Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Lucien Waelbroeck

Les quotients d'espaces bornologiques complets

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1973-1977), exp. nº 1, p. I1-68
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1977___1_A1_0>

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1973-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LES QUOTIENTS D'ESPACES BORNOLOGIQUES COMPLETS

LUCIEN WAELBROECK

INTRODUCTION

1. La rédaction de ces notes fait suite à une série d'exposés faits au Collège de France en 1974. Il y a des différences sensibles entre les exposés du Collège de France et la matière que l'on trouvera ci-dessous.

Mon but en 1974 était de montrer comment le calcul symbolique, considéré comme classique dans le cas des algèbres de Banach pouvait se généraliser à des algèbres non banachiques. Une des généralisation envisagées était la classe des quotients d'une algèbre de Banach par un idéal banachique non fermé. Le lecteur retrouvera l'essentiel de cette partie du cours dans le paragraphe 1 ci-dessous.

Des notes couvrant le reste du cours sont parues entre temps [13] Il ne m'a pas semblé utile de réexposer ces résultats ici. Une description technique de la catégorie des quotients banachiques et des quotients de b-espaces m'a semblé plus utile.

2. Si E est un espace de Banach, un sous-espace banachique de E est un sous-espace F, muni d'une norme banachique plus fine que la norme induite par celle de E. Si E est un b-espace (un espace bornologique, limite inductive d'espaces de Banach) un sous-b-espace F de E est un sous-espace vectoriel de E avec une b-structure plus fine que la bornologie induite.

Un quotient banachique est, formellement, le quotient d'un espace de Banach par un sous-espace banachique. Un quotient de b-espaces est le quotient, de nouveau formel, d'un b-espace par un sous-b-espace.

On peut définir des morphismes de quotient de b-espaces. Avec la définition que nous adopterons, cette catégorie se trouve être une

catégorie abélienne, une catégorie possédant suffisamment de suites exactes et dans laquelle les suites exactes ont des propriétés agréables. C'est intéressant et utile.

Mais le fait qu'il y ait moyen de faire de l'analyse fonctionnelle avec les objets de cette catégorie me semble au moins aussi important.

3. Un analyste fonctionnel peut manier les quotients banachiques ou les quotients de b-espaces sans connaître leur catégorie. Ce sont de tels raisonnements que le lecteur trouvera au paragraphe 1. On y considère une algèbre de Banach $\mathcal{A}$, un idéal banachique α, et on raisonne dans $\mathcal{A}$ modulo α.

Dans la construction du calcul symbolique en fonction d'éléments non réguliers d'une b-algèbre [10], j'ai été amené à considérer une b-algèbre $\mathcal{A}$, un b-idéal α, et à étudier $\mathcal{A}$ modulo α. Il était essentiel de pouvoir introduire de tels quotients formels, dans au moins une démonstration. Et il était possible de développer toute la théorie dans de tels quotients. Les résultats ainsi établis étaien plus généraux.

Le fait que ces résultats aient été plus généraux ne signifiait pas qu'ils avaient plus d'applications.

I.CNOP [1] et J.P.FERRIER [2], [3] ont trouvé des applications importantes de ces résultats aux fonctions holomorphes à croissance. Ces applications faisaient notamment intervenir le quotient d'une b-algèbre par un idéal qui se trouve être fermé. Mais ils ne savaient a priori pas que l'idéal est fermé. C'est en montrant que le quotient est isomorphe à une b-algèbre qu'ils ont établi le résultat.

4. Les résultats établis au paragraphe 5 sont intéressants. Une q-algèbre associative $\mathcal{A}|\alpha$ est isomorphe au quotient d'une b-algèbre associative $\mathcal{A}_1$ par un b-idéal α_1. On peut trouver $\mathcal{A}_1|\alpha_1$ tel que le centre de $\mathcal{A}_1|\alpha_1$ soit isomorphe à $Z(\mathcal{A}_1) + \alpha_1|\alpha_1$, où $Z(\mathcal{A}_1)$ est le centre de $\mathcal{A}_1$, un élément de $\mathcal{A}_1$ qui est central modulo α_1 est congru modulo α_1 à un élément du centre de $\mathcal{A}_1$. Si $\mathcal{A}|\alpha$ est commutative et associative, $\mathcal{A}|\alpha$ est isomorphe à $\mathcal{A}_2|\alpha_2$ où $\mathcal{A}_2$ est commutative et associative.

On peut espérer qu'une q-algèbre associative sera donnée comme un quotient d'une b-algèbre commutative par un b-idéal. De même les q-algèbres commutatives et associatives que l'on rencontre en pratique seront souvent des quotients d'une b-algèbre commutative et associative par un b-idéal.

Mais si $\mathcal{A}|\alpha$ est une q-algèbre associative, des constructions naturelles effectuées à partir d'éléments du centre de $\mathcal{A}$ feront apparaître de nouveaux éléments, centraux modulo α. En remplaçant $\mathcal{A}|\alpha$ par une q-algèbre isomorphe $\mathcal{A}_1|\alpha_1$, ces éléments centraux modulo α_1 maintenant sont congrus modulo α_1 à des éléments du centre.

5. J'ai commencé à rédiger en 1972 des notes sur les q-espaces et les q-algèbres. Et je me suis assez rapidement convaincu que le sujet n'était pas mûr. Je suis heureux rétrospectivement que ces notes soient restées confidentielles. Je n'étais pas arrivé à une présentation correcte catégoriquement et lisible pour l'analyste fonctionnel.

G.NOEL a repris le sujet entre 1966 et 1969. Il a défini une catégorie ayant des propriétés très semblables à celles de q. Sa

construction utilise l'axiome de l'univers.

Il s'est intéressé notamment aux propriétés multilinéaires de q et au produit tensoriel. Il a construit le produit tensoriel de q-espaces et a montré que, dans la catégorie q, le produit tensoriel de deux espaces de Banach n'était en général pas un espace de Banach. En particulier, le q-espace produit tensoriel de deux espaces de Hilber est un vrai q-espace $E|F$. Le quotient $E/\bar{F}$ est évidemment l'espace des opérateurs à trace.

Le lecteur est renvoyé aux travaux de NOEL pour plus de détails [5], [6], [7], [8].

6. Quelques exemples d'espaces et d'algèbres quotients méritent d'être cités.

a. Soit $\mathcal{A}$ une b-algèbre et soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments du centre de $\mathcal{A}$. L'idéal engendré par $a_1, \ldots, a_n$ possède une bornologie complétante naturelle. Une partie B de cet idéal y est bornée si

$$B \subseteq a_1B_1 + \ldots + a_nB_n$$

avec $B_1, \ldots, B_n$ bornés dans $\mathcal{A}$.

Si α est un b-idéal bilatère de $\mathcal{A}$ et si $a_1, \ldots, a_n$ sont centraux modulo α, donc tels que les applications $x \mapsto a_ix - xa_i$ soient des applications linéaires bornées de $\mathcal{A}$ dans α, la bornologie naturelle de l'idéal engendré par $a_1, \ldots, a_n$ et α est celle pour laquelle B est borné lorsque

$$B \subseteq a_1B_1 + \ldots + a_nB_n + C$$

avec $B_1, \ldots, B_n$ bornés dans $\mathcal{A}$ et C borné dans α.

L'hypothèse de commutativité (a_i central, ou central modulo α) assure en fait que l'idéal à gauche engendré par $a_1, \ldots, a_n$ et α

2. La catégorie q.

2.1. Soit E un b-espace. Un sous b-espace F de E est un sous-espace vectoriel de E, muni d'une bornologie complétante telle que l'inclusion $F \to E$ soit un morphisme de b-espaces.

Définition 2.1. Un q-espace $E|F$ est un couple (E, F) où E est un b-espace et F un sous b-espace de E.

Le q-espace $E|F$ est donc défini uniquement lorsque E est un b-espace, et F un sous-b-espace de E. On a l'égalité $E|F = E'|F'$ lorsque $E = E'$ et $F = F'$.

Définition 2.2. Soient $E|F$ et $E'|F'$ deux q-espaces. Un morphisme strict $\bar{u} : E|F \to E'|F'$ est induit par une application linéaire bornée $u : E \to E'$ appliquant les bornés de F sur des parties bornées de F' (et donc F dans F'). Deux applications $u_1, u_2 : E \to E'$ induisant chacune un morphisme strict induisent le même morphisme strict si $u_2 - u_1$ est une application linéaire bornée de E dans F L'espace des morphismes stricts $E|F \to E'|F'$ sera appelé $\sigma\tilde{q}(E|F, E'|F')$.

La terminologie "u induit un morphisme strict", "le morphisme strict $\bar{u}$ induit par u" est commode et sera réutilisée.

Avec la composition évidente, les q-espaces et leurs morphismes stricts constituent une catégorie que nous appellerons $\tilde{q}$. Cette catégorie nous intéresse, mais ne nous satisfera pas. Si G est un sous b-espace fermé de E, nous souhaiterions que $E|G$ soit isomorphe à $(E/G|0)$, que l'étude de E modulo G soit équivalente à celle de E/G. Mais le morphisme strict que l'on définit évidemment

$E|G \to E/G|0$ n'est un isomorphisme de $\tilde{q}$ que si G est un sous-espace complémenté de E.

Plus généralement, si $E|F$ est un q-espace, si G est un sous-espace de F qui est fermé dans E (G est alors a fortiori fermé dans F), nous souhaitons que le morphisme strict $E|F \to E/G|F/G$ que l'on définit immédiatement soit un isomorphisme. Or ce n'est pas un isomorphisme de $\tilde{q}$ en général. Nous en arrivons à une définition de "pseudo-isomorphisme".

Si $u_1 : E \to E'$ est un morphisme de b-espaces, l'image u_1E de u_1 est le sous-espace vectoriel image, avec la bornologie pour laquelle $C \subseteq u_1E$ est borné lorsque $C = u_1B$ avec B borné dans E. En particulier, $u_1E = E'$ bornologiquement si $u_1 : E \to E'$ est surjectif et tel que tout borné de E' soit l'image d'une partie bornée de E.

Si F' est un sous-b-espace de E', $\bar{u}_1^1F'$ est le b-espace ayant pour éléments les $x \in E$ tels que $u_1x \in F'$ et pour parties bornées les B, bornés dans E et tels que u_1B soit borné dans F'.

<u>Définition 2.3</u>. Le morphisme strict $u : E|F \to E'|F'$ est un pseudo-isomorphisme si parmi les morphismes $u_1 : E \to E'$ qui l'induisent on en trouve un tel que $u_1E = E'$, $F = \bar{u}_1^1F'$ bornologiquement.

En d'autres mots, un pseudo-isomorphisme $E|F \to E'|F'$ est la composée du morphisme

$$E|F \to (E/\mathrm{Ker}\ u_1)|F/(\mathrm{Ker}\ u_1)$$

induit par l'application quotient $E \to E/\mathrm{Ker}\ u_1$, et d'un isomorphisme

$$(E/\mathrm{Ker}\ u_1)|(F/\mathrm{Ker}\ u_1) \to E'|F'$$

induit par un isomorphisme de $E/\mathrm{Ker}\ u_1$ avec E' dont la restriction à $F/\mathrm{Ker}\ u_1$ est un isomorphisme de cet espace avec F'.

rie q est l'espace des germes de fonctions continues à l'origine.

On voit ainsi un espace bornologique séparé s'immerger dans un q-espace $E|F$ dont le quotient séparé $E/\bar{F}$ est nul. La situation est encore plus paradoxale lorsque l'on observe que l'algèbre des fonctions holomorphes nulles à l'origine s'immerge dans le q-espace des germes de fonctions continues. Un b-espace non nul s'immerge dans un q-espace dont le quotient séparé est nul. Est-ce paradoxal ? Je n'en sais rien mais il est clair que nous devrons éviter des "virages dangereux".

7. Je suis convaincu que les idées développées ici s'appliquent à la théorie des opérateurs pseudo-différentiels et à l'étude de la propagation des singularités.

La partie singulière d'une distribution est un élément du quotient de l'espace des distributions par celui des fonctions de classe C_∞, donc de $\mathcal{D}'/\mathcal{E}$. L'espace $\mathcal{E}$ est complet pour sa propre topologie mais est dense dans $\mathcal{D}'$ pour toutes les topologies raisonnables que l'on peut mettre sur $\mathcal{D}'$.

Le quotient de l'algèbre des opérateurs sur $\mathcal{D}'$ qui laissent $\mathcal{E}$ invariant par l'idéal des opérateurs régularisants, qui appliquent $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{E}$, joue un rôle dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels.

8. Une dernière remarque. Ces notes sont rédigées par un analyste fonctionnel qui ne connaît que mal la théorie des catégories. Elles se ressentent de ce fait, beaucoup de démonstrations gagneraient en élégance si elles étaient rédigées par des catégoriciens.

Mon espoir est que d'autres analystes fonctionnels, qui ne connaissent pas beaucoup mieux que moi les catégories, liront ces notes et les comprendront.

1. Les quotients banachiques et le calcul symbolique.

1.1. Définition 1.1. Soit E un espace de Banach. Un sous-espace banachique de E est un sous-espace F, muni d'une norme d'espace de Banach telle que l'inclusion $F \to E$ soit une application continue.

Définition 1.2. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach. Un idéal banachique α de $\mathcal{A}$ est un idéal α, muni d'une norme qui en fait un sous-espace banachique de $\mathcal{A}$.

La définition 2 est justifiée par un certain nombre de miracles, liés aux théorèmes de Banach-Steinhaus et du graphe fermé. Si α est un idéal gaucher et un sous-espace banachique de $\mathcal{A}$, l'application $(a, x) \mapsto a.x$ est une application bilinéaire continue de $\mathcal{A} \times \alpha$ dans α. On peut d'ailleurs observer qu'un sous-espace banachisable d'un espace de Banach ne peut être banachisé que d'une manière (à une équivalence de norme près).

Si les théorèmes de Banach-Steinhaus et du graphe fermé ne s'appliquent pas, si $\mathcal{A}$ est une algèbre topologique par exemple, et α un idéal muni d'une topologie plus fine que celle induite par $\mathcal{A}$, nous dirons que α est un idéal topologique de $\mathcal{A}$ si la multiplication est une application continue (ou éventuellement séparément continue) de $\mathcal{A} \times \alpha$ dans α.

Nous supposerons dans ce paragraphe que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach commutative associative à unité, et que α est un idéal banachique de $\mathcal{A}$. Nous étudierons $\mathcal{A}/\alpha$. Ultérieurement, nous définirons des isomorphismes d'algèbres quotients banachiques, nous montrerons qu'une algèbre quotient banachique qui est commutative, associative, et à unité est isomorphe au quotient d'une algèbre de Banach commutative, associa-

tive et à unité par un idéal.

Dans la mesure où ils sont naturels pour les isomorphismes évoqués, et ils le sont, les résultats que nous obtenons s'appliqueront par exemple à des algèbres $\mathcal{A}/\alpha$ où $\mathcal{A}$ n'est supposée ni commutative, ni associative, ni à unité, mais où α est un idéal bilatère banachique, et où l'application commutateur et l'application associateur appliquent $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ dans α, et où $e \in \mathcal{A}$ existe tel que pour tout $a \in \mathcal{A}$, $a - ea \in \alpha$, $a - ae \in \alpha$. Les résultats s'appliquent donc (puisque nous sommes dans le cas banachique) lorsque $\mathcal{A}/\alpha$ est une algèbre commutative, associative, et à unité.

1.2. Les propriétés spectrales proprement dites de $\mathcal{A}/\alpha$ découlent immédiatement des résultats de Gelfand. Les idéaux maximaux de $\mathcal{A}$ sont fermés. Ils contiennent $\bar{\alpha}$, la fermeture de α, lorsqu'ils contiennent α. Il y a une correspondance bijective entre l'espace structurel (l'espace des idéaux maximaux) de $\mathcal{A}/\alpha$ et celui de l'algèbre de Banach $\mathcal{A}/\bar{\alpha}$.

Identifiant ces deux espaces structurels, $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}/\alpha} = \mathfrak{M}_{\mathcal{A}/\bar{\alpha}}$, nous obtenons un homomorphisme $\mathcal{A}/\alpha \to C(\mathfrak{M}_{\mathcal{A}/\alpha})$ qui n'est que la composée de l'application quotient $\mathcal{A}/\alpha \to \mathcal{A}/\bar{\alpha}$ avec l'homomorphisme obtenu par Gelfand de $\mathcal{A}/\bar{\alpha}$ dans $C(\mathfrak{M}_{\mathcal{A}/\bar{\alpha}})$.

Si l'on veut, $\bar{\alpha}/\alpha$ est dans le radical de $\mathcal{A}/\alpha$, et on sait qu'il y a une équivalence spectrale entre une algèbre de Banach et l'algèbre semi simple associée.

Nous retiendrons toutefois les définitions du spectre, ou du spectre joint modulo α d'éléments de $\mathcal{A}$.

<u>Définition 1.3</u>. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^n$. Le spectre de $(a_1, \ldots, a_n)$ modulo α est l'ensemble

$$sp_\alpha(a_1, \ldots, a_n) = \{(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n \mid 1 \in \Sigma_1^n (a_i - s_i)\mathcal{A} + \alpha\}$$

Il est clair que cet ensemble est une partie compacte non vide de $\mathbb{C}^n$. C'est d'ailleurs le spectre des classes d'équivalence $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$ des éléments $a_1, \ldots, a_n$ dans l'algèbre de Banach $\mathcal{A}/\bar{\alpha}$.

1.3. <u>Proposition 1.1</u>. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative associative à unité, et soit α un idéal banachique de $\mathcal{A}$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathcal{A}$. Il existe des fonctions $u_i(s)$, de classe C_∞ à valeurs dans $\mathcal{A}$, et une fonction $v(s)$, de classe C_∞ à valeurs dans α, définies sur $\mathbb{C}^n \setminus sp_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$, et vérifiant identiquement la relation

$$1 = \Sigma(s_i - a_i)u_i(s) + v(s)$$

La fonction v peut être choisie nulle au voisinage de l'infini.

En tout $s \notin sp_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$, on peut choisir $u_{i.s} \in \mathcal{A}$, $v_s \in \alpha$ tels que $1 = \Sigma(s_i - a_i)u_{i.s} + v_s$. Si $h \in \mathbb{C}^n$ est petit, si $\Sigma|h_i| . \|u_{i.s}\| < 1$, $1 + \Sigma h_i\, u_{i.s}$ a un inverse. Nous poserons

$$u_s(s + h) = u_s[1 + \Sigma h_i\, u_{i.s}]^{-1}$$

$$v_s(s + h) = v_s[1 + \Sigma h_i\, u_{i.s}]^{-1}$$

Ces fonctions sont définies au voisinage de s, et respectivement holomorphes à valeurs dans $\mathcal{A}$ et dans α. Etant holomorphes, elles sont de classe C_∞.

Par ailleurs, si $\Sigma|s_i|^2 > \Sigma\|a_i\|^2$, $\|\Sigma\bar{s}_i\, a_i\| < \Sigma\,|s_i|^2$ et $\Sigma\bar{s}_i(s_i - a_i)$ a un inverse. On pose

$$u_{i.\infty}(s) = \bar{s}_i\,[\Sigma\bar{s}_i(s_i - a_i)]^{-1}$$

$$v_\infty(s) = 0$$

et

$$\Sigma(s_i - a_i)u_{i.\infty}(s) + v_\infty(s) = 1$$

Une partition convenable de l'unité nous permet de recoller ces fonctions $u_{i.s}$, v_s, et de définir les fonctions de classe C_∞ à valeurs dans $\mathfrak{A}$, et dans α, dont l'existence est annoncée dans la proposition 1.

1.4. Le calcul fonctionnel holomorphe en fonction d'éléments de $\mathfrak{A}/\alpha$, ne découle pas des résultats connus dans le cas des algèbres de Banach. On sait d'ailleurs que le calcul symbolique pour les éléments d'une algèbre de Banach n'est pas une conséquence des résultats que l'on obtiendrait pour la réduite semi-simple de l'algèbre.

<u>Proposition 1.2</u>. Il existe un homomorphisme dans $\mathfrak{A}/\alpha$ de l'algèbre des fonctions holomorphes près du spectre de a modulo α, qui applique la constante unité sur l'unité de $\mathfrak{A}/\alpha$ et la fonction holomorphe z (l'application identique de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) sur la classe d'équivalence de a modulo α.

Soit U un voisinage de $sp_\alpha\, a$. Soit V un voisinage à frontière rectifiable de $sp_\alpha\, a$, et relativement compact dans U. Soit $j = \partial V$ la frontière de V. Soit u une fonction de classe C_∞ sur $\mathbb{C}\setminus sp_\alpha\, a$, à valeurs dans $\mathfrak{A}$, et telle que

$$1 - (s - a)u(s) = v(s)$$

soit une fonction de classe C_∞ à valeurs dans α.

Nous appliquons $f \in \mathcal{O}(U)$ sur

$$\tau(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_j f(s)u(s)ds$$

L'application τ est une application continue de $\mathcal{O}(U)$ dans $\mathfrak{A}$. Elle n'est pas déterminée univoquement, elle dépend du choix de u et de j. Montrons qu'elle est déterminée univoquement modulo α.

Si u' est une nouvelle fonction de classe C_∞ à valeurs dans $\mathcal{A}$ et v' de classe C_∞ à valeurs dans α telles que

$$(s - a)u'(s) + v'(s) = 1$$

nous voyons que

$$u' - u = u'[(s - a)u + v] - [(s - a)u' + v']u$$

$$= u'v - v'u$$

Cette fonction est de classe C_∞ à valeurs dans α. Il en résulte que

$$f \mapsto \frac{1}{2\Pi i} \int_j f(s)[u'(s) - u(s)]ds$$

est une application continue de $\mathcal{O}(U)$ dans α.

Par ailleurs

$$(s - a)u(s) + v(s) = 1$$

donc

$$(s - a)\bar{\partial}u(s, d\bar{s}) + \bar{\partial}v(s, d\bar{s}) = 0$$

Multipliant par u et appliquant le fait que $(s - a)u(s) = 1 - v(s)$ nous voyons que

$$\bar{\partial}u = v\bar{\partial}u - u\bar{\partial}v$$

c'est-à-dire, $\bar{\partial}u$ est une forme de classe C_∞ à valeurs dans α.

Si V' est un nouveau voisinage de $sp_\alpha a$, à bord rectifiable, soit $j' = \partial V'$, nous avons

$$\int_j f(s)u(s)ds - \int_{j'} f(s)u(s)ds = \int_{(V-V')} f(s)\bar{\partial}u(s, d\bar{s})ds$$

Les applications

$$f \mapsto \frac{1}{2\Pi i} \int_j f(s)u(s)ds$$

$$f \mapsto \frac{1}{2\Pi i} \int_{j'} f(s)u(s)ds$$

ne diffèrent donc que d'une application continue de $\mathcal{O}(U)$ dans α.

Il reste à montrer que τ est un homomorphisme de $\mathcal{O}(U)$ dans $\mathcal{A}$ modulo α, que $(f,g) \to \tau(f.g) - \tau(f)\tau(g)$ est une application bilinéaire continue de $\mathcal{O}(U) \times \mathcal{O}(U)$ dans α. Soit V' un voisinage de $sp_\alpha\, a$, relativement compact dans V, à frontière rectifiable, et

$$\tau'(g) = \frac{1}{2\Pi i} \int_{j'} f(s)u(s)ds$$

si $j' = \partial V'$. Il suffira de montrer que $\tau'(f.g) - \tau(f)\tau'(g) \in \alpha$.

Or

$$\tau(f)\tau'(g) = \frac{1}{(2\Pi i)^2} \int_{j\times j'} f(s)g(s')u(s)u'(s')dsds'$$

On généralise l'équation de la résolvante

$$\begin{aligned} u(s) - u(s') &= u(s)[(s' - a)u(s') + v(s')] \\ &\quad - [(s - a)u(s) + v(s)]u(s') \\ &= (s' - s)u(s)u(s') + u(s)v(s') - v(s)u(s') \end{aligned}$$

donc

$$u(s)u(s') = - \frac{u(s) - u(s')}{s - s'} + w(s, s')$$

où $w(s, s')$ est une fonction à valeurs dans α, de classe C_∞ sur le complément de la diagonale. Et on obtient

$$\begin{aligned} \tau(f)\tau'(g) &= + \frac{1}{(2\Pi i)^2} \int_{j\times j'} f(s)g(s') \frac{u(s')}{s - s'} dsds' \\ &\quad + \frac{1}{(2\Pi i)^2} \int_{j\times j'} f(s)g(s') \frac{u(s)}{s' - s} dsds' + \eta \end{aligned}$$

où $\eta \in \alpha$ (il s'agit d'une intégrale, où intervient la fonction w).

Dans la première intégrale ci-dessus nous intégrons d'abord par rapport à s. La fonction f est holomorphe sur U. Le point s' est intérieur à j.

$$\frac{1}{2\Pi i} \int_j \frac{f(s)}{s - s'} ds = f(s')$$

L'intégrale est donc égale à

$$\frac{1}{2\Pi i}\int_{j'} f(s')g(s')u(s')ds' = \tau'(f.g)$$

Dans la seconde intégrale, nous intégrons d'abord par rapport à s' La fonction g est holomorphe sur U. Le point s est extérieur à j'

$$\int g(s')\frac{ds'}{s'-s} = 0$$

L'intégrale s'annule. Et on a

$$\tau(f)\tau'(g) = \tau'(f.g) + \eta$$

où $\eta \in \alpha$. Donc $\tau(f)\tau(g) - \tau(f.g) \in \alpha$ quels que soient $f, g \in \mathcal{O}(U)$. On peut maintenant, soit appliquer le théorème du graphe fermé et montre que l'application de $\mathcal{O}(U) \times \mathcal{O}(U)$ dans α, qui applique (f, g) sur

$$\eta(f, g) = \tau(f)\tau(g) - \tau(f.g)$$

est continue, soit relire la démonstration ci-dessus, trouver une expression explicite de $\eta(f, g)$ dans α et voir que η est bien une application bilinéaire continue.

1.5. Nous voulons maintenant construire la calcul symbolique en fonction de n éléments $a_1, \ldots, a_n$ d'une algèbre de Banach $\mathcal{A}$, modulo un idéal banachique α. Nous considérons donc le spectre joint de ces éléments modulo α (voir définition 1.3.).

$$sp_\alpha(a_1, \ldots, a_n) = \{(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n \mid 1 \notin \Sigma(s_i - a_i)\mathcal{A} + \alpha\}$$

<u>Proposition 1.3</u>. Il existe un homomorphisme de l'algèbre $\mathcal{O}(sp_\alpha(a_1, \ldots, a_n))$ des fonctions holomorphes près de $sp_\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathcal{A}/\alpha$ qui applique la constante unité sur l'unité de $\mathcal{A}/\alpha$ et la fonction holomorphe z_i sur la classe d'équivalence de a_i modulo α (sur $a_i + \alpha$).

La construction de cet homomorphisme est une paraphrase de la construction classique, valable dans la théorie des algèbres de Banach. En plus des éléments $a_1, \ldots, a_n$, nous considérons des éléments $b_1, \ldots, b_m$, et des polynômes $P_1, \ldots, P_h$ de $m + n$ variables. Nous considérons des voisinages U_i de $sp_\alpha a_i$, des voisinages V_j de $sp_\alpha b$ et des voisinages W_k de $sp_\alpha P_k(a)$. Si $(s, t) = (s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_m)$ désigne un élément général de $\mathbb{C}^{n+m}$, nous posons

$$\Delta_1 = \{(s, t) \mid \forall i : s_i \in U_i, \forall j : t_j \in V_j, \forall k : P_k(s, t) \in W_k\}$$

et, si $\Pi : \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^n$ est la projection $\mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^n$, nous posons

$$\Delta = \Pi\, \Delta_1$$

L'ensemble Δ est ouvert. Il contient $sp_\alpha(a_1, \ldots, a_n)$. En effet, pour tout $s = (s_1, \ldots, s_n) \in sp_\alpha(a)$, nous trouvons une forme linéaire multiplicative χ sur $\mathfrak{a}$, nulle sur α, telle que $\chi(a_i) = s_i$. Nous posons $t_j = \chi(b_j)$, observons que $s_i \in sp_\alpha a_i \subseteq U_i$, que $t_j \in sp_\alpha b_j \subseteq V_j$, et que $P_k(s, t) = \chi(P_k(a, b)) \in sp_\alpha P_k(a, b) \subseteq W_k$. Les conditions pour que $(s, t) \in \Delta_1$, donc que $s \in \Delta$ sont vérifiées.

L'ensemble des parties ouvertes Δ ainsi construit est évidemment une base de filtre. Au moins un des éléments de cette base est relativement compact. Nous allons montrer qu'il s'agit de la base du filtre de tous les voisinages du spectre de $(a_1, \ldots, a_n)$ modulo α. Il suffira de trouver pour tout $s \notin sp_\alpha a$ des éléments b et des polynômes P (ou un polynôme) tels que s ne soit pas adhérent à l'ensemble Δ ainsi construit.

Mais, si $s \notin sp_\alpha a$, nous trouvons des $b = (b_1, \ldots, b_n)$ et un $v \in \alpha$ tels que $\Sigma(s_i - a_i)b_i + v = 1$. Soient U_i, V_i des voisinages relativement compacts de $sp_\alpha a_i$, $sp_\alpha b_i$; soit P le polynôme $P(z, y) = \Sigma(s_i - z_i)y_i$ et W le disque $|t - 1| < 1/2$. L'adhérence

de l'ensemble Δ_1 est contenue dans

$$\{(z, y) \mid \forall\, i : z_i \in \bar{U}_i,\ y_i \in \bar{V}_i,\ |\Sigma(s_i - z_i)y_i - 1| \leqslant \tfrac{1}{2}\}$$

Cette adhérence est donc compacte, et ne contient (s, y) pour aucun $y \in \mathbb{C}^n$. Il en résulte que s n'est pas adhérent à la projection Δ de Δ_1.

Soit maintenant T un voisinage ouvert de $sp_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$. Soient $b_1, \ldots, b_m, P_1, \ldots, P_h, U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_m, W_1, \ldots, W_h$ de nouveaux éléments, des polynômes, et des voisinages de spectres, tels que $\Delta \subsetneq T$. Nous déterminons, en appliquant la proposition 1.2, des applications linéaires bornées

$$\tau_{a_i} : \mathcal{O}(U_i) \to \mathcal{A},\ \tau_{b_j} : \mathcal{O}(V_j) \to \mathcal{A},\ \tau_{P_k(a,b)} : \mathcal{O}(W_k) \to \mathcal{A}$$

Soit

$$\mathcal{U} = \prod U_i \times \prod V_j \times \prod W_k$$

$\mathcal{O}(\mathcal{U})$ est le produit tensoriel projectif des $\mathcal{O}(U_i)$, $\mathcal{O}(V_j)$, $\mathcal{O}(W_k)$. Les propriétés fonctorielles du produit tensoriel projectif fournissent une application $\mathcal{O}(\mathcal{U}) \to \mathcal{A}^{\hat{\otimes} n+m+h}$. La multiplication de $\mathcal{A}$ définit une application linéaire $\mathcal{A}^{\hat{\otimes} n+m+h} \to \mathcal{A}$. La composée de ces applications est une application continue $\tau : \mathcal{O}(\mathcal{U}) \to \mathcal{A}$.

Chaque $\tau_{a_i}, \tau_{b_j}, \tau_{P_k(a)}$ est un homomorphisme de l'algèbre correspondante de fonction holomorphe dans $\mathcal{A}$ modulo α. Leur produit tensoriel est de ce fait un homomorphisme de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ dans $\mathcal{A}^{\hat{\otimes} n+m+h}$ modul α_{m+n+h}, si pour tout r, α_r est l'idéal de $\mathcal{A}^{\hat{\otimes} r}$ donné par

$$\alpha_r = \alpha \hat{\otimes} \mathcal{A}^{\hat{\otimes} r-1} + \mathcal{A} \hat{\otimes} \alpha \hat{\otimes} \mathcal{A}^{\hat{\otimes} r-1} + \ldots + \mathcal{A}^{\hat{\otimes} r-1} \hat{\otimes} \alpha$$

Comme la multiplication applique $\mathcal{A}^{\hat{\otimes} r}$ dans $\mathcal{A}$ et α_r dans α, l'application τ est un homomorphisme de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ dans $\mathcal{A}$ mod α, et induit un homomorphisme de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ dans $\mathcal{A}/\alpha$. Cet homomorphisme applique unité

sur unité, z_i sur $a_i + \alpha$, il applique y_j sur $b_j + \alpha$ et t_k sur $P_k(a, b) + \alpha$. Le noyau de cet homomorphisme contient l'idéal engendré par les fonctions $t_k - P_k(y, z)$.

On montre dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes que le quotient de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ par l'idéal engendré par les fonctions $t_k - P_k(y, z)$ s'identifie avec $\mathcal{O}(\Delta_1)$. De manière précise, l'application associant à la fonction $F(z, y, t)$ la fonction $F(z, y, P(z, y))$ est un homomorphisme de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ sur $\mathcal{O}(\Delta_1)$, dont le noyau est engendré par les fonctions $t_k - P_k(z, y)$.

L'homomorphisme de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ dans $\mathcal{A}/\alpha$ que définit τ induit donc un homomorphisme de $\mathcal{O}(\Delta_1)$ dans $\mathcal{A}/\alpha$. Nous appliquons $\mathcal{O}(T)$ dans $\mathcal{O}(\Delta_1)$, appliquant $f \in \mathcal{O}(T)$ sur $f \circ \Pi$. (Rappelons que $\Pi : \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^n$ est la projection $(s, t) \mapsto s$). La composée des homomorphismes $\mathcal{O}(T) \to \mathcal{O}(\Delta_1)$ et $\mathcal{O}(\Delta_1) \to \mathcal{A}/\alpha$ est un homomorphisme $\mathcal{O}(T) \to \mathcal{A}/\alpha$ que nous appellerons t. Il s'agit de montrer que t ne dépend pas des nombreux choix que nous avons dû faire lors de sa construction.

Nous pouvons par exemple considérer d'autres éléments $b'_1, \ldots, b'_{m'}$ de $\mathcal{A}$, des polynômes $P'_1, \ldots, P'_{h'}$ de $n + m'$ variables, des voisinages U'_i, V'_j, W'_k des spectres respectifs $\mathrm{sp}\, a'_i$, $\mathrm{sp}\, b'_j$, $\mathrm{sp}\, P'_k(a, b')$, et supposer que $\Delta' = \Pi' \Delta'_1 \subseteq T$ si

$$\Delta'_1 = \{(z, y') \mid z_i \in U'_i,\ y'_j \in V'_j,\ P'_k(z, y') \in W'_k\}$$

et $\Pi' : \mathbb{C}^{n+m'} \to \mathbb{C}^n$ est la projection $(z, y') \mapsto z$. La fonction $f \in \mathcal{O}(T)$ sera appliquée sur la classe d'équivalence de $\tau'(F)$ si $F \in \mathcal{O}(\mathcal{U}') = \mathcal{O}(\prod U'_i \times \prod V'_j \times \prod W'_k)$ est tel que $F(z, y', P'(z, y')) = f(z$ lorsque $(z, y') \in \Delta'_1$, où τ' est le produit tensoriel des applications $\tau_{a'_i}$, $\tau_{b'_j}$, et $\tau_{c'_k}$ soit $t'(f)$ cette nouvelle classe d'équivalence. Il s'agit de montrer que $t(f) = t'(f)$.

Nous introduisons $m'' = m + m'$, $h'' = h + h'$, $b''_j = b_j$ si $j = 1, \ldots, m$, $b''_j = b'_{j-m}$ si $j = m+1, \ldots, m+m'$ donc $b'' = (b, b')$, de même $y'' = (y, y')$, et $P''_k(z, y'') = P_k(z, y)$ si $k = 1, \ldots, h$, tandis que $P''_k(z, y'') = P'_{k-h}(z, y')$ si $k = h+1, \ldots, h+h'$.
Nous posons également $U''_i = U_i \cap U'_i$; $V''_j = V_j$ si $j = 1, \ldots, m$; $V''_j = V'_{j-m}$ si $j = m+1, \ldots, m+m'$; $W''_k = W_k$ si $k = 1, \ldots, h$ et $W''_k = W'_{k-h}$ si $k = h+1, \ldots, h+h'$.

$t''(f)$ sera défini à partir de U'', b'', V'', P'', W'' comme $t(f)$, $t'(f)$ l'ont été à partir de U, b, V, P et W ou respectivement U', b', V', P' et W'. Nous montrerons que $t = t''$. La même démonstration montrerait que $t' = t''$, et donc $t = t'$.

$F(z, y, t)$ a été défini sur $\mathcal{U}$ de manière que $F(z, y, P) = f(z)$ lorsque $(z, y) \in \Delta_1$. Considérons $\mathcal{U}'' = \prod U''_i \times \prod V''_j \times \prod W''_k$ et posons

$$F''(z'', y'', t'') = F(z, y, t)$$

si $y'' = (y, y')$, $t'' = (t, t')$. La fonction est donc le produit cartésien de la constante unité par la restriction de F à $\prod U''_i \times \prod V_j \times \prod W_k = \mathcal{U}_1$. Modulo des éléments de α, $\tau''(F'')$ est le produit de $\tau(F)$ par l'unité de $\mathcal{A}$. Ce qui montre bien que $\tau''(F'') \equiv \tau(F) \mod \alpha$, que $t''(F'') = t(F)$.

1.6. Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach, si α est un idéal banachique de $\mathcal{A}$, nous avons construit un homomorphisme de $\theta(sp_\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathcal{A}/\alpha$. Il n'est pas question de dire que cet homomorphisme est continu, $\mathcal{A}/\alpha$ n'est pas un espace topologique, au moins pas un espace topologique séparé si α n'est pas un idéal fermé.

Dans le cas où $n = 1$ (ci-dessus, paragraphe 1.3), l'homomorphisme $\theta(sp_\alpha\, a) \to \mathcal{A}/\alpha$ a des propriétés de continuité évidentes. Pour chaque voisinage U de $sp_\alpha\, a$, nous avons une famille privilégiée d'applica-

tions linéaires continues $\tau_U : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{A}$. Deux applications de la famille ne diffèrent que d'une application linéaire continue $\mathcal{O}(U) \to \alpha$. Chaque telle application est un homomorhisme de $\mathcal{O}(U)$ dans $\mathcal{A}$ modulo α. La composée de la restriction $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U')$ avec $\tau_{U'}$ est un élément de la classe de τ_U (modulo les applications de $\mathcal{O}(U)$ dans α

Notre but est de montrer que la situation est telle que décrite ci-dessus, quel que soit n.

<u>Définition 1.4</u>. Soit X un espace de Silva nucléaire, c'est-à-dire la limite inductive d'une suite d'espaces de Banach X_n, pour des morphismes structurels $X_n \to X_{n+1}$ injectifs et nucléaires. Soit E un espace de Banach, et F un sous-espace banachique de E. Une application permise de X dans E mod F est un élément de la limite projective des espaces

$$\mathcal{L}(X_n, E)/\mathcal{L}(X_n, F)$$

pour les applications structurelles.

$$\mathcal{L}(X_{n+1}, E)/\mathcal{L}(X_{n+1}, F) \to \mathcal{L}(X_n, E)/\mathcal{L}(X_n, F)$$

induites par la restriction de X_{n+1} à X_n.

<u>Définition 1.4'</u>. Supposons que X soit une algèbre de Silva nucléaire donc que $X = \cup X_n$ est un espace de Silva nucléaire, muni d'une multiplication bilinéaire et telle que pour tout n il existe n' avec $X_n . X_n \subseteq X_{n'}$. Supposons que $\mathcal{A}$ soit une algèbre de Banach et α un idéal banachique de $\mathcal{A}$. Une application permise de X dans $\mathcal{A}$ mod α est une application permise $\{u_n\}$ de l'espace de Silva nucléaire X dans l'espace quotient banachique $\mathcal{A}$ mod α telle que $(x, y) \mapsto u_{n'}(x . y) - u_n(x)u_n(y)$ applique $X \times X$ dans α si n' est choisi tel que $X_n . X_n \subseteq X_{n'}$.

Il est utile de supposer X nucléaire si l'on veut que nos applications permises aient les propriétés de stabilité souhaitées. En pratique, si X_n n'était pas nucléaire, il faudrait définir des applications permises plus générales que celles des définitions 1.4, 1.4'.

<u>Proposition 1.4</u>. Soit X un espace de Silva nucléaire, $Y \subseteq X$ un sous-espace fermé. Soit E un espace de Banach, et F un sous-espace banachique de E. Soit $u = \{u_n\}$ une application permise de X dans E telle que $u_n(X_n \cap Y) \subseteq F$ quel que soit n. Alors u est la composée d'une application permise de X/Y dans E modulo F avec l'application quotient $X \to X/Y$.

Si X est une algèbre de Silva nucléaire, Y un idéal fermé, si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach et α un idéal banachique de $\mathcal{A}$, une application permise $u = \{u_n\}$ de X dans $\mathcal{A}$ telle que $u_n(X_n \cap Y) \subseteq \alpha$ pour tout n est la composée d'une application permise de X/Y dans $\mathcal{A}$ mod α avec l'application quotient $X \to X/Y$.

Nous poserons $Y_n = X_n \cap Y$, Y_n est un sous-espace fermé de l'espace de Banach X_n. Une application $u_n : X_n \to E$ est donnée pour tout n, et $u_n Y_n \subseteq F$. L'application $u_n : Y_n \to F$ est d'ailleurs continue puisque son graphe est fermé.

L'application structurelle $X_n/Y_n \to X_{n+2}/Y_{n+2}$ est injective et nucléaire (elle est injective parce que $Y_n = X_n \cap Y_{n+2}$, nucléaire parce que les applications structurelles $X_n \to X_{n+1}$ et $X_{n+1} \to X_{n+2}$ le sont toutes deux). Une application nucléaire se factorise

$$X_n/Y_n \to \ell_\infty \to \ell_1 \to X_{n+2}/Y_{n+2}$$

(l'application $\ell_\infty \to \ell_1$ applique la suite (x_n) sur la suite $(\lambda_n x_n)$, où λ_n est une suite sommable). L'espace de Banach ℓ_1 est "projectif", on peut relever l'application $\ell_1 \to X_{n+2}/Y_{n+2}$, trouver une application bornée $\ell_1 \to X_{n+2}$ dont la composée avec la projection

$X_{n+2} \to X_{n+2}/Y_{n+2}$ est l'application d'où nous sommes partis.

On a donc pour tout n une application $X_n/Y_n \to X_{n+2}$ dont la composée avec l'application quotient $X_{n+2} \to X_{n+2}/Y_{n+2}$ est l'application structurelle $X_n/Y_n \to X_{n+2}/Y_{n+2}$. Par ailleurs, u_{n+2} applique X_{n+2} dans E (ou dans $\mathfrak{a}$) et Y_{n+2} dans F (resp. dans α). La composée applique X_n/Y_n dans E, soit $v_n : X_n/Y_n \to E$ cette composée. On vérifie immédiatement que la famille des applications $v = (v_n)$ est une application permise de X/Y dans E modulo F (ou dans $\mathfrak{a}$ modulo α).

<u>Proposition 1.5</u>. L'homomorphisme de $\mathcal{O}(sp_\alpha\, a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathfrak{a}/\alpha$ qui a été construit dans la proposition 1.3 est induit par une application permise de $\mathcal{O}(sp_\alpha\, a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathfrak{a}$ modulo α.

Nous reprenons la démonstration de la proposition 1.3. Pour tout choix de $U_1, \ldots, U_n, b_1, \ldots, b_m, V_1, \ldots, V_m, P_1, \ldots, P_h, W_1, \ldots, W_h$ nous avons une application permise de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ dans $\mathfrak{a}$ qui applique l'idéal engendré par les fonctions $t_k - P_k(z, y)$ dans α. Cette application induit une application permise du quotient $\mathcal{O}(\Delta_1)$ dans $\mathfrak{a}$ mod α. L'injection $\mathcal{O}(\Delta) \to \mathcal{O}(\Delta_1)$ est un morphisme de b-algèbres, la composée est une application permise $\mathcal{O}(\Delta) \to \mathfrak{a}$ mod α.

Si $\Delta' \subseteq \Delta$, la démonstration de la proposition 1.3 établit la concordance des applications $\mathcal{O}(\Delta) \to \mathfrak{a}$ mod α et $\mathcal{O}(\Delta') \to \mathfrak{a}$ mod α.

Mais $\mathcal{O}(sp_\alpha\, a_1, \ldots, a_n)$ est la réunion des algèbres $\mathcal{O}(\Delta)$, les bornés de $\mathcal{O}(sp_\alpha\, a_1, \ldots, a_n)$ sont les ensembles contenus et bornés dans $\mathcal{O}(\Delta)$, Δ convenable. On définit de manière bien évidente la réunion des applications permises $\mathcal{O}(\Delta) \to \mathfrak{a}$ mod α. Cette réunion est une application permise $\mathcal{O}(sp_\alpha(a_1, \ldots, a_n)) \to \mathfrak{a}$ mod α.

coïncide avec l'idéal bilatère engendré par ces éléments. La bornologie de l'idéal à gauche se définit aisément.

La situation devient plus compliquée lorsque nous ne faisons pas d'hypothèse de commutativité, et lorsque nous nous intéressons à l'idéal bilatère engendré par $a_1, \ldots, a_n$. Le b-idéal bilatère engendré par $(a_1, \ldots, a_n)$ est la réunion des fermetures complétantes des ensembles

$$B_1 a_1 B_1' + \ldots + B_n a_n B_n'$$

où $B_1, \ldots, B_n, B_1', \ldots, B_n'$ sont bornés dans $\mathcal{A}$, une partie de ce b-idéal est bornée si elle est contenue dans une telle fermeture complétante. On remarque que ce b-idéal bilatère contient en général des éléments qui n'appartiennent pas à l'idéal bilatère engendré par $(a_1, \ldots, a_n)$. Ce b-idéal bilatère est toutefois plus petit que l'idéal bilatère fermé engendré par $a_1, \ldots, a_n$.

[Il est bon de rappeler ici qu'une partie d'un espace vectoriel est complétante si elle est convexe, équilibrée, et si sa jauge est une norme banachique sur l'espace vectoriel engendré. La fermeture complétante d'une partie bornée B d'un b-espace est l'intersection des bornés complétants contenant B. C'est un ensemble complétant].

b. L'espace des germes de fonctions continues en un point non isolé d'un espace complètement régulier n'a pas de topologie ni de bornologie naturelle. C'est le quotient de l'espace des fonctions continues par celui des fonctions continues nulles au voisinage du point considéré. Toute fonction continue nulle en x peut être approchée uniformément par une fonction continue nulle au voisinage de x. Cet espace de germes est muni toutefois d'une structure naturelle de "quotient de b-espaces".

Tout germe étant borné au voisinage de x, nous considérons l'algèbre de Banach A des fonctions continues bornées sur notre espa-

ce topologique. Nous considérerons l'idéal α des fonctions continues sur cet espace qui s'annulent au voisinage de x. Une partie B de α est bornée si elle est uniformément bornée et si x a un voisinage V sur lequel tous les éléments de B s'annulent. Il est clair que le quotient A mod α est l'objet le plus rapproché de l'espace des germes de fonctions continues que l'analyste fonctionnel puisse manier ... pour autant qu'il puisse manier ce quotient bien entendu.

c. On sait qu'un espace à bornologie convexe séparée ne peut en général pas être complété, c'est-à-dire immergé dans un b-espace (cf. [9], [4]). Il peut bien entendu être appliqué de manière universelle dans un espace bornologique complet, mais cette application n'est pas toujours injective.

Des quotients d'espaces bornologiques convexes séparés se définissent exactement comme ceux d'espace à bornologie complétante. Les quotients d'espaces à bornologie complétante sont des quotients d'espaces bornologiques convexes séparés particuliers.

On montre [6] que la complétion d'un espace bornologique convexe séparé est une immersion de l'espace donné dans un q-espace. La complétion d'un quotient d'espaces bornologiques séparés n'est bien entendu pas une immersion. On n'a qu'à songer au cas où E est un espace de Banach et E_o un sous-espace normé dense. Le bon sens, et les faits veulent que le complété de E mod E_o soit nul, alors que E mod E_o n'est pas nul.

Le premier exemple construit de b-espace non complétable est celui des "germes de polynômes nuls à l'origine". C'est l'espace des polynômes nuls à l'origine, une partie de cet espace étant bornée s'il existe un voisinage de l'origine sur lequel elle est uniformément bornée. Le "complété" de cet espace bornologique convexe dans la catégo-

Le but de ce paragraphe est la démonstration du

Théorème 2.1. Il existe une catégorie q qui contient $\tilde{q}$, a les mêmes objets que $\tilde{q}$, et est telle que les pseudo-isomorphismes de $\tilde{q}$ soient des isomorphismes de q. Un foncteur $\Phi : \tilde{q} \to \mathbb{K}$ de $\tilde{q}$ dans une autre catégorie se prolonge à q si et uniquement si il applique les pseudo-isomorphismes de $\tilde{q}$ sur des isomorphismes de $\mathbb{K}$. Le prolongement est unique s'il existe.

Le théorème 2.1. détermine bien évidemment la catégorie q à un isomorphisme près, si une catégorie telle que q existe.

2.2. Définition 2.4. Un b-espace est libre s'il est isomorphe à une somme directe d'espaces de Banach, chacun isomorphe à $\ell_1(X_i)$ pour un ensemble X_i convenable. (Une partie d'une somme directe est bornée si elle est contenue dans une somme finie de parties, chacune bornée dans un des termes de la somme directe).

Lemme 2.1. Pour tout quotient banachique $E|F$ on peut trouver un quotient banachique $E'|F'$ avec E' libre et un pseudo-isomorphisme $E'|F' \to E|F$.

C'est évident, tout b-espace est isomorphe à un quotient de b-espace libre. Soit donc E' libre et $u : E' \to E$ bornologiquement surjective (telle que l'égalité $E = u_1 E'$ soit une égalité d'espaces bornologiques). Soit $F' = \bar{u}_1^{-1} F$ avec la bornologie image réciproque. Le morphisme $u : E'|F' \to E|F$ induit par u est un pseudo-isomorphisme.

Lemme 2.2. Soient $E_1'|F_1'$, $E_2'|F_2'$, $E_2|F_2$ des q-espaces avec E_1' libre. Soit $s : E_2'|F_2' \to E_2|F_2$ un pseudo-isomorphisme. L'application $u' \to s \circ u'$ est une bijection de l'espace des morphismes stricts de

$E_1'|F_1'$ dans $E_2'|F_2'$ avec celui des morphismes stricts de $E_1'|F_1'$ dans $E_2|F_2$.

La démonstration du fait que cette application est injective n'utilise pas l'hypothèse que E_1' est libre. Soit u_1' une application induisant u' et s_1 une application induisant s et telle que $s_1E_2' = E_2$, $F_2' = \bar{s}_1^{1}F_2$. Supposons que $s \circ u' = 0$, donc que $s_1 \circ u_1' \in \mathcal{L}(E_1', F_2)$. Pour tout B borné dans E_1', $u_1'(B)$ est une partie bornée de E_2', telle que $s_1(u_1'B)$ soit bornée dans F_2. Comme $F_2' = \bar{s}_1^{1}F_2$, nous voyons que $u_1'B$ est borné dans F_2', que $u_1' \in \mathcal{L}(E_1', F_2')$ et $u' = 0$.

Soit alors $u : E_1'|F_1' \to E_2|F_2$ un morphisme strict et $u_1 : E_1' \to E_1$ un morphisme de b-espaces déterminant le morphisme u. Du fait que E_1' est libre et que le morphisme $s_1 : E_2' \to E_2$ est bornologiquement surjectif, nous voyons (en appliquant l'axiome du choix) que u_1 se factorise, $u_1 = s_1 \circ u_1'$. De nouveau, si B est borné dans F_1', $s_1'(u_1'B)$ est borné dans F mais B est borné dans E_2' donc B est borné dans $\bar{s}_1^{1}{}'F_2 = F_2'$. L'application u_1' détermine un morphisme $u' : E_1'|F_1' \to E_2'|F_2'$ et $u = s \circ u'$.

<u>Lemme 2.3</u>. Un pseudo-isomorphisme $s : E_1'|F_1' \to E_1|F_1$ est un isomorphisme de $\tilde{q}$ si E_1 est libre.

Le lemme 2.2. montre que l'application $u' \mapsto s \circ u'$ est une bijection de l'espace des morphismes stricts $E_1|F_1 \to E_1'|F_1'$ avec celui des endomorphismes stricts de $E_1|F_1$. A l'automorphisme identique de $E_1|F_1$ correspond un morphisme strict $E_1|F_1 \to E_1'|F_1'$, qui, on le voit immédiatement est un inverse bilatère de s.

<u>Lemme 2.4</u>. Soient $s_1 : U_1|V_1 \to E_1|F_1$, $s_2 : E_2|F_2 \to U_2|V_2$ des pseudo-isomorphismes. L'application $u \mapsto s_2 \circ u \circ s_1$ est une injection de l'espace des morphismes stricts de $E_1|F_1$ dans $E_2|F_2$, dans celui des morphismes stricts de $U_1|V_1$ dans $U_2|V_2$.

C'est immédiat. On suppose que $s_2 \circ u \circ s_1 = 0$ et on veut montrer que $u = 0$. On choisit des applications $s_1' : U_1 \to E_1$, $s_2' : E_2 \to U_2$ et $u' : E_1 \to E_2$ induisant les morphismes s_1, s_2, u. On suppose que $s_1'U_1 = E_1$, $s_2'^{-1}V_2 = F_2$ bornologiquement, c'est possible puisque s_1 et s_2 sont des pseudo-isomorphismes.

Soit B borné dans E_1, nous voulons montrer que $u'B$ est borné dans F_2. Choisissons C borné dans U_1 tel que $s_1'C = B$. On a $s_2' \circ u' \circ s_1'(C)$ borné dans V_2, donc $s_2'(u'B)$ borné dans F_2. L'ensemble $u'B$ est donc une partie bornée de E_2 appliquée par s_2' sur une partie bornée de F_2, c'est une partie bornée de F_2. Le résultat est établi.

<u>Lemme 2.5</u>. Soient $s_1 : E_1|F_1 \to E|F$, $s_2 : E_2|F_2 \to E|F$ deux pseudo-isomorphismes. Il existe un quotient banachique $U|V$ et deux pseudo-isomorphismes $t_1 : U|V \to E_1|F_1$, $t_2 : U|V \to E_2|F_2$ tels que $s_1 \circ t_1 = s_2 \circ t_2$.

Comme d'habitude nous choisissons des morphismes de b-espaces $s_1' : E_1 \to E$, $s_2' : E_2 \to E$, qui sont bornologiquement surjectifs (tout borné de E est l'image d'un borné de E_1 ou de E_2) et induisent les pseudo-isomorphismes s_1, s_2. Nous définissons

$$U = \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mid s_1'x_1 - s_2'x_2 \in F\}$$

une partie $B \subseteq U$ étant bornée si elle l'est dans $E_1 \times E_2$, et si

$$\{s_1'x_1 - s_2'x_2 \mid (x_1, x_2) \in B\}$$

est borné dans F. Et $V \subseteq U$ sera l'espace vectoriel $F_1 \times F_2$ avec la bornologie produit. Nous appelons enfin t_1', t_2' les restrictions à U des projections $(x_1, x_2) \mapsto x_1$, $(x_1, x_2) \mapsto x_2$ de $E_1 \times E_2$ dans E_1 et E_2.

t_1' et t_2' induisent évidemment des morphismes stricts $t_1 : U|V \to E_1|F_1$, $t_2 : U|V \to E_2|F_2$. Le b-espace U a été construit de manière telle que $s_1' \circ t_1' - s_2' \circ t_2' \in \mathcal{L}(U, F)$, donc que $s_1 \circ t_1 = s_2 \circ t_2$.

Il reste à montrer que t_1 et t_2 sont des pseudo-isomorphismes. Soit B_1 borné dans E_1, $s_1 B_1$ est borné dans E. Soit B_2 borné dans E_2 tel que $s_2 B_2 = s_1 B_1$. Soit

$$B = \{(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2 \mid s_1 x_1 = s_2 x_2\}$$

On voit que B est borné dans U. Et $t_1' B = B_1$ puisqu'il existe $x_2 \in B_2$ tel que $s_2 x_2 = s_1 x_1$ quel que soit $x_1 \in B_1$. L'application t_1' est donc bornologiquement surjective.

Soit enfin B borné dans U et tel que $t_1' B$ soit borné dans F_1. Considérons $t_2' B$. C'est une partie bornée de E_2 dont l'image par s_2'

$$s_2' \circ t_2' B = (s_1' \circ t_1')B + (s_2' \circ t_2' - s_1' \circ t_1')B$$

est bornée dans F. Donc $t_2' B$ est bornée dans F_2 et B l'est dans $F_1 \times F_2$. (Rappelons que t_1' et t_2' sont les restrictions à U des projections $E_1 \times E_2 \to E_1$, $E_1 \times E_2 \to E_2$).

Nous voyons donc que t_1 est un pseudo-isomorphisme, et pour la même raison que t_2 en est un.

2.3. Pour établir le théorème 2.1., on associe à chaque q-espace $E|F$ un q-espace $E'|F'$ avec E' libre et un pseudo-isomorphisme $s : E'|F' \to E|F$. Les lemmes 2.2, 2.3, 2.4 montrent qu'à tout morphisme strict

$u : E_1|F_1 \to E_2|F_2$ on peut associer un morphisme strict unique $u' : E'_1|F'_1 \to E'_2|F'_2$ de manière telle que $s_2 \circ u' = u \circ s_1$.

Nous définissons $\Phi : \tilde{q} \to \tilde{q}$ en posant $\phi(E|F) = E'|F'$ et $\Phi(u) = u'$. On a $\Phi(v \circ u) = v' \circ u'$ si $u : E_1|F_1 \to E_2|F_2$ et $v : E_2|F_2 \to E_3|F_3$ sont des morphismes stricts. En effet

$$v \circ u \circ s_1 = v \circ s_2 \circ u' = s_3 \circ v' \circ u'$$

En d'autres mots Φ est un foncteur.

Pour chaque choix de $E_1|F_1$, $E_2|F_2$ on voit que ϕ est injectif de $\sigma\tilde{q}(E_1|F_1, E_2|F_2)$ dans $\sigma\tilde{q}(E'_1|F'_1, E'_2|F'_2)$. L'espace $\sigma q(E_1|F_1, E_2|F_2$ contiendra par définition $\sigma\tilde{q}(E_1|F_1, E_2|F_2)$ et sera en correspondance bijective avec $\sigma\tilde{q}(E'_1|F'_1, E'_2|F'_2)$, à l'inclusion

$$\sigma\tilde{q}(E_1|F_1, E_2|F_2) \subseteq \sigma q(E_1|F_1, E_2|F_2)$$

correspondant l'injection $u \to u'$,

$$\sigma\tilde{q}(E_1|F_1, E_2|F_2) \to \sigma\tilde{q}(E'_1|F'_1, E'_2|F'_2)$$

La composition

$$\sigma q(E_1|F_1, E_2|F_2) \times \sigma q(E_2|F_2, E_3|F_3) \to \sigma q(E_1|F_1, E_3|F_3)$$

sera définie à partir de la composition

$$\sigma\tilde{q}(E'_1|F'_1, E'_2|F'_2) \times \sigma\tilde{q}(E'_2|F'_2, E'_3|F'_3) \to \sigma\tilde{q}(E'_1|F'_1, E'_3|F'_3)$$

par transport de structure de manière évidente.

Avec ces définitions, q est une catégorie qui contient $\tilde{q}$.

Montrons que les pseudo-isomorphismes de $\tilde{q}$ sont inversibles dans q. Soit $u : E_1|F_1 \to E_2|F_2$ un pseudo-isomorphisme. La composée $u \circ s_1 : E'_1|F'_1 \to E_2|F_2$ est un pseudo-isomorphisme. Considérons alors le morphisme $s_2 : E'_2|F'_2 \to E_2|F_2$. Le lemme 2.2. montre que s_2 se factorise

$$s_2 = u \circ s_1 \circ v'$$

où $v' : E_2'|F_2' \to E_1'|F_1'$ est un morphisme strict. A $v' \in \tilde{\sigma}q(E_2'|F_2', E_1'|F_1')$ correspond $v \in \sigma q(E_2|F_2, E_1|F_1)$. Il est clair que v est un inverse de u.

Il est évident que l'extension à q d'un foncteur $\Psi : \tilde{q} \to \mathbb{K}$ est unique si elle existe. L'élément $u \in \sigma q(E_1|F_1, E_2|F_2)$ se factoris

$$u = s_2 \circ u' \circ s_1^{-1}$$

et s_1, s_2, u' sont des morphismes stricts. Le foncteur Ψ détermine $\Psi(s_1)$, $\Psi(s_2)$, et $\Psi(u')$ donc $\Psi(s_1^{-1})$ également.

Il reste à montrer que l'extension existe. Soit u un morphisme de q. Nous pouvons factoriser $u = u_1 \circ s_1^{-1}$ où u_1 est un morphisme strict, et $s_1 : E_1|F_1 \to E|F$ est un pseudo-isomorphisme, avec E_1 libre. Si Ψ est un foncteur qui applique les pseudo-isomorphismes sur des isomorphismes nous pouvons définir

$$\Psi_1(u) = \Psi(u_1)\Psi(s_1)^{-1}$$

pour autant que le second membre ne dépende pas de la factorisation de u.

Soit donc $u = u_1 \circ s_1^{-1} = u_2 \circ s_2^{-1}$. Considérons les morphismes $s_1 : E_1|F_1 \to E|F$, $s_2 : E_2|F_2 \to E|F$ avec E_1 et E_2 libres. Le lemme 2.5. fournit des pseudo-isomorphismes $t_1 : U|V \to E_1|F_1$, $t_2 : U|V \to E_2|F$ tels que $s_1 \circ t_1 = s_2 \circ t_2$. Les espaces E_1, E_2 sont libres. Le lemme 2.3. montre que t_1 et t_2 sont des isomorphismes de $\tilde{q}$.

De $s_1 \circ t_1 = s_2 \circ t_2$ on tire $s_2^{-1} \circ s_1 = t_2 \circ t_1^{-1}$. Par ailleurs $u_1 = u \circ s_1$, $u_2 = u \circ s_2$, donc $u_1 \circ t_1 = u_2 \circ t_2$ et

$$u_1 = u_2 \circ t_2 \circ t_1^{-1}$$

Comme u_1, u_2, t_2 et t_1^{-1} appartiennent à $\tilde{q}$, nous avons

$$\Psi(u_1) = \Psi(u_2)\Psi(t_2)\Psi(t_1^{-1})$$

et

$$\begin{aligned}\Psi(u_1)\Psi(s_1)^{-1} &= \Psi(u_2)\Psi(t_2)\Psi(t_1)^{-1}\Psi(s_1)^{-1}\\ &= \Psi(u_2)\Psi(t_2)\Psi(s_1 \circ t_1)^{-1}\\ &= \Psi(u_2)\Psi(t_2)\Psi(s_2 \circ t_2)^{-1}\\ &= \Psi(u_2)\Psi(s_2)^{-1}\end{aligned}$$

L'application Ψ_1 est bien définie.

Il reste à montrerque Ψ_1 est un foncteur. Soient $u_1 : E_1|F_1 \to E_2|F_2$, $u_2 : E_2|F_2 \to E_3|F_3$ des morphismes de la catégorie q. Soient $s_1 : E_1'|F_1' \to E_1|F_1$ et $s_2 : E_2'|F_2' \to E_2|F_2$ des pseudo-isomorphismes avec E_1' et E_2' libres, puis $u_1' = u_1 \circ s_1$, $u_2' = u_2 \circ s_2$ Nous voyons que u_1' et u_2' sont des morphismes stricts, et $u_1 = u_1' \circ s_1^{-1}$, $u_2 = u_2' \circ s_2^{-1}$.

Le fait que s_2 soit un pseudo-isomorphisme et que E_1' soit libre nous permet de factoriser $u_1' = s_2 \circ u_1''$ (lemme 2.2.), on a donc $u_1 = s_2 \circ u_1'' \circ s_1^{-1}$ et

$$u_2 \circ u_1 = u_2' \circ u_1'' \circ s_1^{-1}$$

Bien entendu, $u_2' \circ u_1''$ est un morphisme strict,

$$\Psi_1(u_2 \circ u_1) = \Psi(u_2')\Psi(u_1'')\Psi(s_1)^{-1}$$

Comme $u_1' = s_2 \circ u_1''$ et comme $\Psi(s_2)$ est inversible, nous avons

$$\Psi(s_2)^{-1}\Psi(u_1') = \Psi(u_1'')$$

donc

$$\begin{aligned}\Psi(u_2 \circ u_1) &= \Psi(u_2')\Psi(s_2)^{-1}\Psi(u_1')\Psi(s_1)^{-1}\\ &= \Psi_1(u_2)\Psi_1(u_1)\end{aligned}$$

et Ψ_1 est un foncteur.

2.4. <u>Théorème 2.2</u>. Soient Φ et Ψ deux foncteurs de $\tilde{q}$ dans une catégorie $\mathbb{K}$, qui se prolongent tous deux à q, soient Φ_1, Ψ_1 ces prolongements. Soit $H : \Phi \to \Psi$ un homomorphisme de foncteurs. Alors H est un homomorphisme du foncteur Φ_1 en le foncteur Ψ_1.

C'est évident. Tout morphisme u de la catégorie q se factorise $u = u' \circ s^{-1}$.

L'homomorphisme de foncteurs H détermine pour tout q-espace $E|F$ un morphisme de la catégorie $\mathbb{K}$,

$$H_{E|F} : \Phi(E|F) \to \Psi(E|F)$$

et nous supposons, si $u' : E''|F'' \to E'|F'$ est un morphisme strict, que

$$H_{E'|F'} \cdot \Phi(u') = \Psi(u') H_{E''|F''} \quad .$$

De même si $s : E''|F'' \to E|F$ est un pseudo-isomorphisme, et si $\Phi(s)$ et $\Psi(s)$ sont inversibles

$$\Phi(s)^{-1} H_{E|F} = H_{E''|F''} \Psi(s)^{-1}$$

ce qui implique bien la relation

$$H_{E'|F'} \Phi(u') \Phi(s)^{-1} = \Psi(u') H_{E''|F''} \Phi(s)^{-1}$$

3. Compléments linéaires.

3.1. On associe naturellement à un q-espace $E|F$ l'espace vectoriel quotient $\sigma(E|F) = E/F$. Si u est un morphisme strict $E|F \to E'|F'$, induit par le morphisme de b-espaces $u_1 : E \to E'$, on associe à u l'application linéaire $\sigma u : x + F \to u_1 x + F'$ de $\sigma(E|F)$ dans $\sigma(E'|F')$.

Il est clair que σ est un foncteur $\tilde{q} \to \tilde{q}$, et que σu est une transformation linéaire inversible si u est un pseudo-isomorphisme.

Définition 3.1. Le foncteur $\sigma : q \to E.V.$ décrit ci-dessus sera appelé le foncteur "espace vectoriel sous-jacent".

Les seuls q-espaces nuls, isomorphes à l'espace $0|0$, sont les q-espaces $E|E$. Des q-espaces $E|F$ non nuls peuvent avoir un espace vectoriel sous-jacent nul. Moyennant un abus de langage souvent commode "il est possible de mettre une q-structure non triviale sur l'espace vectoriel nul". Il suffit pour cela de prendre un b-espace E, puis de prendre le même espace vectoriel, avec une bornologie complétante strictement plus fine que celle de E, soit F ce nouveau b-espace. Alors $E|F$ est un q-espace non nul, mais $\sigma(E|F)$ est l'espace vectoriel nul.

On distingue les q-espaces en introduisant le foncteur $\beta(X, E|F)$. Si X est un ensemble et E un b-espace, $\beta(X, E)$ est l'espace vectoriel des applications $f : X \to E$ telles que fX soit borné dans E. Une partie $B \subseteq \beta(X, E)$ est bornée si elle est équibornée, si $\cup_{f \in B} fX$ est une partie bornée de E. Si F est un sous-b-espace de E, $\beta(X, F)$ est un sous-b-espace de $\beta(X, E)$. On définit

$$\beta(X, E|F) = \beta(X, E)|\beta(X, F)$$

Soit ensuite $u : E|F \to E'|F'$ un morphisme strict, induit par un morphisme de b-espaces $u_1 : E \to E'$. Nous associons à u_1 un morphisme

de b-espaces $\beta(X, E) \to \beta(X, E')$ appliquant f sur $u_1 \circ f$. Ce morphisme induit évidemment un morphisme strict

$$\beta(X, E|F) \to \beta(X, E'|F')$$

qui ne dépend que de u, pas du choix de u_1 induisant u, et que nous appellerons $\beta(X, u)$.

Ainsi défini, $\beta(X, .)$ est un foncteur $\tilde{q} \to \tilde{q}$. On vérifie immédiatement que $\beta(X, u)$ est un pseudo-isomorphisme si u en est un.

<u>Définition 3.2</u>. $\beta(X, .)$ est le foncteur $q \to q$ que l'on définit en associant au q-espace $E|F$ le q-espace $\beta(X, E|F)$, et au morphisme strict $u : E|F \to E'|F'$ le morphisme strict $\beta(X, u)$ décrit ci-dessus.

<u>Proposition 3.1</u>. Le q-espace $E|F$ est nul si l'espace vectoriel $\sigma\beta(X, E|F)$ est nul quel que soit X. Le morphisme $u \in \sigma q(E|F, E'|F')$ est nul si $\sigma\beta(X, u)$ l'est quel que soit X.

Les propriétés fonctorielles de $\sigma\beta(X, .)$ impliquent d'abord que $\sigma\beta(X, E|F)$ est nul si $E|F$ est le q-espace nul, et que $\sigma\beta(X, u) = 0$ si $u = 0$. Si $E|F$ n'est pas le q-espace nul, E possède au moins une partie bornée X qui n'est pas bornée dans F. L'application identique de X dans E est un élément de $\beta(X, E)$ qui n'appartient pas à $\beta(X, F)$, $\sigma\beta(X, E|F)$ n'est pas l'espace vectoriel nul.

Si $u : E|F \to E'|F'$ est un morphisme strict non nul, il existe X tel que $\sigma\beta(X, u) \neq 0$. Soit en effet $u_1 : E \to E'$ une application induisant u et soit X borné dans E tel que u_1X ne soit pas borné dans E'. L'inclusion $i : X \to E$ appartient à $\beta(X, E)$ et détermine un élément de $\sigma\beta(X, E|F)$ dont l'image par $\sigma\beta(X, u)$ n'est pas nulle.

Si $u : E|F \to E'|F'$ est un morphisme non nul de la catégorie q, nous trouvons $E_1|F_1$ avec E_1 libre et un pseudo-isomorphisme $s : E_1|F_1 \to E|F$. La composée $u \circ s$ est un morphisme strict non nul.

Il existe donc $f \in \sigma\beta(X, E_1|F_1)$ tel que

$$\sigma\beta(X, u \circ s)(f) \neq 0$$

Mais, posant $\sigma\beta(X, s)(f) = f_1$, on a

$$\sigma\beta(X, u \circ s)(f) = \sigma\beta(X, u)(f_1)$$

La proposition 3.1. est donc établie.

3.2. Il faut parler également des propriétés fonctorielles de $\beta(X, E|F)$ en fonction de X.

On définit naturellement un foncteur ℓ_1 : Ens $\to$ Ban (de la catégorie des ensembles dans celle des espaces de Banach avec pour morphismes les applications linéaires bornées), associant à l'ensemble X l'espace de Banach $\ell_1(X)$, et à l'application $\varphi : X \to Y$ l'application linéaire bornée $\varphi_1 : \ell_1(X) \to \ell_1(Y)$ définie par

$$(\varphi_1(u))_y = \Sigma_{\varphi(x)=y}\, u_x$$

lorsque $(u_x)_{x\in X} \in \ell_1(X)$.

Il est clair que $\beta(X, E|F)$ est isomorphe à $q(\ell_1(X)|0, E|F)$. Par ailleurs, à toute application linéaire bornée $\ell_1(Y) \to \ell_1(X)$ correspond un morphisme $\sigma q(\ell_1(X), E|F) \to \sigma q(\ell_1(Y), E|F)$, donc $\sigma\beta(X, E|F) \to \sigma\beta(Y, E|F)$.

Les applications linéaires bornées $\ell_1(Y) \to \ell_1(X)$ correspondent aux matrices $(a_{yx})_{x\in X, y\in Y}$ telles que

$$\sup_{y\in Y} \Sigma_{x\in X} |a_{yx}| < \infty$$

On définit une catégorie ℓ_1 ayant les mêmes objets que Ens, mais dont les morphismes $Y \to X$ sont les matrices décrites ci-dessus, la composition des morphismes étant la multiplication usuelle des matrices.

$$(b.a)_{zx} = \Sigma_y\, b_{zy}\, a_{yx}$$

En fonction de X, nous avons vu que β était un foncteur $\ell_1^{\star} \times q \to q$ et que $\sigma\beta$ est donc un foncteur $\ell_1^{\star} \times q \to E.V.$ si $\ell_1^{\star}$ est la catégorie opposée à ℓ_1.

3.3. En théorie des catégories, on dit que $u : E|F \to E'|F'$ est un monomorphisme (est monique) si de $u \circ v = 0$ on tire $v = 0$ (lorsque u et v sont composables). Par contre u est un épimorphisme (est épique) si la composée $v \circ u$ ne peut s'annuler que si v s'annule, la composée étant supposée exister bien entendu.

<u>Proposition 3.2</u>. Le morphisme $u : E|F \to E'|F'$ est monique si et uniquement si $\sigma\beta(X, u)$ est injectif quel que soit X. Il est épique si et uniquement si $\sigma\beta(X, u)$ est surjectif quel que soit X.

Supposons d'abord $\sigma\beta(X, u)$ non injectif. Il existe donc $f : \ell_1(X) \to E|F$ tel que $u \circ f : \ell_1(X) \to E'|F'$ soit nul, alors que f ne l'est pas. Et u n'est pas monique.

Supposons que u ne soit pas monique. Soit $v : E_1|F_1 \to E|F$ un morphisme non nul tel que $u \circ v = 0$. Soit E_2 libre tel que E_1 soit un quotient de E_2 et $v_2 : E_2 \to E|F$ la composée des applications quotient $E_2 \to E_1$, $E_1 \to E_1|F_1$, et de v. La composée $E_2 \to E_1|F_1$ est évidemment épique, comme $v \neq 0$ on a $v_2 \neq 0$.

L'espace libre E_2 est une somme directe d'espaces, chacun isomorphe à $\ell_1(X_i)$ pour un ensemble X_i. L'espace $\sigma q(E_2, E|F)$ s'identifie avec le produit des espaces $\sigma q(\ell_1(X_i), E|F)$, donc des espaces $\sigma\beta(X_i, E|F)$. A v_2 correspond une famille de $v_{2.i}$ chaque $v_{2.i} \in \sigma\beta(X_i, E|F)$, un au moins est non nul puisque $v_2 \neq 0$. Mais $u \circ v_2 = 0$, ce qui montre que $\sigma\beta(X_i, u)(v_{2.i})$ est nul pour tout i. Nous avons trouvé un ensemble X_i tel que $\sigma\beta(X_i, u)$ ne soit pas injectif.

Supposons ensuite $\sigma\beta(X, u)$ non surjectif. Si u est un morphisme strict, soit u induit par $u_1 : E \to E'$, nous ne pouvons pas avoir l'égalité des espaces bornologiques E' et $u_1E + F'$ (une partie de ce dernier espace est bornée si elle est contenue dans $u_1B + B'$ avec B et B' bornés respectivement dans E et F'). L'identité $E' \to E'$ induit un morphisme strict $E'|F' \to E'|u_1E + F'$, qui n'est pas nul, sinon les parties bornées de E' le seraient dans $u_1E + F'$ et $\sigma\beta(X, u)$ serait surjectif. Mais la composée de u avec ce morphisme est nulle, u n'est pas épique.

Si u n'est pas un morphisme strict, $u = u_1 \circ s^{-1}$ où s est un pseudo-isomorphisme et u_1 est strict. Comme $\sigma\beta(X, s)$ est bijectif, $\sigma\beta(X, u_1)$ n'est pas surjectif, u_1 n'est pas épique, et u ne l'est pas non plus.

Supposons enfin que u ne soit pas épique. Soit $v : E'|F' \to E_1|F_1$ non nul et tel que $v \circ u = 0$. Considérons d'abord le cas où u et v sont des morphismes stricts. Soient u_1, v_1 des morphismes $E \to E'$, $E' \to E_1$ induisant u et v respectivement, $v_1 \circ u_1$ est une application linéaire bornée de E dans F'. Mais du fait que $v \neq 0$, E' possède une partie bornée X telle que v_1X ne soit pas bornée dans E' Cette partie n'est égale à $u_1Y + B$ pour aucun Y borné dans E ni aucun B borné dans F'. En effet, $v_1(u_1Y + B)$ est borné dans F_1. L'application identique de X dans E' définit un élément de $\sigma\beta(X, E'|F')$ qui est hors de l'image de $\sigma\beta(X, E|F)$.

Dans le cas général, lorsque u et v ne sont pas des morphismes stricts, nous trouvons des q-espaces $U|V$, $U'|V'$, isomorphes à $E|F$ et $E'|F'$ dans la catégorie q, avec U, U' libres. Aux morphismes $u : E|F \to E'|F'$, $v : E'|F' \to E_1|F_1$ correspondent des morphismes $u_1 : U|V \to U'|V'$, $v_1 : U'|V' \to E_1|F_1$. Les morphismes u_1, v_1 sont stricts, $v_1 \neq 0$, $v_1 \circ u_1 = 0$, il existe donc X tel que

$\sigma\beta(X, U|V) \to \sigma\beta(X, U'|V')$ ne soit pas surjectif, et pour un tel X, $\sigma\beta(X, E|F) \to \sigma\beta(X, E'|F')$ ne peut pas non plus être surjectif.

Soient E et E' des b-espaces, soit F' un sous-b-espace de E', et soit $u : E \to E'$ une application linéaire bornée. Nous nous rappelons que l'image réciproque $\bar{u}''F'$ a pour éléments les $x \in E$ tels que $ux \in F'$ et pour bornés les B bornés dans E tels que uB soit borné dans F'. L'image uE a pour éléments les ux, $x \in E$ et pour bornés les ensembles uB, B borné dans E.

Nous aurons également besoin de l'espace $uE + F'$. Il a pour éléments les $ux + y$, $x \in E$, $y \in F'$ et pour bornés les ensembles $B \subseteq uB_1 + C$ avec B_1 borné dans E et C borné dans F'.

<u>Proposition 3.3</u>. Un morphisme strict $u : E|F \to E'|F'$ induit par $u_1 : E \to E'$ est un monomorphisme si, et uniquement si on a l'égalité des espaces bornologiques $F = \bar{u}_1^1F'$. C'est un épimorphisme si, et uniquement si $E' = uE + F'$.

Supposons $F \neq \bar{u}_1^1F'$. On a une partie bornée $X \subseteq E$ telle que u_1X soit borné dans F', mais X non borné dans F. L'application identique $X \to E$ définit un élément non nul de $\sigma\beta(X, E|F)$ dont l'image par $\sigma\beta(X, u)$ est nulle.

Supposons ensuite $F = \bar{u}_1^1F'$. Soit $f \in \sigma\beta(X, E|F)$ tel que $\sigma\beta(X, u)(f) = 0$. On voit que $u_1(f_1X)$ est borné dans F' si f_1 est un élément de la classe d'équivalence $f \in \sigma\beta(X, E)/\sigma\beta(X, F)$. L'ensemble f_1X est borné dans E, son image par u_1 est bornée dans F', donc f_1X est borné dans $\bar{u}_1^1F'$. Mais $\bar{u}_1^1F' = F$, f_1X est borné dans F et $f = 0$.

Si u est un épimorphisme, $\sigma\beta(X, u)$ est une surjection $\sigma\beta(X, E|F) \to \sigma\beta(X, E'|F')$ quel que soit X. Si X est par exemple une partie bornée de E', si $g \in \sigma\beta(X, E'|F')$ est l'élément de cet espace induit par l'inclusion $X \to E'$, nous trouvons $f \in \sigma\beta(X, E|F)$ tel que

$\sigma\beta(X, u)(f) = g$. Soit ensuite $f_1 \in \sigma\beta(X, E)$ un élément de la classe d'équivalence f. L'application $x \to x - u_1(f_1x)$ a une image bornée dans F', puisque $u_1 \circ f_1$ est dans la même classe d'équivalence que l'inclusion $X \to E'$. L'ensemble X est donc borné dans $uE + F'$.

Supposons ensuite la condition vérifiée. Soit $E' = uE + F'$. Soit X un ensemble, soit $g \in \sigma\beta(X, E'|F')$. Soit g_1 un élément de la classe d'équivalence g, g_1X est borné dans E', donc dans $u_1E + F'$. Soit B borné dans E et B' dans F' tels que $g_1X \subseteq u_1B + B'$. Nous pouvons choisir pour tout $x \in X$ un $f_1x \in B$ et un $h_1x \in B'$ tels que $g_1x = u_1(f_1x) + h_1x$. L'application $f_1 : X \to E$ détermine un $f \in \sigma\beta(X, E|F)$ et $\sigma\beta(X, u)(f) = g$.

<u>Proposition 3.4</u>. Un morphisme est un isomorphisme s'il est à la fois monique et épique.

On se ramène au cas où le morphisme est strict en remplaçant $E|F$ par un q-espace isomorphe que nous appellerons encore $E|F$. Le morphisme $u : E|F \to E_1|F_1$ est induit par une application $u_1 : E \to E_1$. Nous supposons que $E_1 = u_1E + F_1$, et que $F = \bar{u}_1^{1}F_1$.

Nous considérons alors le q-espace $E \oplus F_1|F \oplus F_1$ et les morphismes stricts $s_1 : E \oplus F_1|F \oplus F_1 \to E|F$, $s_2 : E \oplus F_1|F \oplus F_1 \to E_1|F_1$ induits par les applications linéaires $x \oplus y \to x$, $x \oplus y \to ux + y$. Ce sont des pseudo-isomorphismes. Le fait est évident pour s_1, de même qu'il est clair que le morphisme $t_1 : E|F \to E \oplus F_1|F \oplus F_1$ induit par l'application $x \mapsto x \oplus 0$, $E \to E \oplus F_1$ est un inverse de s_1.

Du fait que $u_1E + F_1 = E_1$, nous tirons que $s_2(E \oplus F_1) = E_1$, dans les deux cas nous avons une égalité d'espaces bornologiques. Pour montrer que s_2 est un pseudo-isomorphisme, nous devons montrer qu'une partie bornée B de $E \oplus F_1$ dont l'image est bornée dans F_1 est une partie bornée de $F \oplus F_1$. La seconde projection de B est bornée

dans F_1 (puisque B l'est dans $F \oplus F_1$). Sa première projection est une partie bornée de E, mettons B_1, et

$$u_1 B_1 \subseteq \{u_1 x + y \mid x \oplus y \in B\} - \{y \mid x \oplus y \in B\}$$

est une partie bornée de F_1, cette première projection est donc bornée dans $F = \bar{u}_1^1 F_1$, et B est borné dans $F \oplus F_1$.

La composée $s_2 \circ s_1^{-1} = s_2 \circ t_1$ est un isomorphisme de q. Mais cette composée n'est autre que u.

3.4. <u>Définition 3.3</u>. Soit $E|F$ un q-espace. Soit E' un sous-b-espace de E qui a F comme sous-b-espace. (On a donc les inclusions d'espaces vectoriels $F \subseteq E' \subseteq E$, chacune des inclusions est un morphisme d'espaces bornologiques). Le q-espace $E'|F$ sera dit être un sous-q-espace de $E|F$, le morphisme $E'|F \to E|F$ induit par l'inclusion $E' \to E$ sera appelé l'injection canonique de $E'|F$ dans $E|F$. Le q-espace $E|E'$ sera dit être un quotient du q-espace $E|F$, le morphisme $E|F \to E|E'$ induit par l'identité $E \to E$ sera appelé la surjection canonique $E|F \to E|E'$.

On observe d'abord que l'ensemble des sous-q-espaces $E'|F$ de $E|F$ est un treillis $L(E|F)$ associé à $E|F$. Si $u : E|F \to E_1|F_1$ est un morphisme strict, induit par u, on associe à u une application $L(u) : L(E|F) \to L(E_1|F_1)$ appliquant $E'|F$ sur $u_1 E' + F_1|F_1$. L'application $L(u)$ n'est pas un morphisme de treillis ($L(u)$ ne respecte pas les intersections latticielles) mais c'est une application croissante d'espaces ordonnés. On a $L(u \circ v) = L(u) \circ L(v)$. Et $L(u)$ est un isomorphisme lorsque u est un pseudo-isomorphisme.

Les treillis $L(E|F)$ et $L(E_1|F_1)$ sont de ce fait isomorphes lorsque $E|F$ et $E_1|F_1$ sont isomorphes dans la catégorie q.

Il est clair que les morphismes quotients sont épiques, et que les injections canoniques sont moniques.

<u>Proposition 3.5</u>. Tout morphisme de la catégorie q est la composée d'un morphisme quotient, d'un isomorphisme, et d'une injection canonique. Un monomorphisme est la composée d'un isomorphisme et d'une injection canonique. Un épimorphisme est la composée d'un morphisme quotient et d'un isomorphisme.

Il suffit de considérer le cas où le morphisme donné est strict. Dans le cas général on remplacerait le q-espace $E|F$ par un q-espace isomorphe $E_1|F_1$. Il y a correspondance bijective entre les sous-q-espaces $E'|F$ de $E|F$ et ceux de $E_1|F_1$ soit $E_1'|F_1$. L'isomorphisme de $E|F$ avec $E_1|F_1$ transforme l'immersion canonique $E'|F \to E|F$ en l'immersion canonique $E_1'|F_1 \to E_1|F_1$. De même, il y a une correspondance bijective entre les quotients $E|E'$ de $E|F$ et ceux $E_1|E_1'$ de $E_1|F_1$, l'isomorphisme de $E|F$ avec $E_1|F_1$ transforme l'épimorphisme quotient $E|F \to E|E'$ en l'épimorphisme quotient $E_1|F_1 \to E_1|E_1'$.

Et si $u : E|F \to E'|F'$ est strict, induit par u_1, on factorise $u = i \circ u' \circ s$ où s est l'épimorphisme quotient $E|F \to E|\bar{u}_1^1F'$, où i est l'immersion canonique $u_1E + F'|F' \to E'|F'$, et où u' est le morphisme

$$E|\bar{u}_1^1F' \to u_1E + F'|F'$$

induit par l'application $x \mapsto u_1x$ de E dans $uE + F'$. Le morphisme u' est effectivement un isomorphisme (la proposition 3.3. montre qu'il est monique et épique, la proposition 3.4. dit qu'il est alors un isomorphisme).

Catégoriquement, on dit que deux monomorphismes sont équivalents lorsque chacun est la composée d'un isomorphisme et de l'autre monomorphisme. Les sous-trucs sont soit les classes d'équivalence de monomorphismes, soit des monomorphismes convenablement choisis, un par classe. Nous pouvons prendre ici comme sous-trucs de $E|F$ les immer-

sions canoniques $E'|F \to E|F$ de sous-q-espaces.

Les trucs quotient se définissent dualement. Deux épimorphismes sont équivalents lorsque chacun est la composée de l'autre et d'un isomorphisme. Les trucs quotient sont des épimorphismes convenables, choisis, un dans chaque classe. Nous pouvons prendre ici comme trucs quotient les épimorphismes canoniques $E|F \to E|E'$ sur des q-espaces quotient de $E|F$.

Le noyau d'un morphisme $u : E|F \to E_1|F_1$ est un sous-truc $i : E'|F \to E|F$ tel que $u \circ i = 0$, et tel que tout morphisme $v : E_2|F_2 \to E|F$ vérifiant la condition $u \circ v = 0$ se factorise $v = v_1 \circ i$. Le conoyau de u est un truc quotient $s : E_1|F_1 \to E_1|E_1'$ tel que $s \circ u = 0$ et que tout morphisme $v : E_1|F_1 \to E_2|F_2$ tel que $v \circ u = 0$ se factorise $v = v_1 \circ s$. La coimage d'un morphisme est le conoyau du noyau. L'image est le noyau du conoyau.

Rien n'assure, dans une catégorie additive, que tout morphisme ait un noyau, ni un conoyau. Un morphisme ne peut avoir de coimage s'il n'a pas de noyau, ni d'image s'il n'a pas de conoyau. Un morphisme possédant une coimage et une image est la composée d'une application quotient, d'une application de la coimage dans l'image, et d'une injection. L'application de la coimage dans l'image est un épimorphisme et un monomorphisme, ce qui n'implique pas en général qu'elle soit un isomorphisme.

<u>Proposition 3.6</u>. Dans la catégorie q, tout morphisme a un noyau et un conoyau. Le morphisme de la coimage dans l'image d'un morphisme est un isomorphisme.

On se ramène comme d'habitude au cas où le morphisme $u : E|F \to E'|F'$ est strict, supposons u induit par u_1. On voit aisément que $\bar{u}_1^{1}F'|F$ est un noyau de u, que $E'|u_1E + F'$ est un

conoyau, et que $E|\bar{u}_1^1F'$ et $u_1E + F'|F$ sont respectivement l'image et la coimage de u. Et nous savons que le morphisme $\bar{u}_1^1F'|F \to u_1E + F'|F'$ défini par u est un isomorphisme.

En d'autres termes, nous avons montré que q est une catégorie abélienne.

4. Applications multilinéaires.

4.1. On définit les applications multilinéaires dans la catégorie q en définissant une structure de q-espace sur l'espace vectoriel des morphismes d'un q-espace dans un autre. Une application bilinéaire de $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}$ s'identifie avec un morphisme de $\mathcal{E}_1$ dans le q-espace des morphismes de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}$. On doit bien entendu vérifier (ce sera évident dans notre cas) que les espaces d'applications multilinéaires ont les propriétés souhaitées.

Une "structure de q-espace" est définie sur un espace vectoriel V par un isomorphisme de V avec l'espace vectoriel sous-jacent $\sigma\mathcal{E}$ d'un q-espace $\mathcal{E}$.

Soient $E|F$ et $E'|F'$ deux q-espaces.

<u>Définition 4.1.</u> $\tilde{q}(E|F, E'|F')$ est le q-espace

$$\tilde{q}(E|F, E'|F') = \tilde{q}^1(E|F, E'|F') \,|\, \tilde{q}^0(E|F, E'|F')$$

où $\tilde{q}^1(E|F, E'|F')$ est le b-espace des applications linéaires bornées de E dans E' dont la restriction à F est une application linéaire bornée de F dans F', $B \subseteq \tilde{q}^0(E|F, E'|F')$ étant bornée si B est un ensemble équiborné d'applications $E \to E'$ ayant pour restrictions à F un ensemble équiborné d'applications de F dans F', tandis que $\tilde{q}^0(E|F, E'|F')$ est le b-espace des morphismes de E dans F' avec la bornologie équibornée.

Ainsi défini $\tilde{q}$ est un foncteur $\tilde{q}^{\star} \times \tilde{q} \to \tilde{q}$, on associe immédiatement des morphismes stricts

$$\tilde{q}(E|F, E'|F') \to \tilde{q}(U|V, U'|V')$$

à des morphismes stricts $U|V \to E|F$ et $E'|F' \to U'|V'$. Cette définition de $\tilde{q}$ est cohérente avec celle du foncteur σ et la notation

$\sigma\tilde{q}(E|F,\ E'|F')$ pour l'espace des morphismes stricts $E|F \to E'|F'$.

<u>Définition 4.2</u>. Par récurrence, $\tilde{q}_1(E|F,\ E'|F') = \tilde{q}(E|F,\ E'|F')$, et

$$\tilde{q}_n(E_1|F_1,\ldots,E_n|F_n\ ;\ E'|F') = \tilde{q}(E_1|F_1,\ \tilde{q}_{n-1}(E_2|F_2,\ldots,E_n|F_n\ ;\ E'|F'))$$

On voit que $\tilde{q}_n = \tilde{q}_n^1|\tilde{q}_n^o$ ou $\tilde{q}_n^1(E_1|F_1,\ldots,E_n|F_n\ ;\ E'|F')$ est le b-espace des applications multilinéaires bornées de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans E' dont la restriction à

$$E_1 \times \ldots \times E_{i-1} \times F_i \times E_{i+1} \times \ldots \times E_n$$

est pour chaque i une application multilinéaire bornée de ce produit dans F', tandis que $\tilde{q}^o(E_1|F_1,\ldots,E_n|F_n\ ;\ E'|F')$ est le b-espace des applications multilinéaires bornées de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F'. Chacun des deux espaces est muni d'une bornologie évidente.

4.2. Nous nous rappelons que $\sigma q(E|F,\ E'|F')$ avait été défini en associant à chaque q-espace $E|F$ un q-espace pseudo-isomorphe $E_1|F_1$ avec E_1 libre. L'espace $\sigma q(E|F,\ E'|F')$ était naturellement isomorphe à $\sigma\tilde{q}(E_1|F_1,\ E_1'|F_1')$. La correspondance $E|F \to E_1|F_1$ était un foncteur de $\tilde{q}$ dans $\tilde{q}$ (associant au morphisme $u : E|F \to E'|F'$ le morphisme strict $u_1 : E_1|F_1 \to E_1'|F_1'$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_1|F_1 & \to & E_1'|F_1' \\ \downarrow & & \downarrow \\ E\ |\ F & \to & E'|F' \end{array}$$

commutatif). Ce foncteur appliquait d'ailleurs les pseudo-isomorphismes de $\tilde{q}$ sur des isomorphismes de $\tilde{q}$, il se prolonge donc en un foncteur $q \to \tilde{q}$.

<u>Définition 4.3</u>. Cela étant fait, nous définissons

$$q(E|F,\ E'|F') = \tilde{q}(E_1|F_1,\ E_1'|F_1')$$

Ceci dit, q est un foncteur $q^{\star} \times q \to q$ puisque $\tilde{q}$ est un foncteur $\tilde{q}^{\star} \times \tilde{q} \to \tilde{q}$, et que la correspondance $E|F \to E_1|F_1$ est fonctorielle $q \to \tilde{q}$. Et la composée des foncteurs σ et q est un foncteur $q^{\star} \times q \to$ E.V. qui est bien isomorphe au foncteur σq introduit au paragraphe 2. Ce qui justifie la notation.

4.3. Nous devons maintenant "plonger" $\tilde{q}(E|F, E'|F')$ dans $q(E|F, E'|F')$. Nous trouverons en fait pour chaque $E|F$, $E'|F'$ un monomorphisme

$$H_{E|F,E'|F'} : \tilde{q}(E|F, E'|F') \to q(E|F, E'|F')$$

le système de ces monomorphismes étant un morphisme de foncteurs.

Pour chaque q-espace $E|F$, nous avons donc déterminé un pseudo-isomorphisme $E_1|F_1 \to E|F$. Soit alors $u : E|F \to E'|F'$ un morphisme strict induit par U, et considérons les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{U_1} & E'_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{U} & E' \end{array}$$

où U_1 induit un morphisme strict $E_1|F_1 \to E'_1|F'_1$. L'application U_1 n'est pas déterminée univoquement par U, mais chaque U se relève d'au moins une manière, et U_1 ne relève le morphisme nul que si U_1 applique E_1 dans $\operatorname{Ker} s'_1$. Nous avons ainsi défini une application,

$$T_1 : \tilde{q}^1(E|F, E'|F') \to \tilde{q}^1(E_1|F_1, E'_1|F'_1)/\mathcal{L}(E_1, \operatorname{Ker} s'_1)$$

Cette application applique $\tilde{q}^{\circ}(E|F, E'|F')$ (c'est-à-dire l'espace des applications linéaires bornées de E dans F') dans $\tilde{q}^{\circ}(E_1|F_1, E'_1|F'_1)/\mathcal{L}(E_1, \operatorname{Ker} s'_1)$. Ce dernier espace est d'ailleurs l'imag réciproque bornologique de $\tilde{q}^{\circ}(E|F, E'|F')$ par T_1. De ce fait, T_1 induit un monomorphisme

$$\tilde{q}(E|F,E'|F') \to (\tilde{q}^1(E_1|F_1,E'_1|F'_1)/\mathcal{L}(E_1,\operatorname{Ker} s'_1)|(\tilde{q}^{\circ}(E_1|F_1,E'_1|F'_1)/\mathcal{L}(E_1,\operatorname{Ker}$$

L'espace d'arrivée de ce monomorphisme est isomorphe dans la catégorie q (il est "pseudo-isomorphe" dans $\tilde{q}$) à $q(E|F, E'|F')$. On a ainsi, pour tous $E|F$ et $E'|F'$ une immersion de la catégorie q :

$$T_{E|F,E'|F'} : \tilde{q}(E|F, E'|F') \to q(E|F, E'|F')$$

Il faut encore montrer que le système de ces morphismes est effectivement un homomorphisme de foncteurs dans la catégorie $\tilde{q}$. C'est une démonstration qu'il est plus difficile d'écrire que d'établir. On part de morphismes stricts $U|V \to E|F$, $E'|F' \to U'|V'$. A ces morphismes correspondent des morphismes $U_1|V_1 \to E_1|F_1$, $E_1'|F_1' \to U_1'|V_1'$ (si $U_1|V_1$, $U_1'|V_1'$, $E_1|F_1$, $E_1'|F_1'$ sont des q-espaces pseudo-isomorphes aux espaces donnés, avec U_1, U_1', E_1, E_1' libres). Les deux diagrammes

$$\begin{tikzcd} U|V & \\ & U_1|V_1 \arrow[ul] \arrow[d] \\ E|F \arrow[ur] & \\ & E_1|F_1 \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U'|V' & \\ & U_1'|V_1' \arrow[ul] \\ E'|F' \arrow[u] & \\ & E_1'|F_1' \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Tous les morphismes intervenant dans ces diagrammes sont stricts.

On détermine $T_{E|F,E'|F'}$ en cherchant comment les éléments de $\tilde{q}^1(E|F, E'|F')$ se relèvent dans $\tilde{q}^1(E_1|F_1, E_1'|F_1')$. On détermine de même $T_{U|V,U'|V'}$ en relevant les éléments de $\tilde{q}^1(U|V, U'|V')$ dans $\tilde{q}^1(U_1|V_1, U_1'|V_1')$.

Nous avons un élément de $\tilde{q}^1(U|V, E|F)$, un élément de $\tilde{q}^1(E|F, E'|F')$ et $\tilde{q}^1(E'|F', U'|V')$ (les premier et dernier de ces morphismes déterminent les morphismes stricts $U|V \to E|F$ et $E'|F' \to U'|V'$ intervenant dans les diagrammes ci-dessus). Ces divers morphismes se relèvent dans $\tilde{q}^1(U_1|V_1, E_1|F_1)$, $\tilde{q}^1(E_1|F_1, E_1'|F_1')$ et $\tilde{q}^1(E_1'|F_1', U_1'|V_1')$. Il est clair que la composée des morphismes relevés est un élément de $\tilde{q}^1(U_1|V_1, U_1'|V_1')$ qui relève la composée (dans $\tilde{q}(U|V, U'|V')$) des

morphismes donnés.

Et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{q}(E|F,\ E'|F') & \rightarrow & \tilde{q}(U|V,\ U'|V') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{q}(E_1|F_1,\ E_1'|F_1') & \rightarrow & \tilde{q}(U_1|V_1,\ U_1'|V_1') \end{array}$$

est commutatif.

4.4. Il reste à tirer une morale de nos définitions. L'algèbre multilinéaire de la catégorie $\tilde{q}$ n'est pas trop ésotérique. Mais elle n'est pas naturelle, au moins dans la catégorie q.

On choisit pour chaque q-espace $E|F$ un q-espace $E_1|F_1$ pseudo-isomorphe à $E|F$ avec E_1 libre. Et on montre qu'il est naturel de remplacer dans les considérations multilinéaires les q-espaces donnés initialement par ces q-espaces pseudo-isomorphes.

5. Les q-algèbres.

5.1. Définition 5.1. Une q-algèbre est un couple $(E|F, m)$ où $E|F$ est un q-espace et $m \in \sigma q_2(E|F, E|F ; E|F)$.

Définition 5.1'. Soient $(E|F, m)$ et $(E'|F', m')$ deux q-algèbres Un élément $u \in \sigma q(E|F, E'|F')$ est un morphisme de q-algèbres si les applications

$$\sigma q_2(E|F, E|F ; E|F) \to \sigma q_2(E|F, E|F ; E'|F')$$
$$\sigma q_2(E'|F', E'|F' ; E'|F') \to \sigma q_2(E|F, E|F ; E'|F')$$

que l'on associe à u en tenant compte des propriétés fonctorielles de σq_2 appliquent m et m' sur le même élément de $\sigma q_2(E|F, E|F ; E'|F')$

On voit qu'un isomorphisme de q-algèbres est un isomorphisme de q-espaces qui transforme la multiplication de la première q-algèbre en celle de la seconde.

Rappelons qu'un b-idéal à gauche α d'une b-algèbre $\mathcal{A}$ est un idéal à gauche de l'algèbre, avec une bornologie complétante plus fine que la bornologie induite par $\mathcal{A}$, et telle que la multiplication $(a, x) \mapsto a.x$ soit une application bilinéaire bornée de $\mathcal{A} \times \alpha$ dans α. On définit de manière analogue un b-idéal à droite et un b-idéal bilatère. Si $\mathcal{A}$ est une b-algèbre et α est un b-idéal bilatère, la multiplication de $\mathcal{A}$ est un élément de $\widetilde{\sigma q}^1(\mathcal{A}|\alpha, \mathcal{A}|\alpha ; \mathcal{A}|\alpha)$. Et réciproquement, tout élément $M \in \widetilde{\sigma q}^1(\mathcal{A}|\alpha, \mathcal{A}|\alpha ; \mathcal{A}|\alpha)$ définit sur $\mathcal{A}$ une structure de b-algèbre pour laquelle α est un b-idéal.

Définition 5.2. Si $\mathcal{A}$ est une b-algèbre et α un b-idéal de $\mathcal{A}$, la q-algèbre $\mathcal{A}|\alpha$ est le q-espace $\mathcal{A}|\alpha$, avec la multiplication sur $\mathcal{A}|\alpha$ que la structure multiplicative de $\mathcal{A}$ y induit.

On observe qu'une structure de q-algèbre m sur $\mathcal{A}|\alpha$ est le quotient de $\mathcal{A}$ équipé d'une structure de b-algèbre par son b-idéal α exactement lorsque $m \in \widetilde{\sigma q_2}(\mathcal{A}|\alpha, \mathcal{A}|\alpha ; \mathcal{A}|\alpha)$. Le b-espace $\mathcal{A}|\alpha$ est isomorphe à un b-espace $\mathcal{A}_1|\alpha_1$ avec $\mathcal{A}_1$ libre. A la multiplication m sur $\mathcal{A}|\alpha$ correspond par transport de structure une multiplication m_1 sur $\mathcal{A}_1|\alpha_1$. Et si $\mathcal{A}_1$ est libre,

$$\sigma q_2(\mathcal{A}_1|\alpha_1, \mathcal{A}_1|\alpha_1 ; \mathcal{A}_1|\alpha_1) = \widetilde{\sigma q_2}(\mathcal{A}_1|\alpha_1, \mathcal{A}_1|\alpha_1 ; \mathcal{A}_1|\alpha_1)$$

<u>Proposition 5.1</u>. Toute q-algèbre est isomorphe au quotient d'une b-algèbre $\mathcal{A}_1$ par un b-idéal α_1.

5.2. La composition $(u, f_1, \ldots, f_k) \to u(f_1, \ldots, f_k)$ est, ou induit plus exactement une application multilinéaire de

$$\widetilde{\sigma q_k}(\mathcal{E}'_1,\ldots,\mathcal{E}'_k ; \mathcal{E}) \times \widetilde{\sigma q_{r_1}}(\mathcal{E}''_{11},\ldots,\mathcal{E}''_{1r_1} ; \mathcal{E}'_1)\times\ldots\times\widetilde{\sigma q_{r_k}}(\mathcal{E}''_{k1},\ldots,\mathcal{E}''_{kr_k} ; \mathcal{E}'_k)$$

dans

$$\widetilde{\sigma q_{r_1+\ldots+r_k}}(\mathcal{E}''_{11},\ldots,\mathcal{E}''_{kr_k} ; \mathcal{E})$$

On a défini les espaces σq_k, σq_{r_i} en associant aux q-espaces $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'_1, \ldots, \mathcal{E}'_{r_k}, \mathcal{E}''_{11}, \ldots, \mathcal{E}''_{kr_k}$ des espaces $\mathcal{F}, \mathcal{F}'_i, \mathcal{F}''_{ij}$ isomorphes, $\mathcal{F}, \mathcal{F}'_i, \mathcal{F}''_{ij}$ étant chaque fois le quotient d'un espace libre par un sous-espace. Et par exemple

$$\sigma q_k(\mathcal{E}'_1, \ldots, \mathcal{E}'_k ; \mathcal{E}) = \widetilde{\sigma q_k}(\mathcal{F}'_1, \ldots, \mathcal{F}'_k ; \mathcal{F})$$

De ce fait, la composition induit une application multilinéaire de

$$\sigma q_k(\mathcal{E}'_1,\ldots,\mathcal{E}'_k ; \mathcal{E}) \times \sigma q_{r_1}(\mathcal{E}''_{11},\ldots,\mathcal{E}''_{1r_1} ; \mathcal{E}'_1)\times\ldots\times\sigma q_{r_k}(\mathcal{E}''_{k1},\ldots,\mathcal{E}''_{kr_k} ; \mathcal{E}'_k)$$

dans

$$\sigma q_{r_1+\ldots+r_k}(\mathcal{E}''_{11},\ldots,\mathcal{E}''_{kr_k} ; \mathcal{E})$$

Nous appellerons $f(u_1, \ldots, u_k)$ l'image de $(f, u_1, \ldots, u_k)$ par cette application multilinéaire.

En particulier, soit $(\mathfrak{A}, m)$ une q-algèbre. Appelons id l'application identique de $\mathfrak{A}$.

<u>Définition 5.3</u>. La q-algèbre $(\mathfrak{A}, m)$ est associative si

$$m(m, id) = m(id, m)$$

<u>Proposition 5.2</u>. Le quotient d'une b-algèbre A par un b-idéal α est une q-algèbre associative si, et uniquement si l'application "associateur"

$$(a, b, c) \to a(bc) - (ab)c$$

est une application trilinéaire bornée de $A \times A \times A$ dans α.

C'est immédiat. L'associateur induit l'élément $m(id, m) - m(m, id)$ de $\sigma q_3(A|\alpha, A|\alpha, A|\alpha ; A|\alpha)$.

<u>Proposition 5.3</u>. Toute q-algèbre associative est isomorphe au quotient d'une algèbre associative par un idéal bilatère.

La q-algèbre donnée est de toute façon isomorphe à un quotient $A|\alpha$ où A est une b-algèbre et α est un b-idéal bilatère.

B sera alors la b-algèbre $\tilde{q}^1(A|\alpha, A|\alpha)$ des applications linéaires bornées de A dans A dont la restriction à α est une application bornée de α dans α, avec la bornologie usuelle. On sait que B est une b-algèbre associative, et β est un b-idéal bilatère de B si

$$\beta = \mathcal{L}(A, \alpha) = \tilde{q}^0(A|\alpha, A|\alpha)$$

La représentation régulière gauche applique $a \in A$ sur $ta \in B$ défini par

$$ta(x) = a.x$$

Appliquant le fait que A est une b-algèbre et que α est un b-idéal à gauche, nous voyons que t applique A dans B et applique les parties bornées de A sur des parties bornées de B. Et, du fait que α est un b-idéal à droite, nous concluons que t applique α dans β et applique une partie bornée de α sur une partie bornée de β, donc que t induit un morphisme de q-espaces $A|\alpha \to B|\beta$.

t est un "homomorphisme de A dans B modulo β", c'est-à-dire, l'application $(a, b) \mapsto t(a.b) - ta.tb$ est une application bilinéaire bornée de $A \times A$ dans β. C'est évident

$$(t(a.b) - ta.tb)(x) = (ab)x - a(bx)$$

est un associateur et A est associative modulo α.

Il en résulte que $tA + \beta$ est une b-algèbre. Soient C_1, C_1' bornés dans A et C_2, C_2' bornés dans β. Nous devons montrer que

$$(tC_1 + C_2)(tC_1' + C_2') \subseteq tC_1'' + C_2''$$

où C_1'' est borné dans A et C_2'' dans β. Mais

$$tC_1.tC_1' \subseteq t(C_1.C_1') + \{tx.ty - t(x.y) \mid x \in C_1,\ y \in C_1'\}$$

et

$$(tC_1 + C_2)(tC_1' + C_2') = tC_1.tC_1' + tC_1.C_2' + C_2'.tC_1' + C_1'.C_2'$$

De toute façon, t induit un épimorphisme $A|\alpha \to (tA + \beta)|\beta$. Si A possède une unité, t induit également un monomorphisme, donc un isomorphisme. En effet, ta ne peut appartenir à β que si $ta(1) = a$ appartient à α. L'ensemble tC ne peut être borné dans β que si $tC(1) = C$ l'est dans α.

Si A ne possède pas d'unité, on adjoint une unité à A, ce qui fournit une b-algèbre A_1 contenant A et dans laquelle α est encore

un idéal. On définit $B_1 = \tilde{q}^1(A_1|\alpha, A_1|\alpha)$ et $\beta_1 = \mathcal{L}(A_1, \alpha)$, puis $t_1 : A_1 \to B_1$. On voit que $t_1A + \beta|\beta$ est une sous-algèbre de $B|\beta$, isomorphe à $A|\alpha$. Et $t_1A + \beta$ est une algèbre associative.

5.3. Les espaces vectoriels $\sigma q_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 ; \mathcal{E})$ et $\sigma q_2(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1 ; \mathcal{E})$ sont naturellement isomorphes. On a de ce fait un isomorphisme de $\sigma q_2(\mathcal{E}, \mathcal{E} ; \mathcal{E})$ avec $\sigma q_2(\mathcal{E}, \mathcal{E} ; \mathcal{E})$ correspondant à la permutation des arguments. Bien entendu, $\sigma q_2(\mathcal{E}, \mathcal{E} ; \mathcal{E})$ s'identifie avec $\sigma q(\mathcal{E}, q(\mathcal{E}, \mathcal{E}))$.

A la multiplication m définie sur une q-algèbre correspondent ainsi deux morphismes $\mathcal{E} \to q(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, mettons m' et m''. Si l'on veut, m' est la représentation régulière gauche de l'algèbre et m'' sa représentation régulière droite.

Lorsque la q-algèbre est le quotient d'une b-algèbre A par un b-idéal α, m' est induit par l'application $a \mapsto (x \mapsto a.x)$, m'' est induit par l'application $a \mapsto (x \mapsto x.a)$. Ces deux applications ont en fait leur image dans $\tilde{q}(A|\alpha, A|\alpha)$ mais ce q-espace est isomorphe à un sous-q-espace de $q(A|\alpha, A|\alpha)$.

<u>Définition 5.4</u>. Le centre de la q-algèbre $\mathfrak{a}$ est le noyau

$$\mathrm{Ker}(m' - m'')$$

Si $\mathfrak{a} = A|\alpha$ est le quotient d'une b-algèbre par un idéal, on voit que

$$Z(A|\alpha) = Z_\alpha(A)|\alpha$$

où $Z_\alpha(A)$ est l'ensemble des $a \in A$ tels que l'application $x \mapsto ax - xa$ soit une application bornée de A dans α, une partie $B \subseteq Z_\alpha(A)$ étant bornée si B est bornée dans A et si l'ensemble des applications $x \mapsto ax - xa$, $(a \in B)$ est un ensemble équiborné d'applications de A dans α.

On voit que le centre d'une q-algèbre associative est une sous-q-algèbre.

Il est clair en général que $a + x \in Z_\alpha(A)$ si $a \in Z(A)$, le centre de A et $x \in \alpha$. De même si B est borné dans $Z(A)$ (le centre de A est muni de la bornologie induite) et si B_1 est borné dans α, $B + B_1$ est borné dans $Z_\alpha(A)$.

<u>Proposition 5.4</u>. Toute q-algèbre associative est isomorphe au quotient $A|\alpha$ d'une b-algèbre associative par un idéal, de manière que $Z_\alpha(A) = Z(A) + \alpha$, l'égalité étant valable bornologiquement.

La q-algèbre donnée est isomorphe à $A_o|\alpha_o$ où A_o est une b-algèbre associative et α_o un idéal bilatère. Soit $A_1 = Z_{\alpha_o}(A_o)$. Nous considérons un ordre total, $\prec$ sur A_1 et adjoignons à A_o une indéterminée pour chaque élément de A_1, soit z_a l'indéterminée associée à a.

A sera l'ensemble des séries formelles

$$\Sigma \lambda_n x_n t_{a_{n1}} \dots t_{a_{nk_n}} \qquad (1)$$

où les λ_n sont scalaires, $\Sigma|\lambda_n| < \infty$, où les x_n appartiennent à une partie bornée de A, les a_{ni} à une partie bornée de A_1, et où pour tout n, k_n est un entier non négatif, k_n étant de plus borné indépendamment de n.

Une partie B de A sera bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$, B_2 borné dans A, B_1 borné dans A_1, et $N \in \mathbb{N}$ tels que chaque élément de B ait une expression où $\Sigma|\lambda_n| < M$, où pour tout n, $x_n \in B_2$, $a_{ni} \in B_1$, et $k_n < N$.

Une multiplication se définit de manière évidente sur A. Les indéterminées t_a commutent entre elles et appartiennent au centre de A. Les ensembles d'indéterminées $\{t_a \mid a \in B_1\}$ sont bornés dans A lors-

que B_1 est borné dans A_1.

Nous appliquons A dans A_o en appliquant la série formelle (1) sur

$$\Sigma \lambda_n x_n a_{n1} \dots a_{nk_n}$$

lorsque, pour tout n, les indéterminées sont rangées en ordre croissant, c-à-d $a_{n1} \prec \dots \prec a_{nk_n}$. Cette application est linéaire, bornée les parties bornées de A_o sont des images de parties bornées de A. Posant $\alpha = \bar{t}^1 \alpha_o$ (si $t : A \to A_o$ est l'application que nous étudions), nous voyons que t induit un pseudo-isomorphisme $A|\alpha \to A_o|\alpha_o$.

Il s'agit de voir que ce pseudo-isomorphisme est, non seulement un isomorphisme de q-espaces, mais également un isomorphisme de q-algèbres. Ce sera le cas si t est un homomorphisme de A dans A_o modulo α_o, si l'application

$$(f, g) \mapsto t(f.g) - t(f)t(g)$$

est une application bilinéaire bornée de $A \times A$ dans α_o.

Considérons d'abord le cas où f et g sont des monômes,

$$f = \lambda x t_{a_1} \dots t_{a_k} \qquad g = \mu y t_{b_1} \dots t_{b_\ell}$$

Alors

$$fg = \lambda \mu x y t_{c_1} \dots t_{c_{k+\ell}}$$

où $c_1, \dots, c_{k+\ell}$ sont les éléments $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell$ rangés en ordre croissant pour l'ordre $\prec$ considéré sur A_1. On voit que

$$t(f)t(g) = \lambda \mu x a_1 \dots a_k y b_1 \dots b_\ell$$

tandis que

$$t(fg) = \lambda \mu x y c_1 \dots c_{k+\ell}$$

et $t(f.g) - t(f)t(g)$ est la somme d'un nombre fini, borné (au maximum $h(\ell + 1)$) termes, chacun de ceux-ci étant le produit d'un commu-

taleur par un certain nombre de facteurs x, y, a_i, b_j.

Cet élément appartient à l'idéal bilatère α_0. Lorsque f et g parcourent des ensembles bornés de monômes, $t(f.g) - t(f)t(g)$ parcourt de même une partie bornée de α_0.

Toute partie bornée de A est contenue dans la fermeture complétante d'un ensemble borné de monômes. Il en résulte que l'ensemble des $t(f.g) - t(f)t(g)$ est borné dans α_0 lorsque f et g parcourent des parties bornées de A, ce que t est effectivement un homomorphisme modulo α_0.

5.4. <u>Définition 5.5.</u> La q-algèbre $\mathfrak{A}$ est commutative si $m' = m''$ donc si $\mathfrak{A}$ est égal à son centre.

<u>Corollaire</u> Une q-algèbre commutative et associative est isomorphe au quotient d'une b-algèbre commutative et associative par un b-idéal.

Nous supposons que $\mathfrak{A}_1|\alpha_1$ est une q-algèbre commutative et associative. La proposition 5.3. nous permet de supposer que $\mathfrak{A}_1 = Z(\mathfrak{A}_1) + \alpha_1$.

L'identité $Z(\mathfrak{A}_1) \to \mathfrak{A}_1$ est un morphisme de b-algèbres et induit un isomorphisme de q-espaces

$$Z(\mathfrak{A}_1) \mid \alpha_1 \cap Z(\mathfrak{A}_1) \to \mathfrak{A}_1|\alpha_1$$

Il en résulte que $\mathfrak{A}_1|\alpha_1$ est isomorphe à $Z(\mathfrak{A}_1) \mid \alpha_1 \cap Z(\mathfrak{A}_1)$

6. Quotients banachiques.

6.1. On peut définir les quotients banachiques comme les q-espaces isomorphes aux quotients $E|F$ où E et F sont des espaces de Banach. Un morphisme de quotients banachiques $E|F \to E'|F'$ est alors un morphisme de q-espaces, tel que $E|F$ et $E'|F'$ soient des quotient banachiques.

On peut également définir les quotients banachiques comme les q-espaces l'ont été. Une catégorie $\widetilde{qB}$ serait définie. Ses éléments seraient les couples $(E, F) = E|F$ où E est un espace de Banach et F un sous-espace banachique de E. Les morphismes seraient les éléments du quotient de l'espace des applications linéaires bornées $E \to E'$ ayant une restriction à F, linéaire bornée de F dans F', par les applications linéaires bornées de E dans F'.

On définirait par ailleurs les pseudo-isomorphismes $E|F \to E'|F'$ comme les morphismes induits par une application linéaire bornée surjective $u : E \to E'$ telles que $uF = F'$ (u étant bornée $F \to F'$). La catégorie qB serait construite de manière à rendre inversibles les pseudo-isomorphismes.

On montre aisément que les deux définitions sont équivalentes. Les espaces de Banach libres seraient les espaces $\ell_1(X)$, X un ensemble.

6.2. La théorie multilinéaire des quotients banachiques se développe comme la théorie linéaire. On trouve pour tout quotient banachique $E|F$ un quotient banachique $E_1|F_1$ avec E_1 libre et un pseudo-isomorphisme $E_1|F_1 \to E|F$. Le quotient banachique $q(E|F, E'|F')$ s'identifie avec le quotient $q^1(E_1|F_1, E_1'|F_1')|q^0(E_1|F_1, E_1'|F_1')$ où $q^1(E_1|F_1, E_1'|F_1')$ est l'espace de Banach des applications linéaires

bornées $E_1 \to E'_1$ qui appliquent F_1 dans F'_1, tandis que $q^\circ(E|F, E'|F')$ est l'espace des applications linéaires bornées $E_1 \to F'_1$, où $E_1|F_1$ et $E'_1|F'_1$ sont des q-espaces, pseudo-isomorphes à $E|F$, $E'|F'$, avec E_1 et E'_1 libres.

Et l'espace, défini par récurrence, par

$$\sigma q_n(E_1|F_1,\ldots E_n|F_n \; ; \; E'|F') = \sigma q(E_1|F_1, \; q_{n-1}(E_2|F_2,\ldots,E_n|F_n \; ; \; E'|F'))$$

est celui des "applications multilinéaires" $E_1|F_1 \times \ldots \times E_n|F_n \to E'|F'$.

6.3. Une algèbre quotient banachique est un espace quotient banachique, avec la structure qu'y définit une application bilinéaire bornée $E|F \times E|F \to E|F$. Reprenant les démonstrations données pour les q-algèbres, on établit les résultats suivants

<u>Proposition 6.1</u>. Toute algèbre quotient banachique est isomorphe au quotient d'une algèbre de Banach par un idéal bilatère. Une algèbre quotient banachique associative est isomorphe au quotient d'une algèbre de Banach associative par un idéal bilatère.

La démonstration du fait que $A|\alpha$ est isomorphe à $A_1|\alpha_1$ où $Z_{\alpha_1}(A_1) = Z(A_1) + \alpha_1$ doit être modifiée. L'algèbre A_1 associée à A au paragraphe 5 est une vraie b-algèbre, même lorsque A est une algèbre de Banach.

A est une algèbre de Banach. Nous appelons $\|a\|$ la norme de $a \in A$. Ensuite α est un idéal banachique. Nous appelons $\nu(x)$ la norme de $x \in \alpha$ et supposons ν choisi de manière telle que $\nu(a.x) \leqslant \|a\| \; \nu(x)$, $\nu(x.a) \leqslant \|a\| \; \nu(x)$ si $a \in A$, $x \in \alpha$.

Nous normons le centre $Z_\alpha(A)$ en posant

$$p(z) = \|z\| + \sup \{\nu(az - za) \mid \|a\| \leqslant 1\}$$

On vérifie directement que $p(z_1.z_2) \leqslant p(z_1)p(z_2)$.

Cela étant fait, on introduit une indéterminée t_z pour chaque $z \in Z_\alpha(A)$. On considère des monômes, c'est-à-dire des expressions $at_{z_1} \dots t_{z_k}$ où $a \in A$ et chaque $z_i \in Z_\alpha(A)$. Et on définit la "norme" d'un monôme

$$q(at_{z_1} \dots t_{z_k}) = (k + 1) \|a\| \, p(z_1) \dots p(z_k)$$

Il est clair que $q(\xi.\eta) \leqslant q(\xi)q(\eta)$ si ξ et η sont des monômes.

A_1 est alors l'ensemble des sommes de séries formelles

$$A_1 = \{ \Sigma \lambda_n m_n \mid \Sigma |\lambda_n| \, q(m_n) < \infty \}$$

la norme d'une série formelle étant bien entendu

$$q_1(\Sigma \lambda_n m_n) = \Sigma |\lambda_n| \, q(m_n)$$

A_1 est une algèbre de Banach.

On applique A_1 dans A en partant d'un ordre total sur $Z_\alpha(A)$ et en appliquant $m = at_{z_1} \dots t_{z_k}$ sur $\varphi(m) = az_1 \dots z_k$ si $z_1 \prec \dots \prec z_k$, puis $\Sigma \lambda_n m_n$ sur $\Sigma \lambda_n \varphi(m_n)$. Si $m = at_{z_1} \dots t_{z_k}$ et $m' = a't_{z'_1} \dots t_{z'_{k'}}$ sont deux monômes,

$$\varphi(m.m') - \varphi(m)\varphi(m')$$

est une somme de termes, chacun de ces termes étant un produit de $k + k' + 1$ facteurs, un des facteurs est un commutateur $[z_i, z'_j]$, ou $[z_i, a']$, les autres facteurs sont des éléments z_i, z'_j, a, ou a'. Le nombre des termes est au maximum $(k + 1)(k' + 1)$. Quand on met le tout en forme, on voit que

$$\nu(\varphi(m.m') - \varphi(m)\varphi(m')) \leqslant q(m)q(m')$$

Cette inégalité, valable pour les monômes, s'étend immédiatement aux séries formelles. L'application $\varphi : A_1 \to A$ est un homomorphisme modulo α.

A partir d'ici, on établit le résultat pour les algèbres quotients banachiques comme on l'établit pour les q-algèbres.

<u>Proposition 6.2</u>. Toute algèbre quotient banachique associative est isomorphe au quotient d'une algèbre associative par un idéal bilatère $A_1|\alpha_1$ tel que

$$Z_{\alpha_1}(A_1) = Z(A_1) + \alpha_1$$

<u>Proposition 6.3</u>. Toute algèbre quotient banachique commutative et associative est isomorphe au quotient d'une algèbre commutative et associative par un idéal banachique.

7. Quelques compléments.

7.1. Nous avons défini des q-espaces et des q-algèbres. Nous en avons défini les morphismes. Nous avons montré que nos catégories avaient des propriétés sympathiques. Et nous avons affirmé que la théorie était motivée par des considérations liées au calcul symbolique. Mais nous n'avons pas montré que la construction du calcul symbolique était "naturelle".

Il est assez clair que cette construction résiste aux morphismes stricts. Ce qui est moins clair, c'est que le calcul symbolique construit en fonction d'éléments d'une q-algèbre $\mathcal{A}|\alpha$ est équivalent à celui que l'on construirait en fonction des éléments correspondants d'une q-algèbre $\mathcal{A}'|\alpha'$ pseudo-isomorphe à $\mathcal{A}|\alpha$.

Les données à partir desquelles le calcul symbolique est défini sont évidemment naturelles. Au paragraphe 1 ci-dessus, on considère des éléments $a_1, \ldots, a_n$ de $\mathcal{A}/\alpha = \sigma(\mathcal{A}|\alpha)$ et les $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que

$$1 \notin id\ell(a_1 - s_1, \ldots, a_n - s_n \; ; \mathcal{A}/\alpha)$$

Seule la structure d'algèbre de $\mathcal{A}/\alpha$ apparaît.

La situation est un peu plus compliquée, mais n'est pas foncièrement différente dans la situation étudiée dans le mémoire [10]. Si $s = (s_1, \ldots, s_n)$ sont des variables complexes, si E est un b-espace, si $\delta_o(s) = (1 + |s|^2)^{-1/2}$, $\Theta(s \; ; \delta_o \; ; E)$ sera l'ensemble des applications $u : \mathbb{C}^n \to E$ telles que $\delta_o(s)^N u(s)$ soit une fonction bornée à valeurs dans E pour N grand; une partie $B \subseteq \Theta(s \; ; \delta_o \; ; E)$ est bornée si N existe tel que

$$\{\delta_o(s)^N u(s) \mid u \in B, \; s \in \mathbb{C}^N\}$$

soit borné dans E.

$\Theta(s\ ;\ \delta_o\ ;\ E)$ est un b-espace si E en est un. Si F est un sous b-espace de E, $\Theta(s\ ;\ \delta_o\ ;\ F)$ est un sous-b-espace de $\Theta(s\ ;\ \delta_o\ ;\ E)$. Nous définissons

$$\Theta(s\ ;\ \delta_o\ ;\ E|F) = \Theta(s\ ;\ \delta_o\ ;\ E)\ |\ \Theta(s\ ;\ \delta_o\ ;\ F)$$

Il est clair que cet espace dépend fonctoriellement de $E|F$. Si $E|F \to E'|F'$ est un morphisme strict, on trouve un morphisme strict

$$\Theta(s\ ;\ \delta_o\ ;\ E|F) \to \Theta(s\ ;\ \delta_o\ ;\ E'|F')$$

Si le morphisme strict donné est un pseudo-isomorphisme, le morphisme strict associé en est un également.

De même, si $\mathfrak{a}$ est une b-algèbre et α un b-idéal,

$$\Theta(s\ ;\ \delta_o\ ;\ \mathfrak{a}|\alpha) = \Theta(s\ ;\ \delta_o\ ;\ \mathfrak{a})\ |\ \Theta(s\ ;\ \delta_o\ ;\ \alpha)$$

est une q-algèbre qui dépend naturellement de $\mathfrak{a}|\alpha$. Le "spectre de $(a_1, \ldots, a_n)$", si les $a_i \in \mathfrak{a}/\alpha = \sigma\,\mathfrak{a}|\alpha$ est l'ensemble des fonctions $\delta : \mathbf{C}^n \to \mathbb{R}_+$

$$1 \in id\ell(a_1-s_1, \ldots, a_n-s_n,\ \delta(s)\ ;\ \sigma\Theta(s\ ;\ \delta_o\ ;\ \mathfrak{a}|\alpha)$$

Si $\mathfrak{a}|\alpha$ et $\mathfrak{a}'|\alpha'$ sont des q-algèbres isomorphes, si $(a'_1, \ldots, a'_n)$ sont les éléments correspondants de $\mathfrak{a}'/\alpha'$ $\sigma\mathfrak{a}'|\alpha'$, il est clair que les spectres de $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathfrak{a}|\alpha$ et de $(a'_1, \ldots, a'_n)$ dans $\mathfrak{a}'|\alpha'$ sont égaux.

Mais le fait que les données d'un problème sont naturelles n'assure pas que les constructions effectuées à partir de ces données le sont.

7.2. Nous aurons besoin de quelques foncteurs de la catégorie $\mathfrak{q}$ dans d'autres catégories. Une classe de foncteurs exacts à droite est facile à prolonger.

<u>Définition 7.1</u>. Nous dirons que

$$F \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} G$$

est une suite exacte de la catégorie b si $v \circ u = 0$ et si toute partie bornée B de E telle que $vB = 0$ est l'image uB' d'une partie bornée B' de F.

En particulier

$$0 \to F \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} G \to 0$$

est une suite exacte courte de b si u est un isomorphisme du b-espace F avec un sous-espace fermé de E tandis que v induit un isomorphisme de E/uF avec G.

La définition 7.1. n'est pas celle que l'on obtiendrait en appliquant à b les définitions générales catégoriques des suites exactes. Si nous identifions chaque b-espace E avec le q-espace $E|0$, les suites exactes de la définition 7.1. sont les suites de morphismes de b qui sont exactes dans q.

<u>Définition 7.2</u>. Un foncteur Φ de la catégorie b dans une catégorie abélienne est exact à droite s'il applique une suite exacte courte de b, $0 \to F \to E \to G \to 0$ sur une suite exacte à droite $\Phi(F) \to \Phi(E) \to \Phi(G) \to 0$. Il est exact s'il est exact à droite et applique un monomorphisme sur un monomorphisme.

<u>Proposition 7.1</u>. Un foncteur exact à droite de la catégorie b dans une catégorie abélienne K a une extension exacte à drcite à la catégorie q. Cette extension est unique à un isomorphisme de foncteurs près (deux extensions exactes à droite sont isomorphes).

Si $E|F$ est un q-espace, Φ applique l'inclusion $F \to E$ sur

un morphisme $\Phi(F) \to \Phi(E)$. Le (un) conoyau de ce morphisme sera appelé $\Phi(E|F)$. Si $u_1 : E \to E'$ induit un morphisme strict $E|F \to E'|F'$, nous avons un diagramme commutatif de la catégorie b

$$\begin{array}{ccc} F & \to & E \\ \downarrow u_0 & & \downarrow u_1 \\ F' & \to & E' \end{array}$$

où u_0 est la restriction de u_1 à F. Le foncteur Φ applique ce diagramme sur un diagramme commutatif de K. On sait qu'un, et un seul morphisme existe du conoyau $\Phi(E|F)$ du morphisme $\Phi(F) \to \Phi(E)$ dans le conoyau $\Phi(E'|F')$ du morphisme $\Phi(F') \to \Phi(E')$ qui rende le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi(F) & \to & \Phi(E) & \to & \Phi(E|F) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Phi(F') & \to & \Phi(E') & \to & \Phi(E'|F') & \to & 0 \end{array}$$

Par ailleurs, si $u = 0$, u_1 se relève en une application $E \to F'$ qui est un morphisme de la catégorie b. On peut donc compléter le diagramme ci-dessus en lui adjoignant un morphisme $\Phi(E) \to \Phi(F')$, le nouveau diagramme est encore commutatif. Et le morphisme $\Phi(E|F) \to \Phi(E'|F')$ associé à u_1 est nul.

Le foncteur $\Phi : b \to K$ a ainsi été prolongé à $\tilde{q}$.

Un pseudo-isomorphisme de $\tilde{q}$, $E|F \to E'|F'$ est déterminé par un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & A & \to & A & \to & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & F & \to & E & \to & E \,|\, F & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & F' & \to & E' & \to & E' \,|\, F' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Ce diagramme est appliqué par Φ sur

$$\begin{array}{ccccccc}
\Phi(A) & \to & \Phi(A) & \to & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Phi(F) & \to & \Phi(E) & \to & \Phi(E \mid F) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Phi(F') & \to & \Phi(E') & \to & \Phi(E' \mid F') & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Les trois lignes, et les deux colonnes de gauche de ce nouveau diagramme sont exactes, la colonne de droite l'est donc aussi. L'image par Φ du pseudo-isomorphisme $E|F \to E'|F'$ est un isomorphisme. Φ s'étend en un foncteur $q \to K$.

Il faut encore montrer que l'extension construite est exacte à droite. Partons d'une suite exacte courte de q. Comme tout monomorphisme de q est la composée d'un isomorphisme avec une injection canonique $E'|F \to E|F$, et que tout épimorphisme est la composée d'une surjection canonique $E|F \to E|E'$, nous voyons que la suite exacte courte la plus générale a la forme

$$0 \to E'|F \to E|F \to E|E' \to 0$$

(à des isomorphismes près).

Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\Phi(F) & \to & \Phi(F) & \to & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Phi(E') & \to & \Phi(E) & \to & \Phi(E|E') & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Phi(E'|F) & \to & \Phi(E|F) & \to & \Phi(E|E') & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Les trois colonnes et les deux lignes supérieures de ce diagramme sont exactes. La troisième ligne est donc exacte.

<u>Proposition 7.2</u>. L'extension à q d'un foncteur exact $b \to K$ est un foncteur exact.

On construit l'extension comme précédemment. Dans le diagramme commutatif ci-dessus, les morphismes $\Phi(F) \to \Phi(F)$, $\Phi(E') \to \Phi(E)$, $\Phi(F) \to \Phi(E')$, $\Phi(F) \to \Phi(E)$ sont moniques. On voit alors que le morphisme $\Phi(E'|F) \to \Phi(E|F)$ est monique. Ce qui achève la démonstration.

7.3. Soit E un b-espace et X un espace compact. $C(X, E)$ est par définition la limite inductive des espaces de Banach $C(X, E_B)$, B borné complétant dans E. Une application $f : X \to E$ est donc continue s'il existe B borné complétant tel que $fX \subseteq E_B$, $f : X \to E_B$ étant continue pour la structure banachique de E_B. De même, un ensemble $\mathcal{B}$ d'applications $X \to E$ est borné dans $C(X, E)$ s'il existe B tel que $\mathcal{B}$ soit contenu dans $C(X, E_B)$ et y soit borné.

<u>Proposition 7.3</u>. Le foncteur $E \mapsto C(X, E)$ est un foncteur exact de la catégorie b dans la catégorie q, quel que soit l'espace compact X.

<u>Corollaire</u>. On définit un foncteur exact $q \to q$ en posant

$$C(X, E|F) = C(X, E) \mid C(X, F)$$

Pour établir la propriété 7.3., on part d'une suite exacte courte

$$0 \to F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{s} G \to 0$$

Il est évident que

$$0 \to C(X, F) \to C(X, E) \to C(X, G)$$

est exacte (une application continue de X dans E dont la composée avec l'application quotient $E \to G$ est nulle est une application de

X dans le noyau F, et est continue, la bornologie du noyau étant induite par celle de l'espace). Nous devons encore montrer que l'application $C(X, E) \to C(X, G)$ est bornologiquement surjective.

Partons d'un $u : X \to G$ continu. Soit C borné dans G tel que u soit continu de X dans G_C. Soit B borné complétant dans E tel que $sB \supseteq C$ puis $B'' = sB$. Alors $B'' \supseteq C$ et est borné complétant. Soit $B' = \bar{t}^1 B \subseteq F$, B' est borné complétant. Nous avons la suite exacte de morphismes banachiques

$$0 \to F_{B'} \to E_B \to G_{B''} \to 0$$

L'application u appartient à $C(X, G_{B''})$.

Nous normons les trois espaces $F_{B'}$, E_B, $G_{B''}$ par les jauges respectives de B', B, et de B''. Nous supposons que $\|u\| \leqslant 1$. Nous considérons un recouvrement ouvert de X, soit

$$X = U_1 \cup \ldots \cup U_k$$

tel que l'oscillation de u sur chaque U_i soit au maximum $1/2$. Nous considérons une partition continue de l'unité sur X, subordonnée au recouvrement $\cup U_i$, soit

$$1 = f_1 + \ldots + f_k$$

et pour chaque ouvert U_i un point $x_i \in U_i$.

Nous choisissons $e_i \in E_B$ relevant $u(x_i)$, tel que $\|e_i\| < 1 + \varepsilon$ et posons

$$v_1(x) = \Sigma\, f_i(x)\, e_i$$

On a $v_1 \in C(X, E_B)$, $\|v_1\| \leqslant 1 + \varepsilon$,

$$t \circ v_1(x) = \Sigma\, f_i(x)\, u(x_i)$$

donc $$u(x) - t \circ v_1(x) = \Sigma\, f_i(x)[u(x) - u(x_i)]$$

On voit que $\|u - t \circ v_1\| \leqslant \frac{1}{2}$.

Nous poursuivons cette construction par récurrence, posant $u_1 = u - s \circ v_1$, puis trouvant $v_2 \in C(X, E)$, $\|v_2\| \leqslant 2^{-1}(1 + \varepsilon)$ tel que $\|u_2\| \leqslant 2^{-2}$ si $u_2 = u_1 - s \circ v_1$, et plus généralement $v_k \in C(X, E)$, $\|v_k\| \leqslant 2^{-k+1}(1 + \varepsilon)$, et $\|u_k\| \leqslant 2^{-k}$ si $u_k = u_{k-1} - s \circ v_k$.

La fonction $v = \Sigma_1^\infty v_k$ appartient à $C(X, E_B)$ et vérifie la relation $u = s \circ v$. Et $\|v\| \leqslant 2(1 + \varepsilon)$. Chaque élément de $G_{B''}$ se relève en un élément de E_B. Une partie bornée de $G_{B''}$ se relève en une partie bornée de E_B. L'application $v \mapsto s \circ v$ applique $C(X, E)$ sur $C(X, G)$ et une partie bornée de $C(X, E)$ sur une partie bornée de $C(X, G)$.

La proposition 7.3. est établie. Son corollaire est évident, L'image de $E|F$ par l'extension du foncteur $C(X, .)$ est un conoyau du morphisme $C(X, F) \to C(X, E)$ associé à l'inclusion $F \subseteq E$ et $C(X, E)|C(X, F)$ est un tel conoyau.

7.3. Soit maintenant X une partie compacte convexe équilibrée d'un espace localement convexe. Soit I l'intervalle unité, $I = [0, 1]$. Nous avons deux homomorphismes de foncteurs $C(X, .) \to C(X \times X \times I, .)$ sur la catégorie des b-espaces, le premier appliquant $u \in C(X, E)$ sur $T_1 u \in C(X \times X \times I, E)$ défini par

$$T_1 u(x, y, \lambda) = u(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

le second appliquant u sur $T_2 u$ défini par

$$T_2 u(x, y, \lambda) = \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y)$$

Ces deux homomorphismes de foncteurs $b \to b$ s'étendent en des homomorphismes de foncteurs $q \to q$.

<u>Définition 7.3</u>. Le noyau de la différence $T_1 - T_2$ sera appelé $L(X, E|F)$.

On voit que $L(X, E|F)$ est un foncteur covariant en $E|F$. C'est aussi un foncteur contravariant en X. Si $Y \to X$ est une application linéaire continue de compacts convexes équilibrés localement convexes (de duals banachiques [11], [12]) nous avons le diagramme commutatif d'espaces compacts

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y \times I & \to & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times X \times I & \to & X \end{array}$$

et donc le diagramme commutatif de q-espaces.

$$\begin{array}{ccc} C(X, E|F) & \to & C(X \times X \times I, E|F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(Y, E|F) & \to & C(Y \times Y \times I, E|F) \end{array}$$

donc un morphisme $L(X, E|F) \to L(Y, E|F)$ des noyaux.

La catégorie des compacts convexes équilibrés localement convexes (des duals banachiques) est duale de la catégorie des espaces de Banach. On associe à un espace de Banach U la boule unité faible de son dual, et à un dual banachique X l'espace des formes linéaires continues sur X avec la topologie de la convergence uniforme.

<u>Définition 7.4</u>. $\Lambda(U, E|F) = L(X, E|F)$ si X est un dual banachique et U l'espace de Banach dont X est le dual.

On voit que $\Lambda(U, E|F)$ est un foncteur $\mathrm{Ban} \times q \to q$.

Par ailleurs, q possède suffisamment de limites inductives et de limites projectives. C'est en effet une catégorie abélienne qui possède suffisamment de sommes directes et de produits directs. Une limite inductive est un conoyau de sommes directes, une limite projective est un noyau de produits directs.

<u>Définition 7.5</u>. Si U est un b-espace, $\Lambda_b(U, E|F)$ est la limite inductive des q-espaces $\Lambda(U_B, E|F)$ où B parcourt un système fondamental de parties bornées complétantes de U. Si U est un espace localement convexe complet, $\Lambda_t(U, E|F)$ est la limite projective des espaces $\Lambda(\hat{U}_\nu, E|F)$, où ν parcourt un système fondamental de semi-normes et $\hat{U}_\nu$ est le complété du quotient séparé de U avec la semi-norme ν.

Une dernière remarque. Si X est un dual banachique, il est bon d'expliciter un peu $L(X, E|F)$. C'est le noyau d'un morphisme $C(X, E|F) \to C(X \times X \times I, E|F)$ qui se trouve être strict. Le noyau des morphismes stricts est facile à décrire.

$$L(X, E|F) = L_1(X, E|F)|L_o(X, E|F)$$

où $L_o(X, E|F) = C(X, F)$ tandis que $L_1(X, E|F)$ a pour éléments les $u \in C(X, E)$ tels que

$$u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu u(y)$$

soit, en fonction de x, y, λ un élément de $C(X \times X \times I, F)$. L'espace $L_1(X, E|F)$ est celui des applications continues de X dans E qui sont, en un sens évident linéaires modulo F.

On a toujours une application de $\Lambda(U, E)$ dans $\Lambda(U, E|F)$. Le noyau de cette application est $\Lambda(U, F)$. Mais $\Lambda(U, E|F)$ n'est pas égal à $\Lambda(U, E)|\Lambda(U, F)$.

<u>Proposition 7.4</u>. Soit $f : U \to V$ une application nucléaire d'espaces de Banach. L'application $\Lambda(U, E|F) \to \Lambda(V, E|F)$ associée à f se factorise

$$\Lambda(U, E|F) \to \Lambda(V, E)|\Lambda(V, F) \to \Lambda(V, E|F)$$

la seconde application étant l'application canonique de $\Lambda(V, E)|\Lambda(V, F)$ dans $\Lambda(V, E|F)$ décrite ci-dessus.

En fait, l'application nucléaire $U \to V$ se factorise $U \to c_o \to V$. On a, pour tout espace $C(X)$ la relation

$$\Lambda(C(X), E|F) = \Lambda(C(X), E)|\Lambda(C(X), F)$$
$$= C(X, E|F)$$

et en particulier pour c_o,

$$\Lambda(c_o, E|F) = c_o(E)|c_o(F)$$

La vérification de la proposition 7.4. est immédiate.

<u>Proposition 7.5</u>. Soit U un b-espace nucléaire. On a

$$\Lambda_b(U, E|F) = \Lambda_b(U, E)|\Lambda_b(U, F)$$

Lorsque $B \subseteq B'$ sont bornés complétants, l'application canonique $U_B \to U_{B'}$ étant nucléaire, on a la factorisation

$$\Lambda(U_B, E|F) \to \Lambda(U_{B'}, E)|\Lambda(U_{B'}, F) \to \Lambda(U_{B'}, E|F)$$

Cette factorisation montre que la limite inductive $\Lambda_b(U, E|F)$ s'identifie à la limite inductive des espaces

$$\Lambda(U_B, E)|\Lambda(U_B, F)$$

donc à $\Lambda_b(U, E)|\Lambda_b(U, F)$

Les propositions 7.4., 7.5. sont à rapprocher des résultats suivants :

<u>Proposition 7.6</u>. Soit $f : U \to V$ une application nucléaire d'espaces de Banach. Le morphisme $q(V, E|F) \to q(U, E|F)$ associé à f se factorise

$$q(V, E|F) \to q(U, E)|q(U, F) \to q(U, E|F)$$

<u>Proposition 7.7</u>. Soit U un b-espace nucléaire. Le q-espace $q(U, E|$ est la limite projective des espaces $\mathcal{L}(U_B, E)|\mathcal{L}(U_B, F)$.

On utilise ici la factorisation $U \to \ell_1 \to V$ de toute application nucléaire, et le fait que ℓ_1 est libre, de ce fait

$$q(\ell_1, E|F) = \mathcal{L}(\ell_1, E)|\mathcal{L}(\ell_1, F)$$

Dans un autre sens, la proposition 7.7. doit être rapprochée de la définition 1.4. L'espace des "applications permises" de U dans $E|F$ n'est autre que $q(U, E|F)$.

7.4. On peut indiquer comment les q-espaces qui interviennent dans la définition du calcul symbolique se comportent fonctoriellement en $E|F$, et lorsque leur comportement n'est pas fonctoriel, montrer comment on peut les modifier pour obtenir des foncteurs.

Si E est un b-espace, si $s = (s_1, \ldots, s_n)$ est un n-uple de v riables complexes, si δ est une fonction lipschitzienne bornée non négative, on introduit (cf. [10]) les b-espaces $\Theta(s ; \delta ; E)$, $\theta_r(s ; \delta ;$ $\theta(s ; \delta ; E)$ dont les éléments sont des fonctions de s sur l'ouvert $\delta(s) > 0$. La fonction u appartient à $\Theta(s ; \delta ; E)$ si $\delta(s)^N u(s)$ est une fonction bornée sur son domaine pour N suffisamment grand. Elle appartient à $\theta_r(s ; \delta ; E)$ si elle est de classe C_r sur son domaine et si elle appartient à $\Theta(s ; \delta ; E)$ ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à r. Elle appartient à $\theta(s ; \delta ; E)$ si elle appartient à $\theta_r(s ; \delta ; E)$ quel que soit r. On munit ces divers espaces de bornologies évidentes.

Dans la définition du calcul symbolique, on est amené à introduire les espaces

$$\Theta(s ; \delta ; E) \mid \Theta(s ; \delta ; F)$$
$$\theta_r(s ; \delta ; E) \mid \theta_r(s ; \delta ; F)$$
$$\theta(s ; \delta ; E) \mid \theta(s ; \delta ; F)$$

Le premier dépend évidemment d'une manière fonctorielle de $E|F$ (la

démonstration est d'ailleurs esquissée au paragraphe 7.1. lorsque $\delta(s) = \delta_o(s) = (1 + |s|^2)^{-1/2})$. Le fait que le troisième de ces espaces dépende fonctoriellement de $E|F$ n'est pas difficile à établir. Il s'agit en fait de l'espace $\Lambda(\theta(s\ ;\ \delta)\ ;\ E|F)$, en effet $\theta(s\ ;\ \delta)$ est nucléaire, et $\Lambda(\theta(s\ ;\ \delta),\ E) = \theta(s\ ;\ \delta\ ;\ E)$.

Je ne vois aucune raison pour que $\theta_r(s\ ;\ \delta\ ;\ E)|\theta_r(s\ ;\ \delta\ ;\ F)$ dépende fonctoriellement de $E|F$, et crois plutôt que cette dépendance n'est pas fonctorielle. Ce fait ne sera en pratique pas grave.

L'inclusion $\theta_r(s\ ;\ \delta) \to \theta_{r-2n-1}(s\ ;\ \delta)$ est "semi-nucléaire". A tout borné B de $\theta_r(s\ ;\ \delta)$ correspond un borné B' de $\theta_{r-2n-1}(s\ ;\ \delta$ $B' \supseteq B$ tel que l'inclusion

$$[\theta_r(s\ ;\ \delta)]_B \to [\theta_{r-2n-1}(s\ ;\ \delta)]_{B'}\ .$$

soit nucléaire.

Nous définissons $\theta_r(s\ ;\ \delta\ ;\ E|F) = \Lambda(\theta_r(s\ ;\ \delta)\ ;\ E|F)$, nous appliquons la proposition 7.4. et adaptons la démonstration de la proposition 7.5. L'application canonique $\theta_r(s\ ;\ \delta\ ;\ E|F) \to \theta_{r-2n-1}(s\ ;\ \delta\ ;\ E|F)$ se factorise

$$\theta_r(s\ ;\ \delta\ ;\ E|F) \to \theta_{r-2n-1}(s\ ;\ \delta\ ;\ E)|\theta_{r-2n-1}(s\ ;\ \delta\ ;\ F)$$
$$\to \theta_{r-2n-1}(s\ ;\ \delta\ ;\ E|F)$$

La chaîne des q-espaces $\theta_r(s\ ;\ \delta\ ;\ E)|\theta_r(s\ ;\ \delta\ ;\ F)$ est équivalente à une chaîne $\theta_r(s\ ;\ \delta\ ;\ E|F)$ dont les termes dépendent de $E|F$ d'une manière fonctorielle.

Il est possible de refaire les raisonnements en remplaçant systématique $\theta_r(s\ ;\ \delta\ ;\ E)|\theta_r(s\ ;\ \delta\ ;\ F)$ par $\theta_r(s\ ;\ \delta\ ;\ E|F)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. I.CNOP. Spectral study of holomorphic function with bounded growth. Ann.Inst.Fourier. 22. 1972. p.293-309.

2. J.-P.FERRIER. Approximation des fonctions holomorphes de plusieurs variables avec croissance. Ann.Inst.Fourier. 22. 1972. p.67-87.

3. J.-P.FERRIER. Spectral theory and complex analysis. Notas de Matematica. North Holland Mathematics Studies. 1973.

4. H.HOGBE-NLEND. Théorie des bornologies et applications. Lecture Notes in Mathematics. v.213. Berlin. Springer-Verlag. 1971.

5. G.NOËL. Une immersion de la catégorie des espaces bornologiques convexes séparés dans une catégorie abélienne. C.R.Acad.Sc.Paris. 269. 1969. p.195-197.

6. G.NOËL. Sur le complété d'un Q-espace. C.R.Acad.Sc.Paris. 269. 1969. p.238-240.

7. G.NOËL. Sur le produit tensoriel dans les catégories QESP et QESPC. C.R.Acad.Sc.Paris. 269. 1969. p.275-278.

8. G.NOËL. Produit tensoriel et platitude des Q-espaces. Bull.Soc. Math.Belgique. 22. 1970. p.119-142.

9. L.WAELBROECK. Le complété et le dual d'un espace "à bornés". C.R.Acad.Sc.Paris. 253. 1961. p.2827-2828.

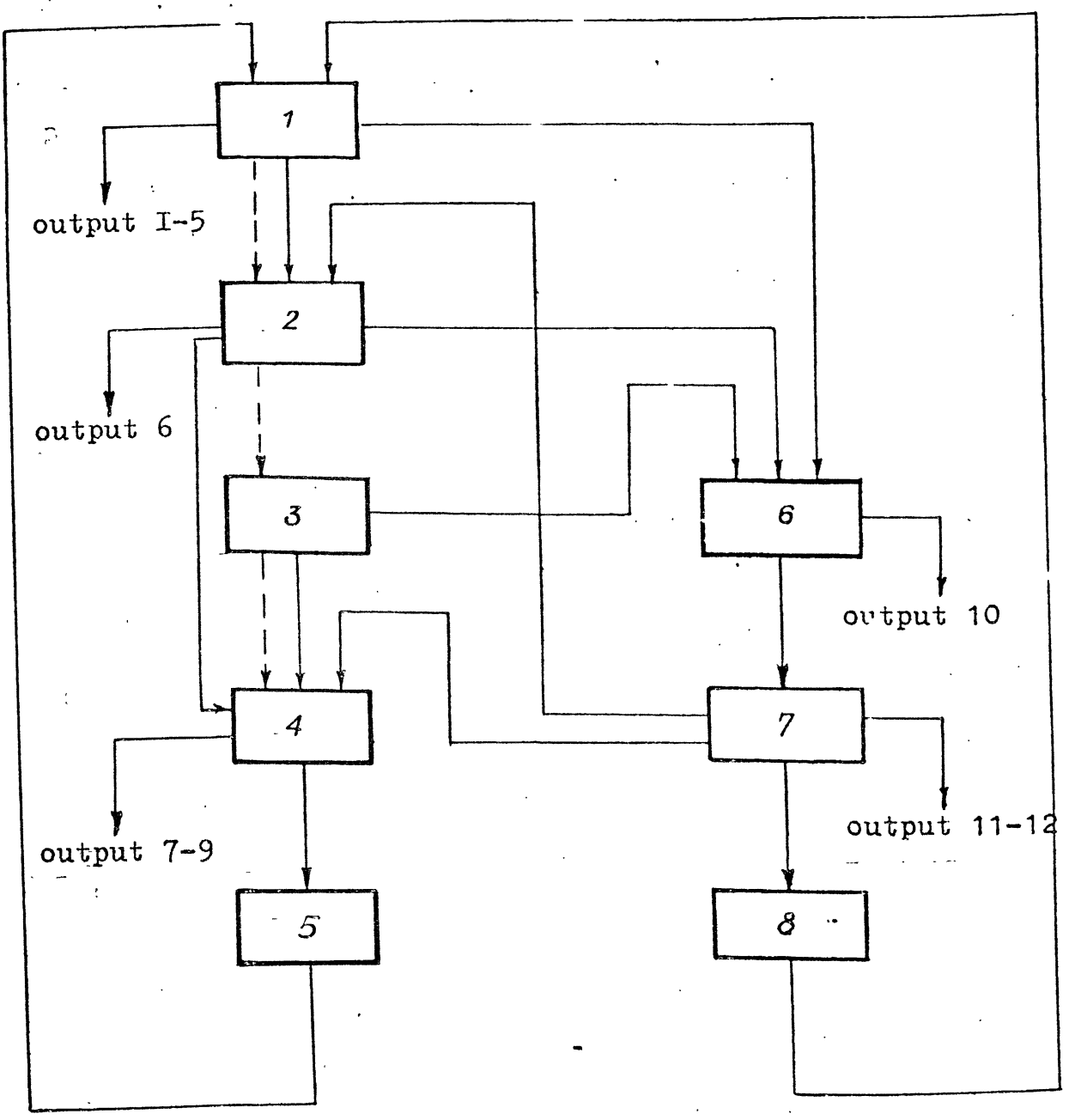
10. L.WAELBROECK. Etude spectrale des algèbres complètes. Acad.Royale Belgique. Cl.des Sc. Mémoires. 31. 1960. n°7.

11. L.WAELBROECK. Some theorems about bounded structures. J.Funct. Analysis. 1. 1967. p.392-408.

12. L.WAELBROECK. Topological vector spaces and algebras. Lecture Notes in Mathematics. v.230. Springer Verlag. 1971.

13. L.WAELBROECK. The holomorphic functional calculus and non-Banach algebras. in Algebras in Analysis. J.H.Williamson, ed. p.187-251. Academic Press. 1975.

A PRINCIPAL BLOCK-SCHEME

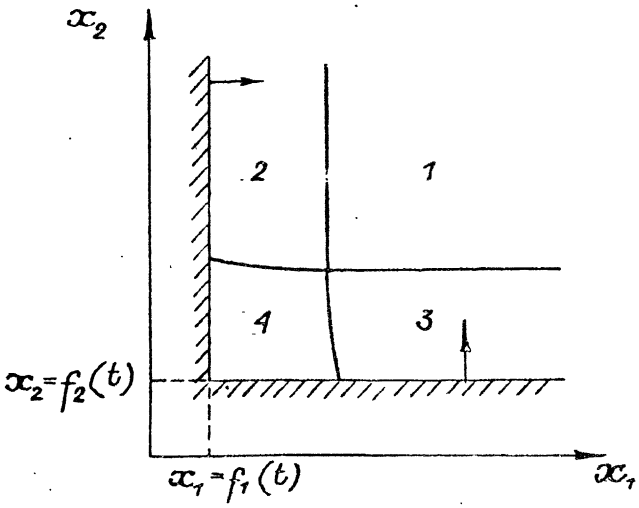


——————— regime I

— — — — — regime 2

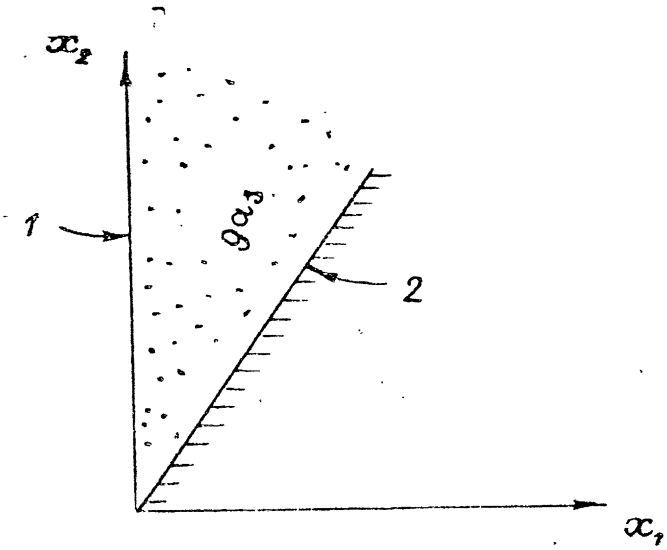
Fig. I

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
LABORATOIRE
MATHÉMATIQUES PURES
INSTITUT FOURIER



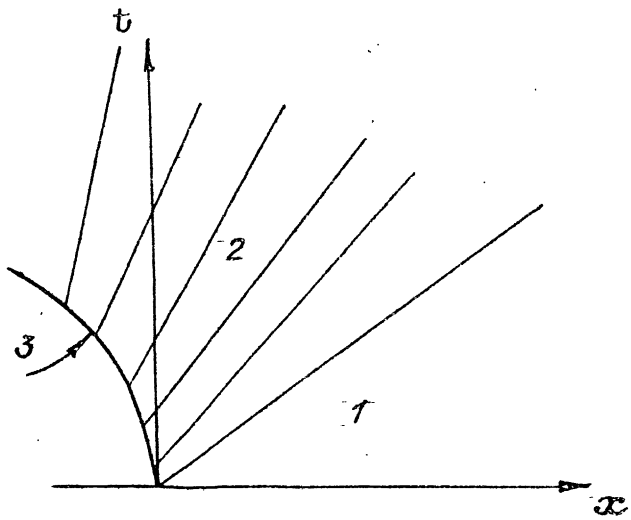
1 - a stagnation region
2-3 - a simple wave
4 - a double wave

Fig.2



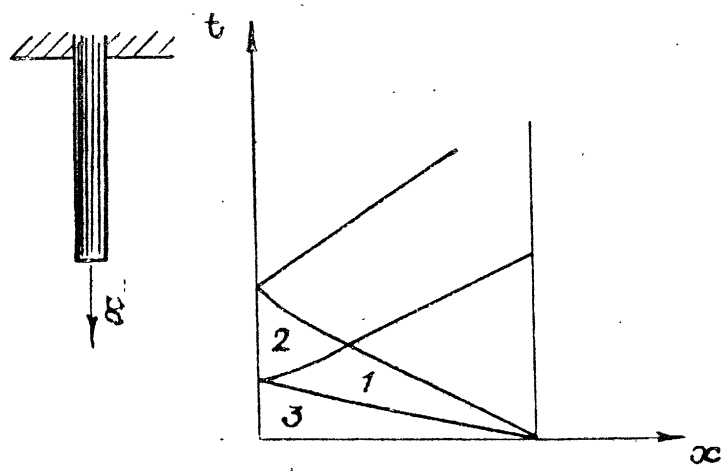
1 - an initial boundary with vacuum
2 - a wall

Fig.3



1 - a region of a contact zone
2 - an interference region
3 - a piston trajectory

Fig.4



3 - a stagnation region

Fig.5