

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ROBERT BERZIN

JEAN VAILLANT

**Paramétrix du problème de Cauchy pour un système faiblement
hyperbolique à caractéristiques multiples**

Séminaire Jean Leray, n° 1 (1973-1977), exp. n° 5, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1977__1_A5_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1973-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PARAMETRIX DU PROBLEME DE CAUCHY POUR UN SYSTEME FAIBLEMENT
HYPERBOLIQUE A CARACTERISTIQUES MULTIPLES

par Robert BERZIN et Jean VAILLANT

1. Notations et hypothèses :

$h = (h_B^A(x, D))$ désigne un opérateur différentiel matriciel d'ordre s, t , $\mathcal{C}^\infty$, $t \geq 1$, $1 \leq A \leq m$, $1 \leq B \leq m$, $x \in [0, T] \times X'$, $T > 0$, X' variété compacte $\mathcal{C}^\infty$, de dimension n .

On notera $((x^0, x^1, \dots, x^n), (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n))$ les coordonnées locales de $(x, \xi) \in T^*(X)$.

$(h_B^A(x, \xi))$ est le symbole principal de h au sens suivant : pour chaque x $h_B^A(x, \xi)$ est le symbole principal de h_B^A si celui-ci est d'ordre t , 0 sinon et $\det(h_B^A(x, \xi))$ n'est pas identiquement nul.

1) On suppose qu'il existe des entiers strictement positifs $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_\sigma$, et des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ en x , polynômiales en ξ et irréductibles sur $\mathbb{R}$ pour tout x , $H_0, H_1, \dots, H_\sigma$, telles que pour tout $x \in X$:

$$\det(h_B^A(x, \xi)) \equiv \prod_{s=0}^{s=\sigma} (H_s(x, \xi))^{\mu_s}$$

Le degré de $H_s(x, \xi)$ est constant et égal à τ_s , et on posera $\tau' = \sum_{s=0}^{s=\sigma} \tau_s$.

2) On pose $H(x, \xi) = \prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s(x, \xi)$; on suppose que H est strictement hyperbolique par rapport à $N = (\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n+1})$, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$,

$H(x, \xi_0, \eta') = 0$ admet pour η' réel, $\eta' \neq 0$, τ' racines distinctes réelles $(\xi_0^\rho(x, \eta'))$, $1 \leq \rho \leq \tau'$.

3) Pour x fixé, $\mathcal{O}_s$ désigne l'anneau localisé de $\mathbb{R}[\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n]$ par

rapport à l'idéal engendré par H_s . Dans $\mathcal{O}_s$, si $\sim$ désigne l'équivalence des matrices :

$$(H_B^A) \sim \begin{pmatrix} q_1(s) & & & 0 \\ H_s & q_2(s) & & \\ & H_s & \ddots & \\ 0 & & & H_s q_m(s) \end{pmatrix}$$

$$q_1(s), q_2(s), \dots, q_m(s).$$

On fait l'hypothèse que $q_1(s)$ reste constant quand x varie. Ces hypothèses sont du type de celles faites par J. Vaillant dans ⁽⁹⁾ et ⁽¹⁰⁾.

4) $A_A'^B$ désigne le cofacteur d'ordre $(m-1)$ de H_B^A dans le symbole principal de h ,

$$A_A'^B = \prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s^{q_2(s)+\dots+q_m(s)} \cdot A_A^B.$$

On peut vérifier que les A_A^B sont des fonctions régulières en (x, ξ) . On vérifie que :

$$K_C^A = \sum_{B=1}^{B=m} H_B^A A_C^B = \prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s^{q_1(s)} \cdot \delta_C^A$$

δ_C^A désigne le symbole de Kröneckers.

On suppose l'existence d'un opérateur différentiel matriciel $a = (a_C^B)$ de symbole principal (A_C^B) vérifiant :

$$h \cdot a = k = (k_C^A) = \sum_{B=1}^{B=m} h_B^A a_C^B = \sum_{r=0}^{r=\bar{c}} \ell_r(h_0)^{[\alpha_0-r]_+} \dots (h_\sigma)^{[\alpha_\sigma-r]_+},$$

ℓ_r opérateur différentiel matriciel, (h_s) opérateur différentiel de symbole principal H_s , $[\alpha_s-r]_+ = \text{Max}(0, \alpha_s-r)$, ℓ_0 matrice identique, $\bar{c}$ = ordre de k , $\alpha_s = q_1(s)$, de telle façon que :

$$\text{ordre } (k - \sum_{\rho=0}^{\rho=r} \ell_\rho(h_0)^{[\alpha_0-\rho]_+} \dots h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]_+}) < \bar{c} - r.$$

On pourra remarquer que k_A^A est, pour tout $1 \leq A \leq m$, bien décomposable au sens défini par J.C. De Paris ⁽³⁾.

On a aussi :

$$K_B^C = \sum_{A=1}^{A=m} A_A^C H_B^A$$

et on suppose l'existence d'un opérateur différentiel matriciel $a' = (a_A'^C)$

de symbole principal (A_A^C) de telle sorte que $k' = \mathcal{A}' \circ h$ possède une décomposition du genre précédent.

Ces hypothèses sont celles qu'utilise D. Gourdin dans la note ⁽⁶⁾ et dans ⁽¹¹⁾.

II. Développements asymptotiques et problème de Cauchy asymptotique.

1) Développements asymptotiques.

Soit $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, f_j est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (ou une distribution) vérifiant : $f_j' = f_{j-1}$.

Soit K_0 un facteur H_s et k_0 un opérateur différentiel de partie principale K_0 . On pose $\nu_0 = q_1(s)$.

On a ⁽¹¹⁾ :

$$k = \sum_{r=0}^{\bar{r}} \ell_r k_0 [\nu_0^{-r}]_+.$$

On cherche, pour tout point x_0 de X une solution formelle non nulle de la forme :

$$z = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j \cdot f_j \circ \varphi$$

où φ est une fonction $\mathcal{G}^\infty$ réelle caractéristique pour k_0 dans un voisinage V de x_0 , telle que $\text{grad} \varphi(x_0) \neq 0$

$$z^j = (z^{C,j}) \in \mathcal{G}^\omega(V), \quad z^{C,j} = 0 \quad \text{si } j < 0;$$

z vérifie donc $k(z) = 0$.

On obtient :

$$k(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{r=0}^{\bar{r}} \mathcal{K}^r(\varphi) [z^{\bar{r}+j-r}] \times f_j \circ \varphi$$

$\mathcal{K}^r(\varphi)$ est un opérateur matriciel d'ordre $\leq r$ dépendant de φ et de k et

$\mathcal{K}^{r,A}(\varphi) = 0$ si $0 \leq r \leq \nu_0 - 1$. On obtient pour : $\bar{r} + j = \nu_0$,

$$\sum_{r=0}^{\nu_0} \mathcal{L}_r(\varphi) [\mathcal{E}(\varphi) \nu_0^{-r} [z^0]] = 0;$$

Si $A \neq C$ $\mathcal{L}_{0,C}^A(\varphi) = 0$ et $\mathcal{L}_{0,A}^A(\varphi) \neq 0$. $\tau(\varphi)$ est l'opérateur bicaractéristique associé à k_0 ; $\mathcal{L}_r(\varphi)$ est d'ordre 0. On obtient z^0 en intégrant un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre ν_0 le long des bicaractéristiques relatives à φ . z^j , $j > 0$, s'obtient en intégrant un système d'équations différentielles ayant même premier membre que le précédent et un second membre dépendant de z^ℓ , $\ell < j$, de φ et de l'opérateur k .

2) Problème de Cauchy asymptotique.

$x^0 = 0$, par exemple est un hyperplan non caractéristique pour k ; $\psi(x')$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur W voisinage de 0 , de gradient non nul;
 $x' = (x^1, x^2, \dots, x^n)$.

Pour simplifier la présentation, on supposera $\alpha_s = 1$, si $s \neq 1$. On cherche des solutions formelles z_ρ de la forme :

$$z_\rho = \sum_{j=\beta(\rho)}^{\infty} z_\rho^j x^{f_{j+1}-\alpha_0} \cdot \psi^\rho$$

$$\beta(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \leq \tau_0 \\ \alpha'_0 - 1 & \text{si } \tau_0 < \rho \leq \tau' \end{cases}$$

chaque ψ^ρ vérifie l'équation caractéristique relative à H et est telle que : $\psi^\rho(0, x') = \psi(x')$, dans un voisinage V de l'origine et que :

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \psi^\rho(0, x') = \xi_0^\rho(x', \text{grad } \psi(x')) .$$

On se donne des fonctions données de Cauchy B_τ^j , $\mathcal{C}^\infty$ dans W ; les z_ρ doivent vérifier les données de Cauchy :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} \right)^\tau \left(\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau'} z_\rho \right) \Big|_{x_0=0} = \sum_{j=-\tau}^{\infty} B_\tau^j x^{f_j} \cdot \psi, \quad 0 \leq \tau \leq \tau'-1.$$

On identifie les différents coefficients des f_j dans les deux membres et on trouve sur $x_0 = 0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} \right)^p z_\rho^0 = 0 \quad 0 \leq p \leq \alpha'_0 - 2$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} \right)^p z_\rho^1 = 0 \quad 0 \leq p \leq \alpha'_0 - 3$$

$\vdots$

$$z_\rho^{\alpha'_0-2} = 0 \quad \text{et :}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} \sum_{p=0}^{\alpha'_0-1} c_\tau^p (\xi_0^\rho)^{\tau-p} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \right)^p z_\rho^{\alpha'_0-1-p}(0, x') + \sum_{\rho > \tau_0} (\xi_0^\rho)^\tau z_\rho^{\alpha'_0-1}(0, x') = B_\tau^{\tau}$$

$0 \leq \tau \leq \tau'-1$ (on conviendra que $c_\tau^p = 0$ si $p > \tau$).

Le déterminant du système (3) :

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{p!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_o^p} \right)^p [\xi_o^p]^z & [\xi_o^p]^z \\ 1 \leq p \leq z_o & p > z_o \\ 0 \leq p \leq \alpha_o - 1 & \end{array} \right| \quad \text{est non nul}$$

et on peut déterminer les conditions initiales permettant de résoudre de façon unique le problème de Cauchy asymptotique dans V.

III. Proposition

En utilisant une méthode analogue à celle employée par Hörmander et Duistermaat ⁽⁴⁾ et par J. Chazarain ⁽²⁾ on construit une paramétrix pour le système

Proposition

Pour $t^0 \in [0, T]$, $0 \leq \mu \leq \bar{z} - 1$, $0 \leq z \leq \bar{z} - 1$, il existe des opérateurs matriciels :

$$F_{\mu, \rho}(t^0) \in I^{-\frac{1}{4} - \mu + \alpha_o - 1 - \beta(\rho)}(x, x', c_\rho(t^0))$$

$$\beta(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \leq z_o \\ \alpha_o - 1 & \text{si } \rho > z_o \end{cases}$$

vérifiant : $kF_{\mu, \rho}(t^0) \equiv 0$ (modulo un opérateur à nouveau $\mathcal{O}^\infty$)

$$\gamma_z \left[\sum_{\rho=1}^{\rho=z'} F_{\mu, \rho}(t^0) \right] \equiv \delta_{z, \mu} I,$$

$\delta_{z, \mu}$ symbole de Kröneckere, I opérateur identique, γ_z opérateur de trace sur $x^0 = t^0$ de D_o^z , $c_\rho(t^0)$ relation canonique homogène décrite à partir d'une fonction de phase ψ_ρ associée à ξ_o^p .

On cherche $F_{\mu, \rho}(t^0)$ sous forme de développements asymptotiques

$$F_{\mu, \rho}(t^0) \sim \sum_{j=\beta(\rho)}^{\infty} F_{\mu, \rho}^j(t^0) \quad \text{vérifiant :}$$

$$k \left(\sum_{j \geq \ell} F_{\mu, \rho}^j(t^0) \right) \in I^{-\bar{z} - \frac{1}{4} - \mu - \ell - 1 + \beta(\rho)}(x, x', c_\rho(t^0)), \ell \in \mathbb{N}^*$$

$$\gamma_z \left(\sum_{\rho=1}^{\rho=z'} \sum_{j \leq \alpha_o - \ell} F_{\mu, \rho}^j \right) = \delta_{z, \mu} I \in L^{-\mu + z - (\ell + 1)}(x'), \ell \in \mathbb{N}.$$

On aura localement :

$$[F_{\mu, \rho}^j(t^0) u](x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\varphi^j(x, \eta')} B_{\mu, \rho}^j(x, \eta') \hat{u}(\eta') d\eta'$$

$$u \in C_0^\infty(X', \mathcal{L}_{1/2}) \text{ et } B_{\mu, \rho}^j \in S^{-\mu-j+(\alpha_0-1)}$$

Les symboles $B_{\mu, \rho}^j$ se déterminent par intégration d'un système d'équations différentielles d'ordre α_0 ou d'ordre 1 comme au (II 1)) ; les traces sur $x^0 = t^0$ s'obtiennent comme II 2).

$$\text{On pose } E_\mu(t^0) = \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau'} F_{\mu, \rho}(t^0).$$

IV Théorème

Le problème de Cauchy sous les hypothèse de I :

$$ku = f \quad f = (f^A), \quad f^A \in C^\infty(X, \mathcal{L}_{1/2})$$

$$D_{x^0}^{\bar{z}} u \Big|_{x^0=t^0} = g_{\bar{z}}, \quad g_{\bar{z}} = (g_{\bar{z}}^A), \quad g_{\bar{z}}^A \in C^\infty(X', \mathcal{L}_{1/2}), \quad t^0 \in [0, T]$$

admet une solution unique $u \in C^\infty(X, \mathcal{L}_{1/2})$.

On suit la démonstration de (2). On explicite les opérateurs à noyau C^∞ de la proposition.

On a en effet :

$$\begin{cases} k E_\mu(t^0) = R_\mu(t^0) \text{ opérateur à noyau } \mathcal{G}^\infty \text{ de } X' \text{ dans } X. \\ \gamma_{\bar{z}} E_\mu(t^0) = R_{\bar{z}, \mu}(t^0) + \delta_{\tau, \mu} I, \quad R_{\tau, \mu}(t^0) \text{ opérateur à noyau } \mathcal{G}^\infty \text{ de } X' \text{ dans } X'. \\ 0 \leq \bar{z} \leq \bar{z}-1, \quad 0 \leq \mu \leq \bar{z}-1. \end{cases}$$

On se ramène à des opérateurs G_μ et Q_μ vérifiant :

$$\begin{cases} k G_\mu(t^0) = Q_\mu(t^0) \text{ opérateur à noyau } \mathcal{G}^\infty \text{ de } X' \text{ dans } X. \\ \gamma_{\bar{z}} G_\mu(t^0) = \delta_{\bar{z}, \mu} I. \end{cases}$$

On associe à $G_{\bar{z}-1}$ un opérateur G , au noyau $\mathcal{G}^\infty$ de $Q_{\bar{z}-1}$ un opérateur T vérifiant :

$$\begin{cases} k G = I - T \\ \gamma_{\bar{z}} G = 0. \end{cases}$$

On prouve que $I - T$ admet un inverse T' (en utilisant un lemme de Volterra) qui vérifie :

$$\begin{cases} k G T' = I \\ \gamma_z G T' = 0. \end{cases}$$

La solution au problème de Cauchy est donnée par :

$$u = \sum_{z=0}^{\bar{z}-1} G_z [g_z] + G \circ T' \left[f - \sum_{z=0}^{\bar{z}-1} Q_z [g_z] \right].$$

Pour montrer que u est unique, on prouve que la distribution u vérifiant :

$$\begin{cases} ku = 0 \\ D_0^z u \big|_{x^0=t^0} = 0 \end{cases}$$

est unique en utilisant les propriétés de l'adjoint de k et le théorème de Holgrem.

V. Théorème

L'opérateur h satisfaisant les hypothèses de I, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} hv = f & f = (f^A), f^A \in \mathcal{G}^\infty(X, \mathcal{L}_{1/2}) \\ D_0^z v \big|_{x^0=t^0} = \dot{g}_z & \dot{g}_z = (\dot{g}_z^A), \dot{g}_z^A \in \mathcal{G}^\infty(X', \mathcal{L}_{1/2}), 0 \leq z \leq t-1. \end{cases}$$

admet une solution $v \in \mathcal{G}^\infty(X, \mathcal{L}_{1/2})$ unique.

On prend pour cela : $v = (v^B)$, avec $v^B = \sum_C a_C^B u^C$, où $u = (u^C)$ est la fonction construite par le théorème IV.

On montre que la connaissance des t traces de v permet de déterminer les $\bar{z}$ traces de u sur $x^0 = t^0$ et de construire u .

L'unicité de v se déduit par un procédé analogue à celui utilisé dans IV.

BIBLIOGRAPHIE

- (¹) R. BERZIN-J. VAILLANT : Comptes rendus, t.283, série A, 1976, p.485.
- (²) J. CHAZARAIN : Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 24, n°1, 1974, p.173-202.
- (³) J.C. DE PARIS : J. Math. Pures et Appl. , 51, 1972, p.231-256.
- (⁴) J.J. DULSTERMAAT et L. HÖRMANDER : Acta Math., 128, 1972. p. 183-269
- (⁵) J. LERAY et OHYA : Systèmes linéaires hyperboliques non stricts,
Colloque de Liège, 1964, C.N.R.B.
- (⁶) D. GOURDIN : Comptes rendus, 282, série A, 1976, p.1105.
- (⁷) L. HÖRMANDER : Acta. Math., 127, 1971 p. 79-183
- (⁸) V.M. PETKOV : Equations et systèmes à caractéristiques multiples,
Université Paris VI, Analyse numérique, 1975.
- (⁹) J. VAILLANT : J. Math. Pures et Appli., 50, 1971, p.25-51.
- (¹⁰) J. VAILLANT : Ann. Inst. Fourier, tome 15, fasc. 2, 1965. p. 225 - 311
- (¹¹) D. GOURDIN : A paraître Journal of Math. of Kyoto University.
- (¹²) Y. CHOQUET : J. Math. Pures et Appli. t 45, 1966, p. 371 - 386

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
LABORATOIRE
DE MATHÉMATIQUES PURES
INSTITUT FOURIER