Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

PHAM THE LAI

Comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés en dimension 2

Séminaire Jean Leray, nº 4 (1973-1974), exp. nº 2, p. 1-28
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1974___4_A2_0>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES D'UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES EN DIMENSION 2.

par

PHAM THE LAI

INTRODUCTION

Le but essentiel de ce travail est l'étude du comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques A autoadjoints positifs dégénérant au bord d'un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^n$.

Ces opérateurs constituent une généralisation en dimension quelconque de l'opérateur de LEGENDRE $\frac{d}{dx}(1 - x^2)\frac{d}{dx}$ sur l'intervalle $[-1,1]$.

Une étude spectrale de ces opérateurs a été faite par M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC [3], dans le cas du second ordre. Leurs résultats sont précis pour $\dim \Omega = n = 1$, mais la précision diminue lorsque n augmente.

En étudiant la classe de compacité d'un opérateur continu dans $L^2(\Omega)$ à image dans une classe d'espaces de SOBOLEV avec poids, nous avons, dans [11], déduit une minoration des valeurs propres de A.

Auparavant, BOUTET de MONVEL et P. GRISVARD, dans [4], ont donné une majoration et une minoration de ces valeurs propres ; leur méthode est basée sur la connaissance des valeurs propres de A lorsque Ω est la boule unité et A l'opérateur type de LEGENDRE.

En bref, un résultat de [4] et [11], pour A de second ordre, s'écrit de la manière suivante :

$$\overline{\lim}\, f(j)\, \lambda_j^{-1} < + \infty$$

$\{\lambda_j\}$ désigne la suite des valeurs propres de A, rangée suivant l'ordre de valeur croissante, chacune des valeurs propres étant répétée suivant la multiplicité et $f(j) = \frac{j}{\log j}$ dans le cas $n = 2$ et $f(j) = j^{1/(n-1)}$ dans le cas $n \geq 3$. (Nous n'envisagerons pas ici le cas $n = 1$ puisqu'il est résolu dans [3]).

Il est alors naturel de se demander si la limite $\lim\limits_{j\to+\infty} f(j)\, \lambda_j^{-1}$ existe et de la calculer.

En utilisant la fonction :

$$N(t) = \sum_{\lambda_j \leq t} 1$$

il est évident que ce problème revient à trouver un nombre (qui dépend de A et de Ω) tel que l'on a :

$$N(t) = Lg(t) + o(g(t)) \quad (t \to +\infty) \tag{1}$$

avec $g(t) = t \log t$ dans le cas $n = 2$ et $g(t) = t^{n-1}$ dans le cas $n \geqq 3$.

Le résultat essentiel de ce travail est de prouver que (1) est vraie pour $n = 2$; il est probable que (1) est aussi vraie pour $n \geqq 3$, c'est un problème ouvert à notre connaissance.(*)

Pour $n = 2$, L est connue explicitement en fonction des données A et Ω ; L est une "caractéristique géométrique" de Ω dans le cas où A est du type de LEGENDRE. Précisons.

Pour une réalisation auto-adjointe A d'un opérateur uniformément elliptique d'ordre $2m$ (donc non dégénéré), il est bien connu que l'on a (cf. [1]) :

$$N(t) = \gamma\, t^{n/2m} + o(t^{n/2m})$$

avec

$$\gamma = (2)^{-n} \int_\Omega \left(\int_{A'(x,\xi) < 1} d\xi \right) dx$$

$A'(x,\xi)$ étant le polynôme caractéristique associé à la partie principale $A'(x,D)$ de A . Donc, lorsque A est le laplacien Δ , γ est proportionnelle au volume de Ω .

Le cas dégénéré est bien différent, lorsque $n > 1$. Pour $n = 2$, nous allons voir que le premier terme L de (1) du développement asymptotique de $N(t)$ est un terme de "surface". De manière précise, soit φ une fonction de

$$R^2 \to R_+ \ ,$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

(*) Dans le cas de l'opérateur du second ordre $\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad})$, le problème est résolu par [illegible] NORDIN dans un travail paru à Arkiv for Matematik (1972) , nous remercions vivement le Professeur C. GOULAOUIC qui nous a communiqué cette référence ainsi que son cours de CIME (1973).

$$\Omega = \{x \ , \ \varphi(x) > 0\} \ ; \ \partial\Omega = \{x \ , \ \varphi(x) = 0\} \ ; \ d\varphi(x) \neq 0 \ \text{pour} \ x \in \overline{\Omega}$$

($d\varphi$ étant la différentielle de φ).

Soit A une réalisation auto-adjointe positive (dans un sens à présiser) de l'opérateur différentiel $\varphi\,\Delta$. Alors, nos résultats vont montrer que (1) est vraie pour A et que L est proportionnelle à

$$<\omega\varphi,.1>$$

ω_φ étant la forme de LERAY (cf. [6] par exemple) associée à φ .

C'est donc un terme de "surface". Lorsque Ω est la boule unité et $\varphi = 1-|x|^2$ nous retrouvons un résultat de J. SHIMAKURA [12] ; cet auteur calcule L à partir des formules explicites donnant les valeurs propres.

I. ENONCE DES RESULTATS

Suite à l'introduction, considérons φ une fonction de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que :

$$\Omega = \{x \ , \ \varphi(x) > 0\} \ ; \ \partial\Omega = \{x \ , \ \varphi(x) = 0\} \ ; \ d\varphi(x) \neq 0 \ \text{pour} \ x \in \overline{\Omega}$$

Les différentes normes rencontrées seront notées $|\ |$, sauf mention du contraire.

Nous utilisons les notations :

$$D_j = -\,i\,\frac{\partial}{\partial x_j} \ , \ i = \sqrt{-1} \ , \ j \in (1,\dots,n)$$

pour un multiindice $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$$

$\mathscr{C}(\Omega)$, $\mathscr{C}^k(\Omega)$, $\mathscr{D}(\Omega)$ désignent respectivement l'espace des fonctions continues, continûment différentiables jusqu'à l'ordre k , indéfiniment différentiables à support compact, sur Ω .

$L^2(\Omega)$ désigne l'espace des (classes) de fonctions de carré intégrable sur Ω , de produit scalaire :

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\,\overline{v(x)}\,dx$$

Pour m entier ≥ 1 , $H^m(\Omega)$ désigne l'espace de SOBOLEV usuel avec la norme :

$$|u|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{1/2}$$

$H_o^m(\Omega)$ désigne l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

Nous considérons aussi la classe d'espaces de SOBOLEV avec poids dont voici la :

DEFINITION. Soit m entier ≥ 1 . Le sous-espace des distributions sur Ω

$$\{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; \ \varphi^m D^\alpha u \in L^2(\Omega) \ , \ |\alpha| \leq 2m\}$$

est noté $D^{2m}(\Omega)$. $D^{2m}(\Omega)$ est muni de la norme

$$|u|_{D^{2m}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq 2m} |\varphi^m D^\alpha u|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{1/2}$$

C'est un espace de Hilbert.

Soit

$$\mathcal{A}(x,D) = \varphi(x)^m \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) D^\alpha + \varphi(x)^{m-1} \sum_{|\alpha|= 2m-1} a_\alpha(x) D^\alpha + \ldots + \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

un opérateur différentiel linéaire d'ordre 2m .

Nous faisons les hypothèses (H) :

- Les coefficients a_α , pour $|\alpha| = 2m$, sont des restrictions à Ω de fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.
- Les coefficients a_α , pour $|\alpha| < 2m$, sont des fonctions dans $L^\infty(\Omega)$
- $\mathcal{A}$ est formellement auto-adjoint c'est-à-dire :

$$(\mathcal{A}(.,D)u,v)_{L^2(\Omega)} = (u, \mathcal{A}(.,D)v)_{L^2(\Omega)} \qquad u,v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

- $\tilde{\mathcal{A}}'(x,D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ est uniformément elliptique, c'est-à-dire :

$$\tilde{\mathcal{A}}'_x(\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geq c|\xi|^{2m}$$

pour tout $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, c étant une constante > 0 .

Un opérateur non borné A dans $L^2(\Omega)$ est dit une réalisation auto-adjointe dans $L^2(\Omega)$ de $\mathcal{A}$ si A est auto-adjoint avec un domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ vérifiant :

(1.1) $$H_o^{2m}(\Omega) \subset \mathcal{D}(A) \subset D^{2m}(\Omega)$$

et si tout $u \in \mathcal{D}(A)$ est solution au sens des distributions de l'équation différentielle :

(1.2) $$\mathcal{A}(x,D)u = Au$$

Le résultat suivant est vrai pour n quelconque.

THEOREME I.1. *Soit* A *une réalisation auto-adjointe positive dans* $L^2(\Omega)$ *de* $\mathcal{A}(x,D)$ *d'ordre* $2m$, *vérifiant les hypothèses* (H) . *Alors le spectre de* A *est discret.*

Supposons, en plus, que $m > n = \dim \Omega$. *Alors :*

1) A *a une résolvante compacte. Pour tout* $t > 0$, $A + t$ *est inversible et* $(A + t)^{-1}$ *est un opérateur intégral avec un noyau d'AGMON* (cf. [1c]) *continu et borné* $G_t(x,y)$:

$$(A + t)^{-1}f = \int_\Omega G_t(x,y)f(y)dy \qquad f \in L^2(\Omega)$$

2) *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que l'on ait :*

$$(1.3) \qquad \left|G_t(x,x) - \frac{n\pi}{2m}\left(\sin\frac{n\pi}{2m}\right)^{-1} \varphi(x)^{-n/2}\, c(x)\, t^{-1+(n/2m)}\right| \leq C\ \varphi(x)^{-(2n+1)/4}\ t^{-1+((2n-1)/4m)}$$

pour tout $x \in \Omega$ *et* $t \geq 1$.

Dans (1.3), $c(x)$ *est la fonction de classe* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$:

$$(1.4) \qquad c(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\tilde{\mathcal{A}}'_x(\xi) < 1} d\xi$$

Remarque. En vertu de (1.1), nous avons :

$$\mathcal{D}(A) \subset H^{2m}_{loc}(\Omega)$$

En utilisant les résultats de [2] ou de [3], nous avons :

$$\lim_{t\to+\infty} t^{1-(n/2m)}\, G_t(x,x) = \frac{n\pi}{2m}\left(\sin\frac{n\pi}{2m}\right)^{-1} \varphi(x)^{-n/2}\, c(x)$$

uniformément sur tout compact de Ω .

(1.3) précise donc le comportement de $G_t(x,x)$ lorsque x est voisin du bord de Ω .

THEOREME I.2. *Soit* A *une réalisation auto-adjointe positive dans* $L^2(\Omega)$ *de* $\mathcal{A}(x,D)$ *d'ordre* $2m$, *vérifiant les hypothèses* (H).

Supposons en plus que :

(i) $\dim \Omega = 2$

(ii) *Pour un certain entier* $k > \frac{2}{m}$, *on a :*

$$H_0^{2km}(\Omega) \subsetneq \mathcal{D}(A^k) \subset D^{2km}(\Omega)$$

Si $\{\lambda_j\}$ est la suite des valeurs propres de A, alors :

(1.5) $$N(t) = \sum_{\lambda_j \leq t} 1 = \langle \omega_\varphi , c \rangle t^{1/m} \operatorname{Log} t^{1/m} + O(t^{1/m}) \qquad t \to +\infty)$$

Dans (1.5), ω_φ est la forme de LERAY associée à φ et c est la fonction définie par (1.4).

II. OPERATEURS A IMAGE DANS $D^{2m}(\Omega)$ ET NOYAUX D'AGMON ASSOCIES

1. Les espaces $D^{2m}(\Omega)$ définis précédemment peuvent être caractérisés par le :

LEMME 2.1. Pour m entier ≥ 1, on a :

(2.1) $$D^{2m}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ u \in H^m(\Omega),\ \varphi^m u \in H^{2m}(\Omega)\}$$

La norme :

(2.2) $$(|u|^2_{H^m(\Omega)} + |\varphi^m u|^2_{H^{2m}(\Omega)})^{1/2}$$

est équivalente à la norme $|\ |_{D^{2m}(\Omega)}$.

Preuve. Puisque $m + \frac{1}{2} \leq 2m$, un résultat d'immersion de [5] prouve que l'on a :

(2.3) $$D^{2m}(\Omega) \subset \{u \in L^2(\Omega),\ \varphi^{m-p} D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq 2m - p\}$$

pour tout $p \in (0,1,\dots,m)$, avec une injection continue, le second membre de (2.3) étant muni de la norme hilbertienne évidente.

Donc, pour $u \in D^{2m}(\Omega)$, nous avons :

$$u \in H^m(\Omega)$$

En utilisant la formule de LEIBNITZ pour $|\alpha| \leq 2m$, $D^\alpha(\varphi^m u)$ est une somme finie de fonctions de $L^2(\Omega)$ en vertu de (2.3), donc :

$$D^{2m}(\Omega) \subset D$$

avec une injection continue, ayant noté D l'espace du second membre de (2.1).

Pour prouver l'inclusion inverse, nous utilisons un résultat de [3] :

(2.4) $$D = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ;\ \varphi^p u \in H^{m+p}(\Omega)\ ,\ p \in (0,1,\dots,m)\}.$$

Soit $u \in D$.

Donc, en vertu de (2.4), nous avons :

(2.5) $$\varphi u \in H^{m+1}(\Omega)$$

La formule de LEIBNITZ montre alors que l'on a :

$$D_j u \in H^m(\Omega) \qquad j \in (1,\dots,n)$$

Une récurrence évidente prouve :

$$\varphi D^\alpha u \in L^2(\Omega) \qquad |\alpha| \leq m + 1$$

En utilisant de nouveau (2.4), nous avons :

(2.6) $$\varphi^2 u \in H^{m+2}(\Omega)$$

(2.5) et (2.6) donnent alors :

$$\varphi^2 D_j u \in H^{m+1}(\Omega) \qquad j \in (1,\dots,n)$$

Un raisonnement comme précédemment montre que l'on a :

$$\varphi^2 D^\alpha u \in L^2(\Omega) \qquad |\alpha| \leq m + 2$$

Une récurrence évidente prouve alors :

(2.7) $$\varphi^p D^\alpha u \in L^2(\Omega) \qquad |\alpha| \leq m + p$$

pour tout $p \in (0,\dots,m)$.

(2.7) prouve alors (2.1), d'où le lemme.

Remarque. Les espaces $D^{2m}(\Omega)$ sont introduits par M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC dans [3] d'une manière naturelle dans leur étude de la régularité d'une classe d'opérateur elliptique de second ordre, dégénérant à la frontière. Leur définition utilise le second membre de (2.1).

Soit :

$$0 \leq \rho \leq \rho_o < 1$$

et notons :

$$\Omega_\rho = \{x \in \Omega,\ \varphi(x) > \rho\} .$$

En vertu des hypothèses faites sur φ, on sait (cf. [9]) qu'il existe un homéomorphisme ψ de Ω_ρ sur Ω de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans les deux sens tel que ψ et ψ^{-1} soient bornées ainsi que chacune de leurs dérivées par des constantes indépendantes de .

Grâce à ψ, l'inégalité classique d'interpolation (cf. [1] ou [9]) s'écrit :

(2.8) $$|u|_{H^k(\Omega_\rho)} \leq C\, |u|^{k/m}_{H^m(\Omega_\rho)}\ |u|^{1-(k/m)}_{L^2(\Omega_\rho)}$$

pour $u \in H^m(\Omega)$, $0 \leq k \leq m$, C étant une constante > 0 ne dépendant que de Ω, m et n.

Lorsque $m > \frac{n}{2}$, le théorème d'immersion de SOBOLEV prouve que, pour $u \in H^m(\Omega)$, u est (après modification usuelle sur un ensemble de mesure nulle) est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$. Alors, de la même manière que précédemment, on a :

(2.9)
$$\sup_{x \in \overline{\Omega}_\rho} |u(x)| \leqq C \, |u|^{n/2m}_{H^m(\Omega_\rho)} \, |u|^{1-(n/2m)}_{L^2(\Omega_\rho)}$$

avec C une constante > 0 ne dépendant que de Ω , m et n .

Il est évident que :

(2.10)
$$\dot{D}^{2m}(\Omega) \subset H^{2m}_{loc}(\Omega)$$

donc, pour $u \in D^{2m}(\Omega)$, u est une fonction continue sur Ω lorsque $2m > \frac{n}{2}$. Un résultat de type (2.9) pour $D^{2m}(\Omega)$ est la :

PROPOSITION 2.2. *Soit m entier $\geqq 1$ tel que $2m > \frac{n}{2}$. Alors :*

(2.11)
$$|u(x)| \leqq C \, \varphi(x)^{-n/4} \, |u|^{n/4m}_{D^{2m}(\Omega)} \, |u|^{1-(n/4m)}_{L^2(\Omega)}$$

pour $u \in D^{2m}(\Omega)$, $x \in \Omega$; C étant une constante > 0 ne dépendant que de Ω , m et n .

Preuve. Soit $x \in \Omega$ et notons $\rho = \varphi(x)$.

(2.10) prouve que :

$$u \in H^{2m}(\Omega_\rho)$$

En utilisant (1.9), nous avons donc :

(2.12)
$$|u(x)| \leqq C \, |u|^{n/4m}_{H^{2m}(\Omega_\rho)} \, |u|^{1-(n/4m)}_{L^2(\Omega)}$$

Nous avons aussi :

(2.13)
$$\int_{\Omega_\rho} |D_\alpha u(\xi)|^2 d\xi \leqq \frac{1}{\varphi(x)^{2m}} \int_{\Omega_\rho} \varphi(\xi)^{2m} \, |D_\alpha u(\xi)|^2 \, d\xi$$

pour $|\alpha| \leqq 2m$ puisque :

$$1 < \frac{\varphi(\xi)}{\varphi(x)} \quad \text{pour} \quad \xi \in \Omega_\rho$$

(2.13) prouve alors :

(2.14)
$$|u|_{H^{2m}(\Omega_\rho)} \leqq \frac{1}{\varphi(x)^m} \, |u|_{D^{2m}(\Omega)}$$

(2.12) et (2.14) donnent (2.11), d'où la proposition.

Remarque. Dans [11], nous avons prouvé (2.11) en utilisant l'inégalité établie dans [3] :

$$t^{1-(n/4m)}\ \varphi(x)^{n/2}|u(x)|^2 \leqq C(|u|^2_{D^{2m}(\Omega)} + t|u|^2_{L^2(\Omega)}) \tag{2.15}$$

pour $x \in \Omega$ et $t > 0$.

La preuve de (2.15) par ces auteurs est assez compliquée ; ils utilisent un relèvement de traces et des résultats d'espaces de traces.

La preuve donnée ici est particulièrement simple et s'adapte aisément à d'autres espaces de SOBOLEV avec poids.

2. Soit T un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, nous notons T^* l'adjoint hilbertien de T .

Si l'image $\mathcal{R}(T)$ de T est dans $D^{2m}(\Omega)$, pour un certain m , le théorème de graphe fermé prouve que T est encore continu de $L^2(\Omega)$ dans $D^{2m}(\Omega)$.

Nous notons donc :

$\| T \|_{L^2}$ la norme de T , considéré comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$

$\| T \|_{D^{2m}}$ la norme de T , considéré comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $D^{2m}(\Omega)$.

En utilisant les résultats généraux [10] d'une classe d'opérateurs intégraux à noyaux continus et bornés, que nous dénommons noyaux d'Agmon, nous avons prouvé dans [11] le résultat suivant :

THEOREME 2.3. *Soit m entier avec $m > n$. Soit T un opérateur continu dans $L^2(\Omega)$ dont les images $\mathcal{R}(T)$ et $\mathcal{R}(T^*)$ sont dans $D^{2m}(\Omega)$.*

Alors T est un opérateur intégral avec un noyau d'Agmon K continu et borné sur $\Omega \times \Omega$:

$$Tf = \int_\Omega K(x,y)f(y)dy \qquad f \in L^2(\Omega)$$

De plus, nous avons les inégalités :

$$|K(x,y)| \leqq C(\|T\|_{D^{2m}}\| T^* \|_{D^{2m}})^{n/2m}\ \| T \|_{L^2}^{1-(n/m)} \tag{2.16}$$

$$|K(x,y)| \leqq C[\varphi(x)\varphi(y)]^{-n/4}\ (\| T \|_{D^{2m}}\ \| T^* \|_{D^{2m}})^{n/4m}\ \| T \|_{L^2}^{1-(n/2m)} \tag{2.17}$$

pour tout $(x,y) \in \Omega \times \Omega$; C étant une constante > 0 indépendante de x et y .

Remarque. La preuve de (2.17) utilise essentiellement (2.11).

III. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU NOYAU DE GREEN

1. RAPPEL DE QUELQUES ESTIMATIONS ELEMENTAIRES

Considérons un opérateur différentiel linéaire elliptique à coefficients constants d'ordre 2m, homogène :

$$A(D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha$$

et supposons que $A(D)$ est positive, c'est-à-dire :

$$A(\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha \xi^\alpha > 0$$

pour tout ξ réel $\neq 0$.

Notons :

$$E = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{(1 + |\xi|^2)^m}{1 + A(\xi)} \tag{3.1}$$

la constante d'ellipticité de $A(D)$.

Il est bien connu que $A(D)$ possède une unique réalisation auto-adjointe dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ que nous notons encore par A . Alors A est un opérateur positif et son domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ est $H^{2m}(\mathbb{R}^n)$. Pour $t > 0$, $A + t$ est inversible et notons :

$$R_t = (A + t)^{-1} .$$

Alors, pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, nous avons :

$$\begin{aligned} |R_t f|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leqq \frac{1}{t} |f|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ |R_t f|_{H^j(\mathbb{R}^n)} &\leqq (3E)^{j/m}\, t^{-1+(j/2m)} |f|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad j \in (1,\dots,2m) \end{aligned} \tag{3.2}$$

La preuve de (3.2) est aisée en utilisant la transformation de FOURIER (cf. [2]).

Lorsque $2m > n$, R_t est un opérateur de convolution :

$$R_t f = \int_{\mathbb{R}^n} F_t(x - y) f(y)\, dy \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n) \tag{3.3}$$

avec un noyau d'AGMON F_t continu et borné donné par :

$$F_t(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i<\xi . x>}}{A(\xi) + t}\, d\xi \tag{3.4}$$

C'est la solution fondamentale de $A(D) + t$.

Notons, pour la suite, que la valeur à l'origine de F_t est :

$$F_t(o) = (2\pi)^{-n}\, t^{-1+(n/2m)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{A(\xi) + 1} \tag{3.5}$$

2. NOYAUX DE GREEN ASSOCIE A $A + t$

Considérons à présent, suite à la partie I, la classe d'opérateur différentiel elliptique d'ordre $2m$, dégénérant au bord $\delta\Omega$:

$$\mathcal{a}(.,D) = \varphi^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha + \varphi^{m-1} \sum_{|\alpha|=2m-1} a_\alpha D^\alpha + \ldots + \sum_{|\alpha|\leqq m} a_\alpha D^\alpha$$

vérifiant les hypothèses (H) et considérons une réalisation auto-adjointe positive A de $\mathcal{a}$ dans $L^2(\Omega)$ de domaine $\mathcal{D}(A)$ avec :

(3.6) $$H_o^{2m}(\Omega) \subset \mathcal{D}(A) \subset D^{2m}(\Omega)$$

Donc, pour $t > 0$, $A + t$ est inversible et notons :

$$S_t = (A + t)^{-1}$$

qui est un opérateur borné dans $L^2(\Omega)$. S_t est auto-adjoint.

Nous avons évidemment, en vertu de (3.6) :

$$\mathcal{R}(S_t) \subset D^{2m}(\Omega)$$

LEMME 3.1. Nous avons :

(3.7) $$\| S_t \|_o \leqq \frac{1}{t}$$ $$\| S_t \|_{D^{2m}} \leqq C$$

pour tout $t \geqq 1$, C étant une constante > 0 indépendante de t.

Preuve. Puisque $A \geqq 0$, nous avons :

$$<(A + t)u,u>_{L^2(\Omega)} \geqq t|u|_{L^2(\Omega)}$$

d'où la première partie de (3.7).

Pour la seconde, remarquons que A est fermé, donc son graphe G est fermé dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Nous en déduisons que l'application de G dans $D^{2m}(\Omega)$:

$$(u,Au) \longmapsto u$$

est un opérateur fermé de G dans $D^{2m}(\Omega)$. Par le théorème du graphe fermé, est opérateur est continu. Il existe donc $C > 0$ telle que l'on ait :

(3.8) $$|u|_{D^{2m}(\Omega)} \leqq C(|Au|_{L^2(\Omega)} + |u|_{L^2(\Omega)}) \quad \forall u \in \mathcal{D}(A).$$

Appliquant (3.8) à $u = S_t f$, pour $f \in L^2(\Omega)$, nous obtenons :

$$|S_t f|_{D^{2m}(\Omega)} \leqq C(|f|_{L^2(\Omega)} + (t + 1)|S_t f|_{L^2(\Omega)})$$

d'où la deuxième partie de (3.7) en utilisant la majoration de $\| S_t \|_o$.

Lorsque $m > n$, nous pouvons utiliser le théorème 2.3 de la partie II.

Dans ce cas, S_t est un opérateur intégral avec un noyau d'AGMON G_t continu et borné sur $\Omega \times \Omega$; il est usuel de l'appeler noyau de GREEN de l'opérateur $A + t$.

Le comportement de $G_t(x,y)$ quand t est grand et x,y voisin du bord est précisé par le :

THEOREME 3.2. Supposons que l'on ait $m > n$. Le noyau de GREEN G_t associé à $A + t$ est continu et borné sur $\Omega \times \Omega$ et vérifie :

$$|G_t(x,y)| \leq C\, t^{-1+(n/m)} \tag{3.9}$$

$$|G_t(x,y)| \leq C[\varphi(x)\,\varphi(y)]^{-n/4}\, t^{-1+(n/2m)} \tag{3.10}$$

pour (x,y) $\Omega \times \Omega$, $t \geq 1$; C étant une constante > 0 indépendante de x, y, t.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème 2.3 partie II à S_t qui est auto-adjoint et d'utiliser le lemme 3.1.

3. COMMUTATEURS - LEMMES DE MAJORATION

a - Soit $x \in \Omega$. Alors $\varphi(x) > 0$.

Notons :

$$\mathcal{A}'_x(D) = \varphi(x)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{3.11}$$

l'opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre $2m$, dont les coefficient sont ceux de la partie principale de $\mathcal{A}'$ prise au point x.

C'est un opérateur différentiel elliptique vérifiant, grâce aux hypothèses (H) :

$$\mathcal{A}'_x(\xi) \geq c\,\varphi(x)^m |\xi|^{2m} \tag{3.12}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, c étant une constante > 0 indépendante de x et ξ.

Lorsque $2m > n$, en vertu de (3.4), la solution fondamentale de $\mathcal{A}'_x(D) + t$ pour $t > 0$ est donnée par la formule :

$$F_{x,t}(\eta) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i<\xi,\eta>}}{\mathcal{A}'_x(\xi) + t}\, d\xi \tag{3.13}$$

$F_{x,t}$ est une fonction continue et bornée de η.

En utilisant (3.5), nous avons :

$$F_{x,t}(o) = (2\pi)^{-n}\, t^{-1+(n/2m)}\, \varphi(x)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{\widetilde{\mathcal{A}}'_x(\xi) + 1} \tag{3.14}$$

Dans l'intégrale du second membre de (3.14), $\widetilde{\mathcal{A}}'_x(\xi)$ est le polynôme caractéristique associé à l'opérateur différentiel à coefficients constants $\widetilde{\mathcal{A}}'_x(D)$ dont les coefficients sont ceux de $\widetilde{\mathcal{A}}'(.,D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(.) D^\alpha$.

Notons :

(3.15) $$c_o(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{\mathcal{A}'_x(\xi) + 1}$$

En vertu des hypothèses (H), la fonction de x, $c_o(x)$, est de classe $\mathcal{E}^1(\mathbb{R}^n)$.

Pour $f \in L^2(\Omega)$, considérons l'opérateur de convolution :

(3.16) $$R_{x,t}\, f = F_{x,t} * \tilde{f}|_\Omega$$

$F_{x,t}$ étant donné par (3.13), $\tilde{f}$ la fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)$ obtenue en prolongeant f par 0 hors de Ω et $F_{x,t} * \tilde{f}|_\Omega$ la restriction à Ω du produit de convolution $F_{x,t} * \tilde{f}$.

Il est clair que $R_{x,t}$ est un opérateur continu dans, $L^2(\Omega)$, dont l'image $\mathcal{R}(R_{x,t})$ est dans $H^{2m}(\Omega)$ en vertu de (3.3).

On vérifie que $R_{x,t}$ est auto-adjoint.

Nous avons :

(3.17) $$(\mathcal{A}'_x(D) + t)R_{x,t}\, f = f \qquad f \in L^2(\Omega) .$$

En effet, nous avons dans $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$(\mathcal{A}'_x(D) + t)F_{x,t} * \tilde{f} = \tilde{f}$$

d'où (3.17) par restriction à Ω.

<u>LEMME 3.3</u>. <u>Pour</u> $f \in L^2(\Omega)$, <u>nous avons</u> :

$$|R_{x,t}f|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{t} |f|_{L^2(\Omega)}$$

$$|R_{x,t}f|_{H^j(\Omega)} \leq C\ \varphi(x)^{-j/2}\ t^{-1+(j/2m)}\ |f|_{L^2(\Omega)} \qquad j \in (1,\dots,2m)$$

<u>avec une constante</u> > 0 <u>indépendante de</u> x, t <u>et</u> f.

<u>Preuve</u>. Il suffit d'utiliser (3.2), (3.12) et la majoration

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{(1 + |\xi|^2)^m}{1 + \varphi(x)^m |\xi|^{2m}} \leq \frac{C}{\varphi(x)^m}$$

avec C une constante > 0 convenable.

b - Soient maintenant $x \in \Omega$ et $t \geq 1$ tels que l'on ait :

(3.18) $$t^{-1/m} \leq \varphi(x) .$$

Notons :

$$k = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\big)^2 \Big)^{1/2}$$

k est > 0 par hypothèse.

Soit $\varepsilon > 0$ et notons :

(3.19) $$r = \frac{\varphi(x)}{2k}\,(\varphi(x)t^{1/m})^{-\varepsilon}\ .$$

Alors la boule $b_{x,r}$ de centre x, de rayon r est entièrement contenu dans Ω puisque l'on a :

(3.20) $$\frac{\varphi(x)}{2} \leqq \varphi(y) \leqq \frac{3}{2}\,\varphi(x)$$

pour tout $y \in b_{x,r}$.

En effet :

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqq k|y - x|$$

d'où :

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqq \frac{\varphi(x)}{2}\,(\varphi(x)t^{1/m})^{-\varepsilon}$$

d'où (3.20) grâce à (3.18).

Soit d'autre part $\zeta_{x,\varepsilon}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, à support dans $b_{x,r}$, égale à 1 sur x, telle que :

(3.21) $$|D^\alpha \zeta_{x,\varepsilon}(y)| \leqq C\,r^{-|\alpha|}.$$

C étant une constante > 0 indépendante de x, y et ε.

Nous notons encore $\zeta_{x,\varepsilon}$ l'opérateur de multiplication :

$$f \longmapsto \zeta_{x,\varepsilon}\,f$$

qui est continu de $H^m(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ pour tout $m \geqq 0$.

Pour deux opérateurs α, β, notons :

$$[\alpha,\beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$$

le commutateur de α, β.

Nous voulons étudier le commutateur :

$$P_{x,t,\varepsilon} = [\mathcal{A}(.,D),\zeta_{x,r}]R_{x,t}\ .$$

Pour $f \in L^2(\Omega)$, on a $\zeta_{x,r}\,R_{x,t}\,f \in H_o^{2m}(\Omega)$; donc en vertu des hypothèses (1.1) (1.2), on a :

$$\mathcal{A}(.,D)\,\zeta_{x,r}\,R_{x,t}\,f = A\,\zeta_{x,r}\,R_{x,t}\,f \in L^2(\Omega)\ .$$

Comme $D^{2m}(\Omega) \subset H^{2m}_{loc}(\Omega)$, on a aussi :

$$\zeta_{x,r}\,\mathcal{A}(.,D)\,R_{x,t}\,f \in L^2(\Omega)\ .$$

On vérifie alors sans peine que $P_{x,t,\varepsilon}$ est un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Une majoration de sa norme est donnée par le :

LEMME 3.4. Soit $x \in \Omega$, $t \geqq 1$ vérifiant (3.18) et ε tel que :

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

Alors :

$$\| P_{x,t,\varepsilon} \|_{L^2} \leqq C(\varphi(x)t^{1/m})^{-(1/2)+\varepsilon} \tag{3.22}$$

avec C une constante > 0 indépendante de x et t.

Preuve. Nous avons :

$$[\mathcal{a}(\cdot,D),\zeta_{x,r}] = \sum_{k=1}^{m} \varphi^k \sum_{|\alpha|=m+k} a_\alpha [D^\alpha,\zeta_{x,r}] + \sum_{1\leqq|\alpha|\leqq m} a_\alpha [D^\alpha,\zeta_{x,r}] . \tag{3.23}$$

Donc, pour u $H^{2m}(\Omega)$, $1 \leqq |\alpha| \leqq 2m$, nous avons, en utilisant (3.21) :

$$| [D^\alpha,\zeta_{x,r}]u|_{L^2(b)} \leqq C(\sum_{j=1}^{|\alpha|} r^{-j} |u|_{H^{|\alpha|-j}(b)}) \tag{3.24}$$

ayant noté $b = b_{x,r}$ pour simplifier l'écriture.

Pour $f \in L^2(\Omega)$, appliquons (3.24) à $u = R_{x,t} f$ et utilisons le lemme 3.3. Nous obtenons :

$$|[D^\alpha,\zeta_{x,r}]R_{x,t}f|_{L^2(b)} \leqq C(\sum_{j=1}^{|\alpha|} r^{-j} \varphi(x)^{-(|\alpha|-j)/2} t^{-1+((|\alpha|-j)/2m)})|f|_{L^2(\Omega)} . \tag{3.25}$$

Notons :

$$\theta = \frac{\varphi(x)}{r} (\varphi(x)t^{1/m})^{-1/2} .$$

En remarquant que le support de $[D^\alpha,\zeta_{x,r}]R_{x,t}f$ est dans b, (3.25) donne :

$$| [D^\alpha,\zeta_{x,r}]R_{x,t}f|_{L^2(\Omega)} \leqq C(\sum_{j=1}^{|\alpha|} \theta^j) \varphi(x)^{-|\alpha|/2} t^{-1+(|\alpha|/2m)} |f|_{L^2(\Omega)} . \tag{3.26}$$

En vertu de l'hypothèse (3.18) et du choix de ε, nous avons :

$$\sum_{j=1}^{|\alpha|} \theta^j \leqq C(\varphi(x)t^{1/m})^{-(1/2)+\varepsilon} . \tag{3.27}$$

Pour $|\alpha| \leqq m$, nous avons aussi, en vertu de (3.18) :

$$\varphi(x)^{-|\alpha|/2} t^{-1+(|\alpha|/2m)} \leqq 1 \quad \text{pour } t \geqq 1 . \tag{3.28}$$

Donc, (3.26), (3.27) et (3.28) donnent, pour $|\alpha| \leqq m$:

$$| [D^\alpha,\zeta_{x,r}]R_{x,t}f|_{L^2(\Omega)} \leqq C(\varphi(x)t^{1/m})^{-(1/2)+\varepsilon} . \tag{3.29}$$

Pour $k \geqq 1$ et α tel que $|\alpha| = m + k$, (3.20) donne :

$$| \varphi^k[D^\alpha,\zeta_{x,r}]R_{x,t}f|_{L^2(b)} \leqq C \varphi(x)^k(\sum_{j=1}^{m+k} r^{-j} \varphi(x)^{-(m+k-j)/2} t^{-1+(m+k-j)/2m})|f|_{L^2(\Omega)}$$

Nous obtenons donc, d'une manière analogue, pour $k > 1$ et $|\alpha| = m + k$:

(3.30) $$| \varphi^{k}[D^{\alpha},\zeta_{x,r}]R_{x,t}f|_{L^2(\Omega)} \leq C(\varphi(x)t^{1/m})^{-(1/2)+\varepsilon+((k-m)/2)}|f|_{L^2(\Omega)} .$$

(3.23), (3.29) et (3.30) donnent :

$$| [A, \zeta_{x,r}]f|_{L^2(\Omega)} \leq C(\varphi(x)t^{1/m})^{-(1/2)+\varepsilon} |f|_{L^2(\Omega)}$$

d'où (3.22).

Considérons maintenant l'opérateur :

$$Q_{x,t,\varepsilon} = [\mathcal{A}(.,D),\zeta_{x,r}]S_t .$$

On vérifie comme pour $P_{x,t,\varepsilon}$ que $Q_{x,t,\varepsilon}$ est continu dans $L^2(\Omega)$; une majoration de sa norme est donnée par le :

<u>LEMME 3.5</u>. <u>Soit</u> $x \in \Omega$, $t \geq 1$ <u>vérifiant</u> (3.18) <u>et</u> ε <u>tel que</u>

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2} .$$

<u>Alors</u> :

(3.31) $$|| Q_{x,t,\varepsilon} ||_o \leq C(\varphi(x)t^{1/m})^{-(1/2)+\varepsilon}$$

<u>avec</u> C <u>une constante</u> > 0 <u>indépendante de</u> x <u>et</u> t .

<u>Preuve</u> : Nous pouvons encore utiliser (3.24) avec $u = S_tf$, pour $f \in L^2(\Omega)$. Si nous posons :

$$\delta = \frac{\varphi(x)}{2}$$

nous avons, en vertu de (3.20) :

(3.32) $$b \subset \overline{\Omega}_\delta \quad \text{avec} \quad \Omega_\delta = \{y \in \Omega, \varphi(y) > \delta\} .$$

En utilisant l'inégalité d'interpolation (2.8), nous avons :

(3.33) $$|u|_{H^k(\Omega_\delta)} \leq \gamma|u|^{k/2m}_{H^{2m}(\Omega_\delta)} |u|^{1-(k/2m)}_{L^2(\Omega)}$$

pour $0 \leq k \leq 2m$, γ étant une constante indépendante de x .

En vertu de (2.14), nous avons :

(3.34) $$|u|_{H^{2m}(\Omega_\delta)} \leq C\varphi(x)^{-m} |u|_{D^{2m}(\Omega)} .$$

Alors, (3.32), (3.33), (3.34) et (3.7) donnent :

$$| [D^{\alpha}, \zeta_{x,r}]S_tf |_{L^2(\Omega)} \leq C(\sum_{j=1}^{|\alpha|} r^{-j} \varphi(x)^{-(|\alpha|-j)/2} t^{-1+((|\alpha|-j)/2m)})|f|_{L^2(\Omega)} .$$

pour $1 \leq |\alpha| \leq 2m$.

Nous obtenons donc la même estimation que celle donnée par (3.25) et on achève la preuve de (3.31) de la même manière.

IV. PREUVE DU THEOREME 1.1

1.1. COMPARAISON DE S_t ET $R_{x,t}$. LEMMES DE MAJORATION

Soit $x \in \Omega$ et $t \geqq 1$.

Notons :

$$T_{x,t} = S_t - R_{x,t} .$$

Pour $\rho > 0$ tel que l'adhérence de la boule $b_{x,\rho}$ soit dans Ω , nous considérons aussi $\zeta_{x,\rho}$ une fonction de classe $\mathcal{E}^\infty$, à support dans $b_{x,\rho}$, égale à 1 sur x .

Notons alors :

$$T_{x,t,\rho} = \zeta_{x,\rho}\, T_{x,t}\, \zeta_{x,\rho} \quad . \tag{4.1}$$

On vérifie sans peine que $T_{x,t}$, $T_{x,t,\rho}$ sont auto-adjoints dont les images sont dans $D^{2m}(\Omega)$.

Lorsque $m > n$, c'est un opérateur intégral dont le noyau d'Agmon est :

$$H_{x,t,\rho}(y,z) = \zeta_{x,\rho}(y)\zeta_{x,\rho}(z)\left[G_t(y,z) - F_{x,t}(y-z)\right] \tag{4.2}$$

pour $(y,z) \in \Omega \times \Omega$.

Cela est évident en vertu du théorème 2.3 et de (3.16).

En particulier, en vertu de (3.14), lorsque $y = z = x$, nous obtenons

$$H_{x,t,\rho}(x,x) = G_t(x,x) - \varphi(x)^{-n/2}\, C_o(x)\, t^{-1+(n/2m)} \tag{4.3}$$

avec $C_o(x)$ définie par (3.15).

Pour $f \in L^2(\Omega)$, nous avons en utilisant les hypothèses (1.1) et (1.2) :

$$(A + t)\zeta_{x,\rho}\, T_{x,t}\, f = (\mathcal{A}(\cdot,D) + t)\zeta_{x,\rho}\, T_{x,t}\, f \, .$$

Alors, par un calcul simple, nous avons :

$$\begin{aligned}(A + t)\zeta_{x,\rho}\, T_{x,t} &= [\mathcal{A}(\cdot,D),\zeta_{x,\rho}]S_t - [\mathcal{A}(\cdot,D),\zeta_{x,\rho}]R_{x,t}\\ &\quad + \zeta_{x,\rho} - \zeta_{x,\rho}(\mathcal{A}(\cdot,D)+t)R_{x,t} \, .\end{aligned}$$

En utilisant (3.17), nous obtenons :

$$(A + t)\zeta_{x,\rho}\, T_{x,t} = [\mathcal{A}(.,D),\zeta_{x,\rho}]S_t - [\mathcal{A}(.,D),\zeta_{x,\rho}]R_{x,t}$$
$$- \zeta_{x,\rho}(\mathcal{A}(.,D) - \mathcal{A}'_x(D))R_{x,t}\ .$$

D'où finalement :

$$T_{x,t,\rho} = S_t[\mathcal{A}(.,D),\zeta_{x,\rho}]S_t\,\zeta_{x,\rho} - S_t[\mathcal{A}(.,D),\zeta_{x,\rho}]R_{x,t}\,\zeta_{x,\rho}$$
$$- S_t\,\zeta_{x,\rho}(\mathcal{A}(.,D) - \mathcal{A}'_x(D))R_{x,t}\,\zeta_{x,\rho}\ .$$

Avec le choix $\rho = r$, r donné par (3.19), notons :

$$T_{x,t,\varepsilon} = T_{x,t,r}$$
$$T^1_{x,t,\varepsilon} = S_t[\mathcal{A}(.,D),\zeta_{x,r}]S_t\,\zeta_{x,r}$$
$$T^2_{x,t,\varepsilon} = -\,S_t[\mathcal{A}(.,D),\zeta_{x,r}]R_{x,t}\,\zeta_{x,r}$$
$$T^3_{x,t,\varepsilon} = -\,S_t\,\zeta_{x,r}(\mathcal{A}(.,D) - \mathcal{A}'_x(D))R_{x,t}\,\zeta_{x,r}\ .$$

Nous obtenons :

(4.4) $$T_{x,t,\varepsilon} = \sum_{i=1}^{3} T^i_{x,t,\varepsilon}.$$

Il est facile de voir que $T^i_{x,t,\varepsilon}$, $i \in (1,2,3)$, sont des opérateurs continus dans $L^2(\Omega)$, à images dans $D^{2m}(\Omega)$.

LEMME 4.1. *Soit* $x \in \Omega$, $t \geqq 1$ *vérifiant* (3.18) *et* ε *tel que* :

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\ .$$

Alors, pour $i \in (1,2)$, *nous avons* :

$$\| T^i_{x,t,\varepsilon} \|_{L^2} \leqq \frac{C}{t}\,(\varphi(x)t^{1/m})^{-(1/2)+\varepsilon}$$
$$\| T^i_{x,t,\varepsilon} \|_{D^{2m}} \leqq C(\varphi(x)t^{1/m})^{-(1/2)+\varepsilon}$$

avec C *une constante* > 0 *indépendante de* x et t .

Preuve. C'est immédiat à partir des lemmes 3.1, 3.4 et 3.5.

Une majoration des normes de $T^3_{x,t,\varepsilon}$ est donnée par le :

LEMME 4.2. Soit $x \in \Omega$, $t \geqq 1$ vérifiant (3.18) et ε tel que :

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2} .$$

Alors :

$$\| T^3_{x,t,\varepsilon} \|_{L^2} \leqq \frac{C}{t} (\mathcal{A}(x)t^{1/m})^{-\varepsilon}$$

$$\| T^3_{x,t,\varepsilon} \|_{D^{2m}} \leqq C (\mathcal{A}(x)t^{1/m})^{-\varepsilon}$$

avec C une constante > 0 indépendante de x et t .

Preuve. Soit $u \in H^{2m}(\Omega)$.

Nous avons :

$$(4.5)\qquad ((\mathcal{A},D) - \mathcal{A}'_x(D))u = \varphi^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha_u - \varphi(x)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)D^\alpha_u$$
$$+ \varphi^{m-1} \sum_{|\alpha|=2m-1} a_\alpha D^\alpha_u + \ldots + \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha_u .$$

Nous avons, pour $|\alpha| = 2m$:

$$(4.6)\qquad \sup_{y\in\Omega} |\zeta_{x,r}(y)(\varphi(y)^m a_\alpha(y) - \varphi(x)^m a_\alpha(x))| \leqq C\ \varphi(x)^{m-1}\ r .$$

En effet, pour $|\alpha| = 2m$, les fonctions a_α sont de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ par hypothèse et (3.40) se déduit aisément de la formule de TAYLOR à l'ordre 1 de (3.20).

En utilisant (4.5) pour $u = R_{x,t}\ \zeta_{x,r}\ f$ avec $f \in L^2(\Omega)$ et tenant compte du lemme 3.3 et des majorations (3.18) (4.6), nous avons :

$$(4.7)\qquad |\zeta_{x,r}(\mathcal{A}(.,D) - \mathcal{A}'_x(D))R_{x,t}\zeta_{x,r}f|_{L^2(\Omega)} \leqq C(\frac{r}{\varphi(x)} + (\varphi(x)t^{1/m})^{-1/2})|f|_{L^2(\Omega)}$$

Puisque r est donné par (3.19) et $\varepsilon < \frac{1}{2}$, nous obtenons de (4.7) :

$$(4.8)\qquad |\zeta_{x,r}(\mathcal{A}(.,D) - \mathcal{A}'_x(D))R_{x,t}\zeta_{x,r}f|_{L^2(\Omega)} \leqq C(\varphi(x)t^{1/m})^{-\varepsilon}|f|_{L^2(\Omega)} .$$

Le lemme 3.1 et (4.8) donnent alors le résultat.

Les lemmes 4.1, 4.2 et l'égalité (4.4) donnent donc le :

LEMME 4.3. Soit $x \in \Omega$, $t \geqq 1$ vérifiant (3.8).

Notons :

$$\rho = (2k)^{-1}\ \varphi(x)(\varphi(x)t^{1/m})^{-1/4} .$$

Alors :

$$\| T_{x,t,\rho} \|_{L^2} \leqq \frac{C}{t} (\varphi(x) t^{1/m})^{-1/4}$$

$$\| T_{x,t,\rho} \|_{D^{2m}} \leqq C(\varphi(x) t^{1/m})^{-1/4}$$

avec C une constante > 0 indépendante de x et t.

2. PREUVE DU THEOREME 1.1

En vertu du lemme 2.1, pour $m > 1$, nous avons :

$$D^{2m}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$$

avec une injection continue. Donc l'injection de $D^{2m}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. Il est alors bien connu que le spectre d'une réalisation auto-adjointe positive A de $\mathcal{A}(x,D)$ est discret et est constitué d'une famille dénombrable de valeurs propres positives dont $+\infty$ est le seul point d'accumulation.

Supposons maintenant $m > n$. Alors la partie 1) du théorème est évidente en vertu de ce qui précède et du théorème 3.2.

Prouvons la partie 2) c'est-à-dire la majoration (1.3).

Soit $x \in \Omega$ et $t \geqq 1$.

En visageons d'abord le cas :

$$t^{-1/m} \leqq \varphi(x) . \tag{4.9}$$

Prenons alors :

$$\rho = (2k)^{-1} \varphi(x) (\varphi(x) t^{1/m})^{-1/4}$$

et appliquons le théorème 2.3 à l'opérateur $T_{x,t,\rho}$ défini par la formule (4.1). $T_{x,t,\varepsilon}$ est un opérateur continu dans $L^2(\Omega)$, auto-adjoint puisque S_t et $R_{x,t}$ le sont.

En utilisant (4.2) et le lemme 4.3, nous obtenons de (2.17) :

$$\begin{aligned} &\zeta_{x,\rho}(y)\zeta_{x,\rho}(z) \, |G_t(y,z) - F_{x,t}(y-z)| \\ &\leqq C[\varphi(y)\varphi(z)]^{-n/4} t^{-1+(n/2m)} (\varphi(x)t^{1/m})^{-1/4} \end{aligned} \tag{4.10}$$

pour $y,z \in \Omega \times \Omega$, C étant une constante > 0 indépendante de x, y, z et t.

Alors (3.14), (3.15) et (4.10) donnent :

$$|G_t(x,x) - \varphi(x)^{-n/2} c_o(x) t^{-1+(n/2m)}| \leqq C \varphi(x)^{-(2n+1)/4} t^{-1+((2n-1)/4m)} \tag{4.11}$$

Un calcul simple montre que l'on a :

$$c(x) = c_o(x) \frac{2m}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2m} \tag{4.12}$$

avec $c(x)$ donnée par (1.4).

(4.11) et (4.12) donnent donc (1.3) dans le cas (4.9).

Considérons à présent le cas :

(4.13) $$t^{-1/m} > \varphi(x) .$$

En vertu de (3.10), il existe $C > 0$ telle que :

(4.14) $$|G_t(x,x) - \varphi(x)^{-n/2} c_o(x) t^{-1+(n/2m)}| \leqq (C + \sup_{y \in \bar{\Omega}} c_o(y)) \varphi(x)^{-n/2} t^{-1+(n/2m)} .$$

Puisque c_o est bornée sur $\bar{\Omega}$, il existe $C > 0$ telle que :

(4.15) $$|G_t(x,x) - \varphi(x)^{-n/2} c_o(x) t^{-1+(n/2m)}| \leqq C \varphi(x)^{-n/2} t^{-1+(n/2m)}$$

pour tout $x \in \Omega$ et $t \geqq 1$.

Alors (4.13) et (4.15) donnent encore (4.11) puisque :

$$1 < \varphi(x)^{-1/4} t^{-1/4m}$$

dans le cas (4.13).

Avec (4.12), nous obtenons (1.3) pour tout $x \in \Omega$ et $t \geqq 1$; la preuve du théorème 1.1 est donc achevée.

V. PREUVE DU THEOREME 1.2

1. GENERALITES

En vertu de ce qui précède, le spectre de A étant discret, notons $\{\lambda_j\}$ la suite des valeurs propres de A, rangée suivant l'ordre de valeur croissante et chacune étant répétée suivant sa multiplicité. Notons aussi $\{\phi_j\}$ la suite correspondante de fonctions propres orthonormales.

Comme il est bien connu, la fonction spectrale de A est dans notre cas :

(5.1) $$e(t ; x,y) = \sum_{\lambda_j \leqq t} \phi_j(x) \overline{\phi_j(y)}$$

D'où :

(5.2) $$N(t) = \sum_{\lambda_j \leqq t} 1 = \int_\Omega e(t ; x,x) dx$$

Lorsque $m > n$, il est bien connu aussi (cf. [2] par exemple) que le noyau de GREEN $G_t(x,y)$, c'est-à-dire le noyau d'AGMON associé à la résolvante $(A + t)^{-1}$, est relié à la fonction spectrale de A par la formule

(5.3) $$G_t(x,y) = \int_0^\infty (\tau + t)^{-1} de(\tau ; x,y)$$

où l'intégrale de STIFLTJES converge.

En vertu du théorème 3.2, $G_t(x,x)$ est bornée sur Ω, donc intégrable sur Ω ; (5.1), (5.2) et (5.3) donnent donc :

(5.4) $$\int_\Omega G_t(x,x)dx = \int_0^\infty (\tau + t)^{-1} dN(\tau) .$$

2. FORME DE LERAY ASSOCIEE A φ

Le bord $\partial\Omega$ est défini par l'équation :

$$\partial\Omega = \{x \; ; \; \varphi(x) = 0\}$$

et en vertu des hypothèses, nous avons

(5.5) $$d\varphi\,(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad x \in \overline{\Omega} .$$

La forme de LERAY ω_φ associée à φ est une forme différentielle d'ordre $n - 1$, liée de façon invariante à la surface $\partial\Omega$, telle que :

$$d\varphi \wedge \omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

(cf. [6] par exemple).

Notons :

(5.6) $$\psi(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\Big)^2\Big)^{1/2} .$$

Alors, en vertu de (4.5), nous avons :

$$\psi(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad x \in \overline{\Omega} .$$

Notons dS la mesure euclidienne de surface de $\partial\Omega$, alors la forme ω_φ s'écrit encore :

(5.7) $$<\omega_\varphi \,.\, \theta> = \int_{\partial\Omega} \frac{\theta(s)}{\psi(s)} dS \qquad \theta \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) .$$

<u>LEMME 5.1.</u> <u>Soit</u> $0 \leq \rho$ <u>et</u> θ <u>une fonction de classe</u> $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

<u>Notons</u> :

$$\Omega_\rho = \{x \in \Omega \; ; \; \varphi(x) > \rho\}$$
$$\theta(\rho) = \int_{\Omega_\rho} \frac{\theta(x)}{\varphi(x)} dx$$

<u>Alors, nous avons</u> :

$$\theta(\rho) = |\mathrm{Log}\, \rho| <\omega_\varphi \,.\, \theta> + O(1) \qquad (\rho \to 0)$$

ω_φ <u>étant la forme de LERAY associée à</u> φ .

<u>Preuve</u>. Notons, pour $h > 0$, dS_h la mesure euclidienne de surface du bord $\partial\Omega_h$ de Ω_h .

Soit :

$$\ell = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \varphi(x) > 0 .$$

L'inégalité $\theta(\rho)$ s'écrit, pour $0 < \rho \leqq \ell$:

(5.8) $$\theta(\rho) = \int_\rho^\ell \frac{dh}{h} \int_{\partial\Omega_h} \frac{\theta(s)}{\psi(s)} dS_h$$

avec ψ définie par la formule (5.6).

Notons alors :

$$g(h) = \int_{\partial\Omega_k} \frac{\theta(s)}{\psi(s)} dS_h$$

$$g(o) = < \omega_\varphi \; . \; \theta > .$$

Puisque $\theta \in \mathscr{C}'(R^n)$, on vérifie que l'on a :

(5.9) $$|g(h) - g(o)| \leqq Ch$$

avec C une constante > 0 indépendante de h .

(5.8) et (5.9) donnent :

(5.10) $$\left|\theta(\rho) - g(o) \int_\rho^1 \frac{dh}{h}\right| \leqq C(1 - \rho)$$

(5.10) donne le lemme.

3. PREUVE DU THEOREME 1.2

On peut supposer, sans diminuer la généralité que $m > 2$

En effet, supposons le théorème 1.2 prouvé dans ce cas et considérons $B = A^k$, k étant donné par les hypothèses.

B est une réalisation auto-adjointe positive de l'opérateur différentiel :

$$\mathcal{B}(x,D) = (\mathcal{A}(x,D))^k .$$

En effet, par hypothèse, les coefficients a_α de $\mathcal{A}(x,D)$ étant de classe $\mathscr{C}^{2m(k-1)}(R^n)$, $(\mathcal{A}(x,D))^k$ est elliptique d'ordre $2mk > 4$ et appartient à la classe d'opérateurs dégénérés vérifiant les hypothèses (H). De plus, puisque :

$$H_o^{2km}(\Omega) \subset \mathcal{D}(B) \subset D^{2km}(\Omega)$$

par hypothèse, nous avons, pour $u \in \mathcal{D}(B)$:

$$Bu = \mathcal{B}(x,D)u$$

au sens des distributions.

Donc B est une réalisation de $\mathcal{B}$ et vérifie les conditions du théorème 1.2 avec $k = 1$.

Appliquons à B la conclusion du théorème pour ce cas.

Notons $N_B(t)$ la fonction :

$$N_B(t) = \sum_{\mu_j \leqq t} 1$$

$\{\mu_j\}$ étant la suite des valeurs propres de B.

Comme :

$$(2\pi)^{-n} \int_{\tilde{\mathcal{B}}'_x(\xi)<1} d\xi = (2\pi)^{-n} \int_{\mathcal{A}'_x(\xi)<1} d\xi$$

nous avons donc :

(5.11) $$N_B(t) = \langle \omega_\varphi , c\rangle\, t^{1/km} \operatorname{Log} t^{1/km} + o(t^{1/km} \operatorname{Log} t^{1/km}) \qquad (t \to +\infty) .$$

Comme il est évident que :

$$\lambda_j^k = \mu_j$$

nous obtenons :

(5.12) $$N_B(t) = N(t^{1/k})$$

(5.11) et (5.12) donnent (1.5) dans le cas général.

Supposons donc $m > 2$.

Nous pouvons alors utiliser le théorème 1.1. Soit $G_t(x,y)$ le noyau de GREEN de $A + t$. Nous avons :

(5.13) $$\int_\Omega G_t(x,x)dx = \langle \omega_\varphi \,.\, c_o\rangle\, t^{-1+(1/m)} \operatorname{Log} t^{1/m} + 0(t^{-1+(1/m)}) \qquad (t \to +\infty) .$$

En effet, en vertu de (3.9), nous avons :

$$0 \leqq \int_{\Omega-\Omega_{t^{-1/m}}} G_t(x,x)dx \leqq C \text{ mes } (\Omega - \Omega_{t^{-1/m}})\, t^{-1+(2/m)} .$$

D'où :

(5.14) $$0 \leqq \int_{\Omega-\Omega_{t^{-1/m}}} G_t(x,x)dx \leqq C\, t^{-1+(1/m)} .$$

En vertu de (1.3), nous avons, en utilisant la fonction c_o :

$$\left| \int_{\Omega_{t^{-1/m}}} G_t(x,x)dx - t^{-1+(1/m)} \int_{\Omega_{t^{-1/m}}} c_o(x)\, \varphi(x)^{-1} dx \right|$$

$$\leqq C\, t^{-1+(3/4m)} \int_{\Omega_{t^{-1/m}}} \frac{dx}{\varphi(x)^{5/3}}$$

Il est aisé de voir que l'on a :

(5.16) $$\int_{\Omega_{t^{-1/m}}} \frac{dx}{\varphi(x)^{5/4}} \leqq C\, t^{1/4m} .$$

Le lemme 5.1 donne :

(5.17) $$\int_{\Omega_{t^{-1/m}}} \frac{c_o(x)}{\varphi(x)}\, dx = \langle \omega\varphi , c_o \rangle \operatorname{Log} t^{1/m} + O(1) \qquad (t \to +\infty)$$

(5.15), (5.16) et (5.17) donnent donc :

(5.18) $$\int_{\Omega_{t^{-1/m}}} G_t(x,x)dx = \langle \omega_\varphi , c_o \rangle\, t^{-1+(1/m)} \operatorname{Log} t^{1/m} + O(t^{-1+(1/m)}) \qquad (t \to +\infty)$$

(5.14) et (5.18) prouvent (5.13).

En utilisant maintenant un théorème taubérien de J. KARAMATA [7], avec la précision du reste de P. MALLIAVIN (cf. introduction de [8]) nous déduisons de (5.4) et (5.13)

(5.19) $$N(t) = \frac{m}{\pi} \sin \frac{\pi}{m} \langle \omega_\varphi , c_o \rangle\, t^{1/m} \operatorname{Log} t^{1/m} + O(t^{\gamma m}) \qquad (t \to +\infty) .$$

(5.12) et (5.19) donnent finalement (1.5), ce qui achève la preuve du théorème 1.

Remarques. 1) La classe d'opérateurs elliptiques dégénérés de second ordre, de type variationnel, étudiée par M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC [3] entre dans le cadre étudié ici.

Rappelons qu'il s'agit de la classe d'opérateurs :

$$\mathcal{A}(x,D) = \sum_{0 \leqq j,k \leqq n} D_j\, a_{j,k}(x)\, \varphi(x) D_k .$$

avec $a_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tout $j,k \in (0,\dots,n)$.

Soit la forme intégro-différentielle :

$$a(u,v) = \sum_{0 \leqq j,k \leqq 1} \int_\Omega a_{j,k}(x)\, \varphi(x)\, D_j u\, \overline{D_k v}\, dx$$

et $\mathcal{V}$ l'espace des distributions sur Ω :

$$\mathcal{V} = \{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) \; ; \; \varphi^{1/2} u \in L^2(\Omega) \; , \; \varphi^{1/2} D_j u \in L^2(\Omega) \; , \; j \in (1,\dots,n) \}$$

muni de la norme hilbertienne :

$$\| u \|^2_{\mathcal{V}} = \| \varphi^{1/2} u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \| \varphi^{1/2} D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} .$$

On suppose que la forme a est $\mathcal{V}$-coercive, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Re}\ a(u,u) \geqq \alpha \| u \|^2 \qquad u \in \mathcal{V}$$

α étant une constante > 0 indépendante de u .

Le lemme de LAX-MILGRAM montre l'existence d'un opérateur A non borné dans $L^2(\Omega)$ tel que :

(5.20) $$a(u,v) = (Au,v)_{L^2(\Omega)} \qquad u \in \mathcal{D}(A),\ v \in \mathcal{V}.$$

Si l'on suppose en plus que a est hermitienne, alors A est auto-adjoint positif et est une réalisation de $\mathcal{a}(x,D)$ au sens de la définition de la partie I.

En effet, suivant un résultat de régularité de [3], nous avons :

(5.21) $$\mathcal{D}(A^k) = D^{2km}(\Omega) \qquad k \in \mathbf{N}.$$

Donc (5.20) et (5.21) prouvent que l'on a (1.1) et (1.2).

Les théorèmes 1.1 et 1.2 sont donc applicables à cette classe d'opérateurs.

2) Considérons à présent le cas particulier intéressant suivant :

$$\Omega = \{x \ ; \ |x| < 1\}$$

$$\varphi\ (x) = 1 - |x|^2$$

$$\mathcal{a}\ (x,D) = \sum_{0 \leqq j \leqq n} D_j\, \varphi\,(x) D_j\ .$$

La forme de LERAY est ici proportionnelle à la mesure euclidienne de surface de la sphère unité :

$$<\omega_\varphi \,.\, \theta> = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \theta(s)dS\ .$$

La fonction $c(x)$ est constante et on a, pour $n = 2$:

$$c(x) = (2\pi)^{-2} \int_{|\xi|^2 < 1} d\xi = \frac{1}{4\pi}\ .$$

D'où :

$$<\omega_\varphi \,.\, c> = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Omega} ds = \frac{1}{4}\ .$$

Le théorème 1.2 donne, pour $n = 2$:

(5.21) $$N(t) = \frac{t\ \mathrm{Log}\ t}{4} + o(t\ \mathrm{Log}\ t) \qquad (t \to +\infty)\ .$$

Nous retrouvons ainsi un résultat de N. SHIMAKURA [12] ; cet auteur prouve

(5.21) en étudiant les singularités de la fonction d'EPSTEIN associée à la suite des valeurs propres $\{\lambda_j\}$ (qui est explicitement connue dans ce cas).

PROBLEME. Il est plausible d'espérer que l'on a, pour $n \geqq 3$ et pour une réalisation auto-adjointe positive A d'un opérateur différentiel elliptique dégénéré d'ordre $2m$:

$$N(t) = \ell\, t^{(n-1)/m} + O(t^{(n-1)/m}) \qquad (t \to +\infty)$$

avec ℓ un terme de "surface.

Le problème revient à prouver, pour m assez grand (à savoir $m > n$) , que le comportement asymptotique de la fonction de GREEN $G_t(x,y)$ de $A + t$ vérifie :

$$(5.22) \quad \int_\Omega G_t(x,x)dx = \frac{(n-1)\pi}{m} \left(\sin \frac{(n-1)}{m}\right)^{-1} \ell\, t^{-1+(n-1)/m} + o(t^{-1+(n-1)/m})$$

$(t \to +\infty)$.

Dans [11], nous avons prouvé que l'on a :

$$0 \leqq \int_\Omega G_t(x,x)dx \leqq C\, t^{-1+(n-1)/m}$$

La méthode utilisée ici, pour $n = 2$, donne encore probablement (5.22) pour $n > 2$, mais les majorations nous avons faites pour :

$$\int_{\Omega-\Omega_{t^{-1/m}}} G_t(x,x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_{\Omega_{t^{-1/m}}} G_t(x,x)dx$$

ne sont pas assez fines pour pouvoir conclure.

Il y a de plus, probablement, une différence de comportement entre le cas $n = 2$ et $n > 2$ qu'il est bon de signaler.

Nous avons en effet dans le cas $n = 2$ le terme :

$$(5.23) \qquad \int_{\Omega-\Omega_{t^{-1/m}}} G_t(x,x)dx$$

n'a pas de contribution dans le premier terme de $\int_\Omega G_t(x,x)dx$.

Dans le cas $n > 2$, le terme (4.23) intervient très probablement, c'est-à-dire que si la :

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-(n-1)/m} \int_{\Omega-\Omega_{t^{-1/m}}} G_t(x,x)dx$$

existe, elle est sans doute non nulle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand (1965).

[2] S. AGMON et Y. KANNAI On the asymptotic betavior of spectral fonctions and resolvent kernels of elliptic cperators, Israël Journal of Mathematics, vol. 5, n° 1, p. 1-30 (1967).

[3] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Archive for Rat. Mech. and Analysis, vol. 34, N° 5, p. 361-379 (1969).

[4] L.BOUTET DE MONVEL et P. GRISVARD Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur, C.R. Acad. Sciences Paris, t. 272, n° 1, p. 23-26 (1971).

[5] G. GREYMONAT et P. GRISVARD Problemi ai limiti lineari ellitici negli spazi di Sobolev con peso, Le Mathematiche - XXII, fasc. 2, p. 1-38, (1967).

[6] I.M. GELFAND et G.E. CHILOV Les distributions, tome 1, Dunod- Paris (1962).

[7] J. KARAMATA Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze Welche die Laplacesche une Stieltjessche Transformation betreffen. Jounr. für reine u. angew. Mathematik, 164, p. 27-39 (1931).

[8] P. MALLIAVIN Un théorème taubérien relié aux estimations des valeurs propres, Séminaire Jean Leray, Collège de France, année 1962-63.

[9] J-L. LIONS et E. MAGENES Problèmes aux limites non homogènes, tome I, Dunod- Paris (1968).

[10] PHAM THE LAI Noyaux d'Agmon, C.R. Acad. Sciences Paris (1974). Séminaire Jean Leray, Collège de France; année 1973-74.

[11] PHAM THE LAI Classe de compacité d'opérateurs intervenant dans une classe de problèmes elliptiques dégénérés, (à paraître) à Israël Journal of Mathematics.

[12] J. SHIMAKURA Quelques exemples des ζ-fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés de second ordre, Proc. Japan Acad. Sciences 46, p. 1065-1069 (1970).