Michel Viot

Équations aux dérivées partielles stochastiques : formulation faible

Séminaire Jean Leray, nº 3 (1974-1975), exp. nº 1, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1974-1975___3_A1_0>

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES : FORMULATION FAIBLE

par Michel VIOT

INTRODUCTION

On étudie des équations aux dérivées partielles stochastiques où l'aléatoire s'introduit par une différentielle stochastique du type bruit blanc distribué. Pour de tels système on dispose d'une méthode de monotomie développée par A. BENSOUSSAN, R. TEMAM [2] et par E. PARDOUX [9], [10] . Le but de ce travail est de voir ce que deviennent les méthodes de type compacité dans ce cadre fonctionnel. La remarque générale que l'on peut faire dès maintenant, est que les résultats de compacité ne se rencontrent pas au niveau de l'équation proprement dite, mais plutôt au niveau d'un problème associé du type problème des martingales de D. STROOCK et S. VARADHAN [13] [14]. Le retour à l'étude de l'équation, se fait alors en généralisant les techniques de T. YAMADA et S. WATANABE [16] [17]. On pourra trouver l'ensemble de cette démarche, faite dans le cadre des processus de diffusion stochastiques en dimension finie dans P. PRIOURET [11].

Par ailleurs, plutôt que de présenter des résultats abstraits, on choisi de développer cette étude sur un exemple particulier introduit par W . FLEMING en génétique de population [5], exemple fournissant une bien meilleure motivation à la méthode de compacité "stochastique" que celui proposé par l'auteur dans [15] .

§ 1 . - L'équation de W. FLEMING.

C'est une modélisation de l'évolution en temps et en espace de la fréquence d'un gène à l'intérieur d'une population occupant un certain habitat $\mathcal{O}$. Plus précisément les individus de cette population possèdent sur deux chromosomes homologues un gène de deux types différents A_1 et A_2 : ce qui donne les combinaisons possibles

$A_1\ A_1$, $A_1\ A_2$, $A_2\ A_2$.

On s'intéresse à la fréquence $u(t,x)$ du type A_1 , à l'instant t et en un point x de l'habitat $\mathcal{O}$. A partir de modèles discrétisés établis par certains généticiens, W. FLEMING a proposé l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x) - F(u(t,x)) + \sqrt{u(t,x)(1 - u(t,x))_+}\ \frac{\partial w}{\partial t} .$$

Le Laplacien représente un terme de dispersion géographique dû aux mouvements migratoires de la population à l'intérieur de son habitat. Ensuite on trouve un terme non linéaire prenant en compte certains avantages sélectifs de A_1 sur A_2. Enfin le dernier terme est un terme stochastique traduisant les éffets aléatoires de transmission des caractères génétiques d'une génération à l'autre.

Les hypothèses générales seront les suivantes :

(1.1) $\mathcal{O}$ est un ouvert borné de R^n, de frontière $\partial\mathcal{O}$ suffisamment régulière.

(1.2) F est une fonction de R dans R, continue bornée.

(1.3) $u(1-u)_+$ est la partie positive de $u(1-u)$. Donc on aura toujours : $0 \leq u(1-u)_+ \leq 1$.

(1.4) $W(t)$, $t \in [o,T]$, est un processus de Wiener à valeurs dans $H = L^2(\mathcal{O})$ et de covariance $Q \in \mathcal{L}^1(H)$, l'espace des opérateurs nucléaires de H dans H.

(1.5) La condition initiale u_o est donnée dans H.

(1.6) Les conditions frontières sont, soit du type Dirichlet $u_{|\Sigma} = 0, \Sigma =]o,T[\times \partial\mathcal{O}$, soit du type Neumann, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

REMARQUE 1.1 – L'introduction de la partie positive dans $\sqrt{u(1-u)}$ peut paraître artificielle. En fait on montre grâce au principe du maximum (stochastique) et sous certaines hypothèses sur F que la solution de l'équation de FLEMING est toujours comprise entre 0 et 1 dès que la condition initiale u_o est comprise entre 0 et 1.

Passons maintenant à une formulation plus abstraite du problème dans le cas par exemple de conditions de Dirichlet.

Pour cela on introduit l'espace $V = H^1_o(\mathcal{O})$, on identifie H à son dual et on désigne par $V' = H^{-1}(\mathcal{O})$ le dual de V. Par ailleurs on utilisera les notations classiques, $|.|$, $||.||$, $||.||_*$ pour les normes dans respectivement H,V,V' ; $(.,.)$ désignera le produit scalaire dans H et $<.,.>$ le produit de dualité V,V'.

On définit un opérateur A non linéaire de V dans V' en posant, $\forall\, u,v \in V$

$$(1.7) \qquad < A(u),v > = \int_{\mathcal{O}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_{\mathcal{O}} F(u)v\,dx,$$

et un opérateur B non linéaire de V dans $\mathcal{L}(H)$, (l'espace des opérateurs linéaires continus de H dans H) par la relation, $\forall\, u \in V$, $h \in H$

(1.8) $B(u)h$ = la fonction h multipliée par la fonction $\sqrt{u(1-u)_+}$.

En fait on remarque d'après (1.3) que B est défini sur H.

L'équation de W. FLEMING peut alors se réécrire sous la forme d'une équation d'Ito construite sur le triplet (V,H,V') :

$$(1.9)\qquad \begin{cases} du(t) + A\,(u(t))\,dt = B(u(t))\,dw(t) \\ u(o) = u_o \end{cases}$$

Le second membre de (1.9) est maintenant une intégrale stochastique hilbertienne (cf. exposé de E. PARDOUX [10]).

Pour le cas de conditions de Neumann, il est clair qu'il suffira de remplacer $V = H^1_o(\mathcal{O})$ par $V = H^1(\mathcal{O})$.

Dans les deux cas (Dirichlet ou Neumann) les opérateurs A et B vérifient les conditions suivantes.

(1.10) A est continu de V dans V' . De plus,

$$\|Au\|_* \leq \|u\| + M,\ (\forall u \in V,\ M > o)\ .$$

(1.11) $\forall h \in H$, $u \to B(u)h$ est continue de V dans H,(en fait de H dans H) . C'est dire que l'application $u \to B(u)$ est continue pour la topologie forte de $\mathcal{L}(H)$.

de plus, $\forall u \in V$

$$\|B(u)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1\ .$$

(1.12) L'application $u \to B(u)\,Q\,B(u)^*$ est continue de V dans $\mathcal{L}^1(H)$ (en fait de H dans $\mathcal{L}^1(H)$). De plus, $\forall u \in V$

$$\mathrm{tr}(B(u)\,Q\,B(u)^*) \leq \mathrm{tr}\,Q\ .$$

(1.13) Le couple (A,B) vérifie la condition de coercivité suivante :

$$\exists\,\alpha > 0,\ \exists\,\lambda,\ \nu \geq 0 \ \text{ tel que } \ \forall u \in V$$

$$2 < A\,u,u > - \mathrm{tr}(B(u)\,Q\,B(u)^*) + \lambda\,|u|^2 + \nu \geq \alpha\,\|u\|^2.$$

REMARQUE 1.2. - Le couple (A,B) n'est pas monotone (cf. [10]). Cela est essentiellement dû au caractère holdérien (d'ordre $\frac{1}{2}$) de la dépendance de B en u . Une première idée consisterait à régulariser B en B^ϵ de telle sorte que (A,B^ϵ) soit monotone. Malheureusement on ne dispose pas d'estimations suffisantes pour faire un passage à la limite classique. Par contre on peut s'inspirer des différentes techniques d'étude des processus stochastiques de diffusion en dimension finie pour imaginer une autre voie d'approche du problème. En 68-69 D. STROOCK et S. VARADHAN [13] ont introduit la notion de problème des martingales qui a permis d'étudier de manière très générale les processus de diffusion. En 71, S. WATANABE et T. YAMADA [16] [17] ont fait le lien entre ces problèmes de martingales et les équations différentielles stochastiques.

C'est cette démarche que nous allons étendre au cadre des équations aux dérivées partielles stochastiques.

§ 2 . - Problème des Martingales.

Soit $C(o,T;\ H \text{ faible})$ l'espace des fonctions scalairement continues à valeurs dans H, muni de la topologie de la convergence uniforme. On pose

(2.1) $$\Omega = C(o,T;\ H \text{ faible}) \cap L^2(o,T;\ V).$$

Et on munit Ω du sup des topologies induites par $C(o,T;\ H \text{ faible})$ et $L^2(o,T;\ V)$ faible.

L'espace Ω est alors un espace de Lusin et ses compacts sont métrisables.
Posons maintenant

(2.2) $$u(t,\omega) = \omega\ (t)\ ,\ 0 \leq t \leq T\ ,\ \omega \in \Omega\ .$$

On définit ainsi un processus à valeurs dans $(H,\mathcal{B}_H)$,$\mathcal{B}_H$ étant la tribu borélienne de H (pour les topologies faible ou forte). Et soit,

(2.3) $$\mathcal{F}_t = \sigma\ (u(s)\ ;\ s \leq t)\ ;\ \mathcal{F} = \mathcal{F}_T.$$

En utilisant les propriétés des espaces de Lusin on peut montrer que $\mathcal{F}$ n'est autre que la tribu borélienne de Ω .

Introduisons maintenant le processus,

(2.4) $$M(t,\omega) = u(t,\omega) - u(o,\omega) + \int_o^t A u(s,\omega)\, ds$$

On vérifie que,

$\omega \to M(t,\omega)$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable de Ω dans V'

$t \to M(t,\omega)$ est scalairement continu à valeurs dans V' .

Posons enfin,

(2.5) $$\ll M \gg (t,\omega) = \int_o^t B(u(s,\omega))\ Q\ B\ (u(s,\omega))^*\ ds$$

Alors $\ll M \gg$ définit un processus croissant continu à valeurs dans $\mathcal{L}^1\ (H)$ et adapté à la famille $\mathcal{F}_t$.

On peut alors se poser le problème suivant : trouver une mesure de probabilité P sur $(\Omega,\mathcal{F})$ telle que, (2.6) $$P\{\omega : u(o,\omega) = u_o\} = 1$$

(2.7) Le processus $M(t,\omega)$ est pour la mesure P une martingale continue à valeurs dans H de processus croissant $\ll M \gg (t,\omega)$.

Une telle mesure P sera dite solution du problème des martingales (u_o, A, B).

Notons que Ω étant de Lusin et $\mathcal{F}$ étant la tribu borélienne de Ω, P est en fait une probabilité de Radon sur Ω ([1], [12]).

REMARQUE 2.1. - Supposons $Q = 0$; l'éqution (1.9) est alors déterministe et on peut prendre pour solution du problème (2.6) (2.7), la mesure de Dirac δ_y, y solution de l'équation,

$$y' + A(y) = 0 \; ; \; y(o) = u_o \; .$$

REMARQUE 2.2. - De manière générale soit $(\Omega' \mathcal{F}'_t, P')$ un espace de probabilité suffisamment grand pour que l'on puisse y définir un processus de Wiener à valeurs dans H et de covariance Q ($\neq 0$). Et soit P une solution du problème des martingales (u_o,A,B). Grâce à un théorème de représentation de martingales de D. LEPINGLE et J.Y. OUVRARD [7] on sait que, il existe un processus de Wiener $W(t,\omega,\omega')$ à valeurs dans H et de covariance Q, défini sur l'espace de probabilité $(\Omega \times \Omega', \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}'_t, P \otimes P')$ tel que

(2.8) $$\begin{aligned} M(t,\omega) &= \int_o^t B(u(s,\omega))dW(s,\omega,\omega') \\ &= U(t,\omega) - u(o,\omega) + \int_o^t Au(s,\omega)\, ds \quad (P \otimes P' \text{ p.s.}) . \end{aligned}$$

Donc, partant d'une solution du problème des martingales (u_o,A,B) on sait toujours construire une solution de l'équation (1.9) à condition de <u>choisir convenablement</u> l'espace de représentation du processus de Wiener $W(t)$.

Comme en dimension finie (cf. [11]) le problème (2.6) (2.7) admet plusieurs formes équivalentes que l'on a résumé dans le théorème suivant.

THEOREME 2.1. - <u>Soit P une probabilité sur</u> $(\Omega, \mathcal{F})$ <u>tel que</u> $P(u(o) = u_o) = 1$. <u>Il y a équivalence entre les propositions suivantes :</u>

(2.9) P <u>est solution du problème des martingales</u> (u_o,A,B).

(2.10) Pour tout θ appartenant à un sous espace vectoriel dense de V, le processus,

$$M^{\theta}(t,\omega) = (M(t,\omega),\theta)$$

est une P martingale continue de processus croissant,

$$< M^{\theta} > (t,\omega) = \int_{o}^{t} (\theta, B(u(s))\, Q\, B\,(u(s))^{*}\, \theta\,)\, ds\,.$$

(2.11) Pour tout θ appartenant à un sous-espace vectoriel dense de V, le processus

$$\zeta^{\theta}(t\,,\omega\,) = \exp\,\{\, M^{\theta}(t,\omega) - \tfrac{1}{2} < M^{\theta} > (t,\omega)\,\}$$

est une P martingale continue.

(2.12) Pour tout θ appartenant à un sous-espace vectoriel dense de V et pour tout φ de $\mathcal{D}(R)$ le processus,

$$H_{\varphi}^{\theta}\,(t,\omega) = \varphi\,((u(t),\theta)) - \varphi\,((u(o),\theta))$$

$$+ \int_{o}^{t} \varphi'((u(s),\theta)) < Au\,(s),\theta > ds$$

$$- \tfrac{1}{2} \int_{o}^{t} \varphi''((u(s),\theta))\,(\theta,B(u(s))\,Q\,B(u(s))^{*}\theta)\,ds$$

est une P martingale continue.

REMARQUE 2.3. - Posons $\Phi(u) = \varphi\,((u,\theta))$; alors $\Phi'(u) = \varphi'((u,\theta))\theta$ et $\Phi''(u) = \varphi''((u,\theta))\,\theta \otimes \theta$. Notons μ_t l'image de P par l'application coordonnée $\omega \to u(t,\omega)$. On définit ainsi une famille de mesures de probabilité sur H qui vérifie d'après (2.12) $E(\,H_{\varphi}^{\theta}\,(t)) = 0$, c'est-à-dire

$$\int_{H} \Phi(u)\, d\mu_t(u) - \int_{H} \Phi(u)\, d\mu_o(u) + \int_{o}^{t} ds \int_{H} < Au,\, \Phi'(u) > d\mu_s(u)$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{o}^{t} ds \int_{H} tr\,\{\,\Phi''(u)\; B\,(u)\; Q\; B\,(u)^{*}\}\, d\,\mu_s\,(u)\,.$$

Au premier membre on reconnait une expression analogue à celle utilisée par C. FOIAS et G. PRODI [6] dans la définition des solutions statistiques des équations de Navier-Stokes. En fait, en développant cette analogie on trouve que les problèmes de martingales fournissent un cadre unique où l'on peut étudier simultanément les solutions statistiques ou stochastiques de Navier-Stokes (pour le cas stochastique cf A. BENSOUSSAN et R. TEMAM [3]).

§ 3 . - Existence .

On étudie l'existence de solutions au problème des martingales (u_o, A, B) par une méthode du type Galerkin : on construit des solutions approchées qui seront donc des mesures de probabilité et il s'agira d'étudier les convergences de cette suite de solutions approchées.

3.1 Solutions approchées.

Soit $(e_i)_{i \geq 1}$ une base orthonormée de H formée d'éléments de V . Soit V_m l'espace engendrée par $(e_1 \dots e_m)$ et Π_m le projecteur orthogonal de H sur V_m.

On désigne par P^m une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que

(3.1) $$\operatorname{supp} P^m \subset C(o,T\,;V_m)$$

(3.2) $$P^m\{u(o) = \Pi_m u_o\} = 1$$

(3.3) Pour tout $\theta \in V_m$ le processus

$$M_t^\theta = (u(t) - u(o), \theta) + \int_o^t < Au(s), \theta > ds$$

est une P^m martingale continue de processus croissant

$$< M^\theta > (t) = \int_o^t (\theta, B(u(s)) Q B(u(s))^* \theta) ds .$$

L'existence de P^m s'obtient en étudiant un problème de martingales dans V_m avec pour coefficients de diffusion

$$a_{ij}(u) = (e_i, B(u) Q B(u)^* e_j) \ , \ u \in V_m, i,j = 1 \dots m .$$

et pour coefficients de dérive

$$b_i(u) = < A(u) \ , \ e_i >, \ u \in V_m, \ i = 1 \dots m .$$

De plus utilisant la condition de coercivité (1.13) on montre qu'il n'y a pas de temps d'explosion bien que les $b_i(u)$ ne soient pas bornés en u .

REMARQUE 3.1. - Supposons $Q = 0$; on pourra prendre $P^m = \delta y_m$ où y_m est la solution déterministe approchée ,

$$(y'_m(t) \ , \ \theta) + < Ay_m(t), \theta > = 0 \ , \ \forall \ \theta \in V_m \ y_m(o) = \Pi_m u_o \ .$$

Rappelons que la méthode de compacité déterministe comporte deux étapes essentielles

Tout d'abord on montre l'existence d'une sous suite (y_μ) qui converge dans $L^\infty(o,T\,;\,H)$ faible $*$ et $L^2(o,T\,;\,V)$ faible.

D'où l'on déduit facilement que y_μ est également convergente dans notre espace Ω.

Ensuite en construisant les solutions approchées y_m sur une base spéciale, on montre grâce à un lemme de compacité l'existence d'une sous-suite (y_μ) convergente dans $L^2(o,T\,;\,H)$ fort.

A partir de ces deux résultats on trouve finalement que $y = \lim\limits_\mu y_\mu$ est solution de $y' + A\,y = o \quad y(o) = u_o$.

La méthode de compacité "Stochastique" sera absolument parallèle à celle que l'on vient de décrire.

On va montrer l'existence de $(P^\mu) \subset (P^m)$ étroitement convergente dans l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des probabilités de Radon sur Ω. Ensuite à condition de construire les P^m sur une base spéciale on obtiendra grâce à un lemme de compacité que P^μ converge étroitement dans l'ensemble $P(L^2(o,T\,;\,H)$ fort) des probabilités de Radon sur $L^2(o,T\,;\,H)$ fort.

Ce qui permettra de montrer que $P = \lim\limits_\mu P_\mu$ est solution du problème des martingales (u_o,A,B).

Rappelons qu'une suite P^j de mesures de probabilité de Radon définies sur un espace topologique complétement régulier X, converge étroitement vers P si

$\int f.P^j \to \int f.P$ pour toute f continue bornée sur X. Ce qui est équivalent à

$\int f.P \leq \liminf\limits_j \int f.P^j$ pour toute f s.c.i. et bornée sur X.

Une condition de relative compacité étroite dans l'ensemble $P(X)$ des probabilités de Radon sur X, est donnée par le critère de Prokhoroff :

$\mathcal{M} \subset P(X)$ est étroitement relativement compact si $\forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, K_\epsilon \subset X, K_\epsilon$ compact tel que $P(K_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$, $\forall\, P \in \mathcal{M}$.

on pourra consulter [1] [4] [12].

3.2. Estimations.

Posons,

$$M^m(t,\omega) = \sum_{i=1}^{m} M^{e_i}(t,\omega)\, e_i$$

D'après (3.1) (3.3) M_t^m est une P^m martingale de processus croissant,

$$\int_0^t \Pi_m B(u)\ Q\ B\ (u)^* \Pi_m\ ds\ .$$

Introduisons maintenant $R_m = \Pi_{m|V}$; $R_m \in \mathcal{L}\ (V,V)$ et sa tramposée $R_m^* \in \mathcal{L}\ (V',V)$.

Par construction des P^m on a,

$$u(t,\omega) - u(o,\omega) + \int_0^t R_m^*\ Au\,(s,\omega)\ ds = M^m(t,\omega)\ (P^m \text{ p.s.})\ . \tag{3.4}$$

Appliquant la formule d'Ito à $|u(t)|^2$, on obtient

$$|u(t)|^2 - |u(o)|^2 + 2\int_0^t < Au\,(s),u(s) > ds - \tag{3.5}$$

$$\int_0^t tr\,\{\Pi_m\ B(u)\ Q\ B(u)^*\ \Pi_m\}\,ds = \int_0^t (u(s),\ dM^m(s))\quad (P^m \text{ p.s.})\ .$$

Mais d'après la relation de coercivité (1.13) on a,

$$2 < Au\,,u > - tr\ \{\Pi_m\ B(u)\ Q\ B\ (u)^* \Pi_m\} + \lambda|u|^2 + \nu \geqq \alpha\ ||u||^2. \tag{3.6}$$

Reportant (3.6) dans (3.5) avec pour simplifier $\lambda = 0$, il vient

$$|u(t)|^2 + \alpha \int_0^t ||u(s)||^2\ ds \leqq |u_o|^2 + \nu T + \int_0^t (u(s),dM^m(s))\ (P^m p.s). \tag{3.7}$$

Soit alors E^m l'espérance mathématique associée à P^m . Prenant l'espérance mathématique des deux membres de (3.7), le terme d'intégrale stochastique disparait et on obtient les estimations suivantes : il existe une constante $c > 0$ indépendante de m telle que,

$$\sup_{0 \leqq t \leqq T} E^m\,|u(t)|^2 \leqq c \tag{3.8}$$

$$E^m \int_0^T ||Au\,(t)||^2\ dt \leqq c. \tag{3.9}$$

De plus d'après (1.10),

$$E^m \int_0^T ||Au\,(t)||^2_*\ dt \leqq c\ . \tag{3.10}$$

Enfin en utilisant une propriété plus fine des intégrales stochastiques on peut améliorer (3.8) pour obtenir finalement,

$$E^m \sup_{0 \leqq t \leqq T} |u(t)|^2 \leqq c. \tag{3.11}$$

REMARQUE 3.2. - D'après (3.9) on a,

$$P^m \{\omega : \int_o^T ||u(t,\omega)||^2 dt \leq k\} \geq 1 - \frac{1}{k} E^m \int_o^T ||u(t)||^2 dt \geq 1 - \frac{c}{k}, \forall m.$$

Donc $\forall \epsilon > 0$, $\exists k_\epsilon$ tel que,

$$P^m\{\omega : \int_o^T ||u(t,\omega||^2 dt \leq k_\epsilon\} \geq 1 - \epsilon, \forall m.$$

C'est dire que la suite P^m vérifie le critère de Prokhoroff dans l'ensemble $\mathcal{P}(L^2(o,T;V)\text{faible})$ des probabilités de Radon sur $L^2(o,T;V)$faible.
De la même façon l'estimation (3.11) entraine la relative compacité étroite de la suite P^m dans $\mathcal{P}(L^\infty(o,T;H)\text{faible*})$. Mais pour obtenir dans $\mathcal{P}(\Omega)$ il faut faire un travail supplémentaire.

THEOREME 3.1. - <u>La suite P^m est étroitement relativement compacte dans l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des probabilités de Radon sur Ω.</u>

DEMONSTRATION.

On remarque tout d'abord qu'une partie K de Ω est relativement compacte si

$$(3.12)\quad \begin{cases} \text{a) } \exists k > 0 \text{ tel que } \int_o^T ||u(t,\omega)||^2 dt \leq k \\ \quad \text{et } \sup\limits_{0 \leq t \leq T} |u(t,\omega)|^2 \leq k, \ \forall \omega \in K. \\ \text{b) } \forall i \geq 1, \text{ l'ensemble des } t \to (u(t,\omega), e_i), \omega \in K \\ \quad \text{est équicontinu dans } C(o,T). \end{cases}$$

Soit maintenant $\gamma^i(\omega)(\ell)$ (respectivement $\gamma_H^m(\omega)(\ell)$) le module de continuité de $t \to (u(t,\omega),e_i)$, (respectivement $t \to M^m(t,\omega)$) :

$$\gamma^i(\omega)(\ell) = \sup\{|(u(t,\omega)-u(t',\omega),e_i)|; t,t' \in [o,T], |t-t'| \leq \ell\}.$$

$$\gamma_H^m(\omega)(\ell) = \sup\{|M^m(t,\omega)-M^m(t',\omega)| ; t,t' \in [o,T], |t-t'| \leq \ell\}.$$

De (3.4) on déduit,

$$(3.13)\qquad \gamma^i(\omega)(\ell) \leq \gamma_H^m(\omega)(\ell) + ||e_i|| \sqrt{\ell} (\int_o^T ||Au(t)||_*^2 dt)^{\frac{1}{2}}.$$

Par ailleurs les martingales vectorielles M_t^m ont pour processus croissant,

$$\ll M^m \gg(t) = \int_o^t \Pi_m B(u) Q B(u)^* \Pi_m ds.$$

D'où la majoration, pour $t' \geq t$

$$\mathrm{tr} \ll M^m \gg (t') - \mathrm{tr} \ll M^m \gg (t) \leq (t'-t)\ \mathrm{tr}\ Q \quad (\text{cf.}1.12).$$

Enfin, en utilisant une inégalité (du type BURKOLDER-GUNDY) à savoir,

$$(3.14)\quad E^m\{\sup_{t\leq s\leq t'} |M^m(s) - M^m(t)|^p\} \leq E^m\{(\mathrm{tr} \ll M^m \gg (t') - \mathrm{tr} \ll M^m(t) \gg)^{p/2}\}$$

$$\leq |t'-t|^{p/2}\ \mathrm{tr}\ Q^{p/2},$$

(avec par exemple $p = 4$) on peut démontrer le lemme

LEMME 3.1 - <u>Il existe une fonction</u> $\varphi(\epsilon,\ell)$ <u>continue, decroissante en</u> ℓ <u>vers zéro lorsque</u> ℓ <u>tend vers zéro, telle que,</u>

$$(3.15)\qquad P^m\ \omega : \forall \ell\ \ \gamma_H^m(\omega)(\ell) \leq \varphi(\epsilon,\ell)\ \} \geq 1 - \epsilon,\ \forall m.$$

Posons alors,

$$C_k = \{\omega : \sup |u(t,\omega)|^2 \leq k,\ \int_0^T ||u(t,\omega)||^2 dt \leq k,\ \int_0^T ||Au(t,\omega)||_*^2\, dt \leq k\}.$$

D'après les estimations (3.9) (3.10) (3.11), pour tout $\epsilon > 0$, il existe k_ϵ tel que,

$$(3.16)\qquad P^m(C_{k_\epsilon}) \geq 1 - \epsilon\ ,\ \forall m.$$

Soit maintenant,

$$K_\epsilon = C_{k_\epsilon} \cap \{\omega : \forall i, \forall \ell, \gamma^i(\omega)(\ell) \leq \varphi(\epsilon,\ell) + ||e_i|| \sqrt{\ell k_\epsilon}\}$$

D'après (3.12) les K_ϵ sont relativement compacts dans Ω, et d'après (3.13)

$$K_\epsilon \supset C_{k_\epsilon} \cap \{\omega : \forall \ell,\ \gamma_H^m(\omega)(\ell) \leq \varphi(\epsilon,\ell)\}.$$

Donc (3.15) (3.16) entrainent,

$$P^m(K_\epsilon) \geq 1 - 2\epsilon,\ \forall m.$$

Et le résultat découle du critère de Prokhoroff.

3.3. - <u>Méthode de Compacité .</u>

L'injection de V dans H étant compacte, il existe (cf. J.L. LIONS [8] ch. I) une base "spéciale" (e_i) telle que, (3.17) $$((u,e_i)) = \lambda_i (u,e_i) \ , \ u \in V \ , \ \lambda_i > 0$$

où $((.,.))$ désigne le produit scalaire dans V.

Donc la projection orthogonale sur V_m, d'un élément u de V, est maintenant la même pour les structures hilbertiennes de V ou de H.

En conséquence $R_m = \Pi_m \mid V$ vérifie,

(3.18) $$||R_m||_{\mathcal{L}(V,V)} = 1 \ \text{ et } \ ||R_m^*||_{\mathcal{L}(V',V')} = 1 \ .$$

Soit alors $\gamma_{V'}(\omega)(\ell)$ le module de continuité de $t \to u(t,\omega)$ considérée à valeurs dans V' :

$$\gamma_{V'}(\omega)(\ell) = \sup \{ ||u(t,\omega) - u(t'\omega)||_*; \ t,t' \in [o,T], \ |t-t'| \leq \ell \}$$

De (3.4) (3.18) on déduit,

(3.19) $$\gamma_{V'}(\omega)(\ell) \leq \gamma_H^m(\omega)(\ell) + \sqrt{\ell} \left(\int_o^T || Au(t) ||_*^2 \, dt \right)^{1/2} \ (P^m p.s).$$

Utilisant le lemme 3.1 et l'estimation (3.10) on obtient, à partir de (3.19)

THEOREME 3.2. - <u>Pour tout</u> $\epsilon > 0$, <u>il existe</u> L_ϵ <u>partie équicontinue de</u> $C(o,T;V')$ <u>telle que</u> $P^m(L_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$, $\forall m$; <u>à condition de supposer les</u> P^m <u>construits sur la base spéciale</u> (3.17).

REMARQUE 3.3. - Le théorème 3.2 remplace l'estimation supplémentaire sur la dérivée en temps des solutions approchées dans la méthode de compacité déterministe.

Nous allons maintenant donner un résultat général de compacité pour les systèmes stochastiques.

Soient B et B_1 deux espaces de Banach reflexifs séparables, $B \subset B_1$ avec injection continue. Soit $\alpha : B \to \bar{R}_+$ une fonction homogene inf-compacte,

(3.20) $$0 \leq \alpha(v) \leq +\infty \ , \ \alpha(\lambda v) = |\lambda| \alpha(v) \ , \ \forall v \in B, \ \forall \lambda \in R \ .$$

(3.21) $\{ v : \alpha(v) \leq 1 \}$ est un compact fort non vide de B.

Soit enfin $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(L^q(o,T;B) \text{ fort})$, $1 < q < +\infty$, telle que

(3.22) $$E_P \int_o^T \alpha(v(t))^q \, dt \leq c \ , \ \forall P \in \mathcal{M}$$

(E_p désignant l'espérance mathématique par rapport à P et c étant indépendant de P).

(3.23) $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ L_\varepsilon$ partie équicontinue de $C(o,T;V')$ tel que

$$P(L_\varepsilon) \geqq 1 - \varepsilon \quad \forall\ P \in \mathcal{M}\ .$$

THEOREME 3.3. - Sous les hypothèses (3.20) - (3.23), $\mathcal{M}$ est étroitement relativement compacte dans l'ensemble $\mathcal{P}(L^q(o,T;B)$ fort) des probabilités de Radon sur l'espace de Banach $L^q(o,T;B)$fort.

DEMONSTRATION . D'après (3.22), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe k_ε tel que,

$$P\{v(.)\ :\ \int_o^T \alpha(\,v(t))^q\,dt \leq k_\varepsilon\} \geqq 1 - \varepsilon\ ,\ \forall\ P \in \mathcal{M}\ .$$

Posons maintenant,

$$N_\varepsilon = L_\varepsilon \cap \{\,v(.)\ :\ \int_o^T \alpha(v(t))^q\,dt \leq k_\varepsilon\,\}$$

Alors,

$$P(N_\varepsilon) \geqq 1 - 2\,\varepsilon \quad \forall\ P \in \mathcal{M}\ .$$

Et N_ε est une partie relativement compacte de $L^q(o,T;B)$ fort d'après un résultat de compacité de Dubinskii que l'on peut trouver dans J.L. LIONS [8] ch.I theor. 12.1 .

Comme corollaire en prenant $B = H$, $B_1 = V'$, $\alpha(v) = ||v||$, $q = 2$ on obtient que la suite des solutions approchées P^m, construites sur (3.17) , est étroitement relativement compacte dans $\mathcal{P}(L^2(o,T;H)$ fort) . Reliant ce résultat au théorème 3.1, on trouve que (P^m) est étroitement relativement compacte dans $\mathcal{P}(\Omega \cap L^2(o,T;H))$ où $\Omega \cap L^2(o,T;H) = \Omega$ muni du sup des topologies de Ω et de la topologie forte de $L^2(o,T;H)$.

3.4. - THEOREME D'EXISTENCE

THEOREME 3.4. - Pour tout $u_o \in H$, il existe une solution au problème des martingales (u_o,A,B) .

DEMONSTRATION. Soit P^μ une sous-suite infinie convergeant étroitement vers P dans $(\Omega \cap L^2(o\,,T\,;H))$.

Soit par ailleurs $H_\varphi^\theta(t,\omega)$ le processus défini en (2.12) : $\omega \to H_\varphi^\theta(t,\omega)$ est continue (mais non bornée) sur $\Omega \cap L^2(o,T;H)$.

Désignons maintenant par K un compact de Ω, F_s- mesurable. P^μ étant solution d'un problème de martingales sur V_μ, on a

$$\int_K H_\varphi^\theta(t,\omega) - H_\varphi^\theta(s,\omega)\, d P^\mu(\omega) = 0 \ , \ \forall\ \theta \in V_m \ , \ \forall\ \mu \geqq m \ .$$

Utilisant la définition de la convergence étroite et la s.c.s. de la fonction que l'on intègre, on obtient à la limite,

$$\int_K H_\varphi^\theta(t,\omega) - H_\varphi^\theta(s,\omega)\, d P(\omega) \geqq 0 \ , \ \forall\ \theta \in \bigcup_m V_m \ .$$

Mais changeant φ en $-\varphi$, $H_{-\varphi}^\theta$ se transforme en $-H_\varphi^\theta$; donc en fait

$$\int_K H_\varphi^\theta(t,\omega) - H_\varphi^\theta(s,\omega)\, d P(\omega) = 0 \ , \ \forall\ \theta \in \bigcup_m V_m \ .$$

qui est un sous-espace dense de V.

On en déduit que $H_\varphi^\theta(t)$ est une P martingale continue et le résultat découle de (2.12) .

§ 4 . - Le problème de l'unicité.

Ayant l'existence de solutions au problème des martingales, on sait d'après la Remarque 2.2 construire des solutions de l'équation (1.9).

Se pose maintenant le problème de l'unicité, unicité pour le problème des martingales et unicité pour l'équation ainsi que leurs relations.

En dimension finie il est possible d'étudier directement l'unicité du problème des martingales (cf. [13] [14]) mais ces techniques semblent difficiles pour l'instant à étendre au cadre des équations aux dérivées partielles. Par contre l'approche de S. YAMADA , T. WATANABE [16] est plus aisée à transposer. C'est ce que nous allons faire brièvement dans ce paragraphe.

Notons qu'une solution de l'équation (1.9) peut être considérée comme un couple (u,W) où,

(4.1) W est un processus de Wiener à valeurs dans H de covariance Q donnée.

(4.2) u est une variable aléatoire à valeurs dans l'espace canonique Ω et vérifiant pour tout t,

$$u(t) - u_o + \int_o^t Au(s)\,ds = \int_o^t B(u(s))\,dW(s) \quad (p.s).$$

On peut alors définir deux notions d'unicité pour l'équation,

l'unicité forte ou trajectorielle : si (u_1, W) et (u_2, W) sont deux solutions de même condition initiale et par rapport au même Wiener W, alors

$$u_1(t) = u_2(t) \quad (p.s.) \quad \forall t.$$

l'unicité faible ou en loi de probabilité : si (u_1, W_1) et (u_2, W_2) sont deux solutions de même condition initiale, alors les lois de probabilité de u_1 et u_2 sont les mêmes sur Ω.

Ayant deux notions d'unicité il est normal de leur faire correspondre deux notions d'existence :

existence forte : si pour tout processus de Wiener W donné à priori, il existe u tel que (u, W) soit solution.

existence faible : s'il existe un couple (u, W) vérifiant (4.1) (4.2).

Les relations entre ces quatre propriétés étant les suivantes

THEOREME 4.1. - (S. YAMADA , T. WATANABE).

1. L'unicité trajectorielle entraîne l'unicité en loi de probabilité.
2. L'existence faible et l'unicité trajectorielle entraînent l'existence forte.

Par ailleurs on peut montrer,

THEOREME 4.2. - L'unicité en loi de probabilité est équivalente à l'unicité du problème des martingales.

Donc pour conclure l'étude de l'équation de W. FLEMING, on voit qu'il suffit d'obtenir l'unicité trajectorielle (car on a déjà l'existence faible par les problèmes de martingales).

THEOREME 4.3. Si la fonction F est de Lipschitz, l'équation (1.9) a la propriété d'unicité trajectorielle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BADRIKIAN. Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les mesures cylindriques. Lect. Notes in Math. n° 139 - Springer Verlag 1970 .

[2] A. BENSOUSSAN - R. TEMAM . Equations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires . Israel J. of Math. vol II n° I, 1972.

[3] A. BENSOUSSAN - R. TEMAM. Equations stochastiques du type Navier - Stokes . J. of Funct. Anal. vol 13, n° 2, 1973, pp 195-222.

[4] N. BOURBAKI. Intégration ch. IX . Hermann, Paris 1969.

[5] W. FLEMING. Distributed parameter systems in population biology. to appear in Springer Lect. Notes in Economies and Math. Systems (Proc. Internat. Colloq. ou Control theory, Numerical Methods and Systems modelling, I.R.I.A., June 1974) .

[6] C. FOIAS - G. PRODI . Statistical study of Navier - Stokes equations (to appear)

[7] D. LEPINGLE - J.Y. OUVRARD. Martingales Browniennes hilbertiennes. Report IRMA Grenoble (oct.1973) .

[8] J.L. LIONS. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod - Gauthier - Villars - Paris 1969.

[9] E. PARDOUX. Sur des équations aux dérivées partielles stochastiques monotones. CRAS t. 275 juillet 1972.

[10] E. PARDOUX. Séminaire J. LERAY, Collège de France, Nov. 1974.

[11] P. PRIOURET. Processus de diffusion dans R^n, Lect. Notes in Math. n° 390 Springer Verlag 1974.

[12] L. SCHWARTZ. Random Measures on arbitary topological spaces and cylindrical measures. Oxford Univ. Press (1973)

[13] D. STROOCK - S. VARADHAN. Diffusion Processes with continuous coefficients (I) Com. Pure and Appl. Math., 22, 345-400, 1969.

[14] D. STROOCK - S. VARADHAN. Diffusion Processes with continnous coefficients (II) Com. Pure and Appl. Math. 22, 479-530, 1969.

[15] M. VIOT. Solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique non linéaire : méthode de compacité . CRAS t. 278 , avril 1974.

[16] T. YAMADA - S. WATANABE . On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations (I) J. Math. Kyoto Univ., 11, 155-167 (1971)

[17] T. YAMADA - S. WATANABE. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations (II) J. Math. Kyoto Univ., 11, 553-563 (1971) .