \in E(\delta, s)} \tilde{Q}_j \end{aligned}$$

Si  $\lim_{\delta_p \rightarrow 0} \mathcal{A}_{\delta_p}$  existe, alors  $\lim_{\delta_p \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{A}}_{\delta_p}$  existe et la limite est la même. En effet, si on

fixe  $j^-$ , il existe une suite  $j_m^+$  qui tend en croissant vers  $j^-$  et  $Q(X_{j_m^+})$  tend

vers  $Q(X_{j^-})$

Ainsi

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} Q(X_{j_m^+}) Q(X_{j^-}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} Q(X_{j_m^+})$$

THÉOREME 3 - V.

Pour toute suite  $(\delta_p)$  qui tend vers zéro et tout recouvrement  $B_{\delta_p}$  adapté, on

approche la solution du système (T') par  $\lim_{\delta_p \rightarrow 0} \mathcal{A}_{\delta_p}(s)$ .

Démonstration :

Soit  $\delta$  et l'ensemble des contigus  $J$  de  $E[\delta, s]$   
on les ordonne :

Si  $s$  est tel que  $s = r(s)$  le système (T) s'écrit

$$\begin{cases} Y_1(s) = 0 \\ Y_2(s) - Y_2(0) = \int_0^s Y_u O_u^{-1} dO_u \cdot Q = \int_0^s Z_u dO_u \cdot Q \end{cases}$$

avec  $Y_u O_u^{-1} = Z_u$

On a :

$$\begin{aligned} Y_2(s) - Y_2(0) &= \int_0^T Z_u dO_u \cdot Q + \int_T^s Z_u dO_u \cdot Q \\ &= Z_T (O_T - O_0) Q + \int_T^s Z_u dO_u \cdot Q \end{aligned}$$

or

$$Y_2(0) = Z_T O_0 Q$$

$$Y_2(s) = Z_T O_T Q + \int_T^s Z_u dO_u \cdot Q$$

comme

$$s = r(s) ; Z_s = Y_2(s) \cdot O_s^{-1}$$

donc

$$\begin{aligned} Z_s &= Z_T O_T Q + \left( \int_T^s Z_u dO_u \cdot Q \right) O_s^{-1} \\ &+ Z_T O_T Q (O_s^{-1} - O_T^{-1}) \end{aligned}$$

Si

$$j_{k-1}^+ < s \leq j_k^-$$

$$Y_2(s) = Y_2(j_{k-1}^+) + \int_{j_{k-1}^+}^s Z_u dO_u \cdot Q$$

posons :

$$h(j_{k-1}^+, s) = \left( \int_{j_{k-1}^+}^s Z_u dO_u \cdot Q \right) O_s^{-1} + Z_{j_{k-1}^+} O_{j_{k-1}^+} Q (O_s^{-1} - O_{j_{k-1}^+}^{-1})$$

Alors

$$(4) \quad Z_s = Z_{j_{k-1}^+} Q_{j_{k-1}^+} h(j_{k-1}^+, s)$$

or

$$Z_{j_{k-1}^+} = Z_{j_{k-1}^-}$$

En remplaçant  $Z_{j_{k-1}^-}$  par sa valeur dans (4), on obtient

$$Z_s = Z_T Q_T Q_j + \dots Q_{j_{k-1}^+} + h(T, j_1^-) Q_{j_1^+} \dots Q_{j_{k-1}^+} + \dots$$

$$+ h(j_1^+, j_2^-) Q_{j_2^+} \dots Q_{j_{k-1}^+} + \dots + h(j_{k-1}^+, s)$$

Donc

$$E [ | \mathcal{Z}(s) - \mathcal{Z}_\delta(s) | ] \leq E [ \sum_{j_p^-} (\omega) \leq s | h(j_p^+, j_{p+1}^-) | ]$$

Or

$$E [ | h(s, t) | ] \leq E [ | h(s, t) |^2 ]^{\frac{1}{2}} \leq C (t-s)^{\frac{1}{2}}$$

pour tout  $s$  et tout  $t$ , où  $C$  est constante, d'après l'inégalité de Cameron-Martin.

et

$$R_\delta = \sum_{j_p^-(\omega) \leq s} (j_{p+1}^- - j_p^+) \frac{1}{\delta} \rightarrow 0$$

quand  $\delta \rightarrow 0$

d'après [17]

LEMME 2 - V.

Le processus  $\mathcal{Z}(s)$  n'est pas à variation bornée

Démonstration :

Pour tout  $\omega$ , et  $\delta$ , considérons la mesure  $d\mathcal{Z}_\delta(s) : d\mathcal{Z}_\delta(s)$  est une somme finie de mesures de Dirac

En effet

$$\mathcal{Z}_\delta(s) = Q(X_T) Q(X_{j_1^+}) \dots Q(X_{j_2^+})$$

si

$$j_2^+ < s \leq j_{2+1}^+$$

et

$$\delta = (j_1^+, \dots, j_k^+, \dots)$$

donc

$$\int \varphi(s) d\mathcal{Z}_\delta(s) = \sum_{k=1}^p \varphi(j_{k-1}^+) [ \mathcal{Z}_\delta(j_k^+) - \mathcal{Z}_\delta(j_{k-1}^+) ]$$

$$\int \varphi(s) d\mathcal{A}_\delta(s) = \sum_k \varphi(j_{k-1}^+) \mathcal{A}_\delta(j_{k-1}^+) P(j_k^+).$$

$$= \sum_k \varphi(j_{k-1}^+) \mathcal{A}_\delta(j_{k-1}^+) [ Q(j_{k-1}^+) - Q(j_k^+) ]$$

Montrons que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  et une fonction  $\varphi(s)$  tel que  $\| \int \varphi(s) d\mathcal{A}_\delta(s) \| \cong \epsilon$ .

on pose  $Q_\delta(s) = Q(j_k^+)$  si  $j_{k-1}^+ < s \leq j_k^+$

il suffit de trouver  $\psi$  tel que  $\| \int \psi(s) dQ_\delta(s) \| > \epsilon$  puis on prendra  $\varphi(s) = \psi(s)$

Soit  $\varphi$  tel que

$$\| \int \varphi(s) dQ_\delta(s) \| = \sum_k \| Q_\delta(j_k^+) - Q_\delta(j_{k-1}^+) \|$$

or  $E ( \| Q_\delta(j_k^+) - Q_\delta(j_{k-1}^+) \|^2 ) \sim CE [ (j_k^+ - j_{k-1}^+) ]$

$$| j_k^- - j_{k-1}^+ |^{\frac{1}{2}} \cong | j_k^+ - j_{k-1}^+ |^{\frac{1}{2}} \cong | j_k^+ - j_k^- |^{\frac{1}{2}} + | j_k^- - j_{k-1}^+ |^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_k | j_k^+ - j_k^- |^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

mais  $\sum_k | j_k^- - j_{k-1}^+ |^{\frac{1}{2}} \rightarrow + \infty$ .

les sauts du processus suivent une loi de Poisson,  $\int \frac{du}{u^2}$  diverge [11, p. 90]

Donc la suite des mesures  $d\mathcal{A}_\delta$  n'est pas vaguement bornée. On en conclut que  $d\mathcal{A}$  n'est

pas une mesure. L'expression (35') de la différentielle stochastique de  $\mathcal{A}$  où le brownien intervient justifie le Lemme 2 - V.

Détermination de  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}_\epsilon(s)$  dans les cas particuliers du  $\frac{1}{2}$ -plan et d'un polygone.

cas du  $\frac{1}{2}$ -plan

Soit  $T$  le premier temps de sortie du  $\frac{1}{2}$ -plan

si  $s < T$ , on pose  $\mathcal{A}(s) = I$

si  $s \geq T$ , on pose  $\mathcal{A}(s) = Q(r_T)$

le problème  $\Delta \phi = 0$  avec les données au bord  $n\phi$  et  $nd\phi$  se traduit de la façon suivante :

trouver  $n$  fonctions harmoniques  $P_1, P_2, \dots, P_n$  telle que pour  $P_n$  correspondant à la composante normale, on ait un problème de Dirichlet au bord et pour  $P_1, \dots, P_{n-1}$  on ait au bord une donnée de Neumann.

Dans ce cas, la solution (A) se décompose de la façon suivante

$$-f(r) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_r \left[ \int_0^{+\infty} \exp * \int_{[0,s]} - \frac{P(r_u^+)}{\epsilon} \tau(du) \cdot \frac{P}{\epsilon} \varphi(r_s^+) \tau(ds) \right] \\ + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_r \left[ \int_0^{+\infty} \exp * \int_{[0,s]} - \frac{P(r_u^+)}{\epsilon} \tau(du) \varphi(r_s^+) \tau(ds) \right]$$

Comme  $P(r)$  est une matrice constante qui est la projection sur la normale au bord et  $Q(r) = I - P(r)$  est la projection sur le bord, le premier terme est

$- E_r (\varphi_n(X_T))$  où  $T$  est le premier temps de sortie du  $\frac{1}{2}$ -plan et le deuxième terme est

$$E_r \left[ \int_0^{+\infty} \varphi_t(X_s^+) \tau(ds) \right] \quad \text{où} \quad \varphi_n = f_\theta(r) \\ \varphi_t = -df_\theta(r)(rel n)$$

Cas d'un polygône

La matrice  $P(r)$  est constante par morceaux.

Soit  $T$  le premier temps de sortie du polygône,  $T_1$  le premier temps où le processus change de coté,  $T_2$  le deuxième temps où il change de côté,  $T_3 \dots$

Pour  $T \leq s < T_1$

$$\exp \left[ * \int_{[0,s]} - \frac{P}{\epsilon} (r_u^+) \tau(du) \right] \varphi(r_s^+) = \exp - \frac{\tau(s)}{\epsilon} \cdot \varphi_n(r_s^+) + \varphi_t(r_s^+) \\ = \left[ \exp - \frac{\tau(s)}{\epsilon} P(r_s^+) + Q(r_s^+) \right] \varphi(r_s)$$

où  $Q(r_s^+) = I - P(r_s^+)$

Pour  $T_1 \leq s < T_2$

$$\begin{aligned} \exp * \int_{[0,s]} -\frac{P}{\epsilon} (r_u^+) \tau(du) \cdot \varphi(r_s^+) &= \exp * \int_{[0,T_1]} -\frac{P}{\epsilon} (r_u^+) \tau(du) \cdot \exp * \int_{[T_1,s]} -\frac{P}{\epsilon} (r_u^+) \tau(du) \varphi(r_s^+) \\ &= \left[ \exp - \frac{\tau(T_1)}{\epsilon} \cdot P(r_{T_1}^+) + Q(r_{T_1}^+) \right] \circ \left[ \exp - \frac{\tau(s) - \tau(T_1)}{\epsilon} \cdot P(r_{T_1}^+) + Q(r_{T_1}^+) \right] \end{aligned}$$

Pour  $T_n \leq s < T_{n+1}$ , on a :

$$\begin{aligned} \exp * \int_{[0,s]} -\frac{P(r_u^+)}{\epsilon} \tau(du) &= \\ \left[ \exp - \frac{\tau(T_1)}{\epsilon} \cdot P(r_{T_1}^+) + Q(r_{T_1}^+) \right] \dots \left[ \exp - \frac{\tau(s) - \tau(T_n)}{\epsilon} P(r_{T_n}^+) + Q(r_{T_n}^+) \right] \\ &= \prod_{1 \leq k \leq n} R(T_k) \quad \text{où} \quad R(T_k) = \exp - \frac{\tau(T_{k+1}) - \tau(T_k)}{\epsilon} P(r_{T_k}^+) + Q(r_{T_k}^+) \end{aligned}$$

(A) se décompose en somme de deux termes, comme  $T, T_1, \dots, T_n$  sont des points de croissance du temps local, on a pour le deuxième terme, si  $T_n \leq s < T_{n+1}$

$$\mathcal{A}(r_s^+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp * \int_{[0,s]} -\frac{P(r_u^+)}{\epsilon} \tau(du) = Q(r_T^+) \dots Q(r_{T_n}^+)$$

Pour le premier terme, cela revient à calculer  $d \mathcal{A}(r_s^+)$

Posons 
$$A_i = \exp - \frac{(\tau(T_{i+1}) - \tau(T_i))}{\epsilon} \cdot P(r_{T_i}^+) \quad \text{et} \quad B_i = Q(r_{T_i}^+)$$

pour  $T_n \leq s < T_{n+1}$ , 
$$\prod_{1 \leq k \leq n} R(T_k) = \sum_{A,B} \alpha_1 \circ \alpha_2 \dots \circ \alpha_n \quad \text{où} \quad \alpha_i = A_i \text{ ou } B_i$$

les termes de la forme

$$\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_{n-1} \circ Q(r_{T_n}^+) \frac{P(r_s^+)}{\epsilon} \varphi(r_s^+) = 0.$$

et les termes de la forme

$$\int_{T_n}^{T_{n+1}} \alpha_1 \circ \dots \circ A_j \circ \alpha_{j+1} \dots \exp - \frac{\tau(s) - \tau(T_n)}{\epsilon} P(r_{T_n}^+) \cdot \frac{P(r_s^+)}{\epsilon} \varphi(r_s^+) \tau(ds)$$

tendent vers 0 quand  $\epsilon \rightarrow 0$

donc il reste seulement le terme

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{T_n}^{T_{n+1}} Q(r_{T_n}^+) \dots Q(r_{T_{n-1}}^+) \exp - \frac{\tau(s) - \tau(T_n)}{\epsilon} \cdot \frac{P(r_s^+)}{\epsilon} \varphi(r_s^+) \tau(ds) \\ = - Q(r_{T_n}^+) \dots Q(r_{T_{n-1}}^+) P(r_{T_n}^+) \varphi(r_{T_n}^+) \end{aligned}$$

et la solution (A) est

$$(B) \quad - \sum_n E_r [ Q(r_{T_n}^+) \dots Q(r_{T_{n-1}}^+) P(r_{T_n}^+) \cdot \varphi(r_{T_n}^+) ] + E_r [ \int_0^{+\infty} \mathcal{A}(r_s^+) \varphi(r_s^+) \tau(ds) ]$$

pour  $T_n \leq s < T_{n+1}$ ,  $\mathcal{A}(r_s) = Q(r_{T_n}^+) \dots Q(r_{T_n}^+)$

$\mathcal{A}(r_s)$  est une fonctionnelle à sauts, calculons

$$\int d\mathcal{A}(r_s) \cdot A_s = \sum_{n=1}^{\infty} [ \mathcal{A}(r_{T_{n+1}}) - \mathcal{A}(r_{T_n}) ] \cdot A_{T_n}$$

or  $\mathcal{A}(r_{T_{n+1}}) - \mathcal{A}(r_{T_n}) = \mathcal{A}(r_{T_n}) [ Q(r_{T_{n+1}}^+) - I ] = -\mathcal{A}(r_{T_n}) P(r_{T_n}^+)$

et (B) s'écrit

$$E_r [ \int_0^{+\infty} d\mathcal{A}(r_s^+) \varphi(r_s^+) ] + E_r [ \int_0^{+\infty} \mathcal{A}(r_s) \varphi(r_s) \tau(ds) ] .$$

c'est l'expression (8) § V -1.

BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] H. AIRAULT - Résolution stochastique d'un problème de Dirichlet - Neumann pour des fonctions à valeurs vectorielles : Comptes Rend. Acad. Sc. Paris t. 280. (24 Mars 1975) Serie A. p. 781 - 784
- [ 2 ] H. AIRAULT - Perturbations singulières et solutions stochastiques de problèmes de D. Neumann-Spencer à paraître. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (fin 1975)
- [ 3 ] R.H. CAMERON and W.T. MARTIN - Transformations of Wiener Integrals under Translations A.M. 45 386 - 396.(1944)
- [ 4 ] P.E. CONNER - The Green's and Neumann's problems for differential forms on Riemannian manifolds Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,40 (1954) p. 1151 - 1155.
- [ 5 ] J.L. DOOB - Probability methods applied to the first boundary value problem. Proc. 3 rd. Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob. II, 49 - 80 Univ. Calif. Press (1956)
- [ 6 ] J.G. GALLAVOTTI and H.P. McKEAN - Boundary conditions for the heat equation in a Several dimensional region
- [ 7 ] J. IBERO - Calcul différentiel stochastique intrinsèque sur un groupe de Lie C.R. Acad. Sc. Paris t. 280, 6janvier (1975) série A p.13 à p. 16.
- [ 8 ] N. IKEDA - On the construction of two dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its applications to boundary value problems, Mem, Coll. Sci. Univ. Kyoto serie 33 (367 - 427) (1961) .
- [ 9 ] K. ITO and H.P. Jr. McKEAN - Diffusion processes and their sample paths. Acad. Press New York.(1964).
- [ 10 ] M. KAC. - On the distribution of certain Wiener integrals, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 65 (1949) pp. 1-13.
- [ 11 ] J.P. KAHANE - Random measures and random sets in harmonic Analysis , Advances in Probability Marcel Dekker 1971.
- [ 12 ] P. MALLIAVIN - Formules de la moyenne. Calcul de perturbations et théorèmes d'annulation pour les formes harmoniques. Jour.of Funct. Anal. 17 (274 - 291) (1974) .

- [13] P.A. MEYER - Intégrales Stochastiques (4 exposés) Séminaire de probabilités 1 (Stasbourg) lectures Notes in Math. 39 (1967) Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [14] J. MUNKRES - Elementary differential Topology lectures given at Massachusetts Institute of Technology (Fall 1961) .
- [15] K. SATO and T. UENO - Multidimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ. t.4, 1965 p. 529 - 605
- [16] D.C. SPENCER - Les opérateurs de Green et Neumann sur les variétés ouvertes riemanniennes et Hermitiennes. (Conférences données au Collège de France) Février 1955.
- [17] S.J. TAYLOR - The  $\alpha$  - dimensional measure of the graph and the set of zeros of a Brownian path. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 51 (1955) p. 265 . 274.
- [18] K. YANO - Integral formulas in Riemannian geometry. Marcel Dekker 1970.
- [19] G. DE RHAM - Varietes différentiables. Hermann (1960).