Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jean Leray

Solutions asymptotiques et groupe symplectique

Séminaire Jean Leray, n° 3 (1973-1974), p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1974___3_1_0>

SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES ET GROUPE SYMPLECTIQUE, (*)

par Jean LERAY

Collège de France, Paris 05

INTRODUCTION.

Il est nécessaire d'expliciter et de justifier la notion, due à V.P. Maslov [3], de solution asymptotique ; je l'ai fait, par exemple à Rome en décembre 1972 [1].

Le Traité de V.P. Maslov et mon exposé emploient un choix particulier de coordonnées pour construire des notions, qui se révèlent finalement indépendantes de ce choix. Le présent exposé libère cette théorie d'un tel choix, en employant -au lieu du groupe fini engendré par les transformations de Fourier opérant chacune sur l'une des coordonnées- une représentation unitaire Sp_2 du revêtement à deux feuillets du groupe symplectique Sp .

Cette représentation Sp_2 fut employée par D. Shale [5] et V.C. Bouslaev [3], qui développaient tous deux des notions introduites en théorie quantique par I. Segal [4]. Cette représentation Sp_2 est l'un des groupes algébriques d'opérateurs unitaires qu'A. Weil [6] relie aux travaux de théorie des nombres de K. Siegel. Mais aucun de ces auteurs n'énonce les propriétés de Sp_2 qu'emploie la théorie des solutions asymptotiques.

§ 1. LE REVÊTEMENT $Sp_2(\ell)$ DU GROUPE SYMPLECTIQUE $Sp(\ell)$.

1. LE GROUPE MÉTAPLECTIQUE. - Notons: $X = R^{\ell}$;

(X) l'espace des fonctions $X \to \mathbb{C}$ dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide ;

(X) l'espace des distributions tempérées sur X (L. Schwartz) ;

$\mathcal{H}(X)$ l'espace de Hilbert des fonctions $X \to \mathbb{C}$ de carré sommable ;

$X^* = R^{\ell}$ le dual de X ; $< p,x > \in R$ la valeur en $x \in X$ de $p \in X^*$;

(*) A paraître dans les Actes du Colloque de Nice : Opérateurs intégraux de Fourier et équations aux dérivées partielles ; (Lecture notes, Springer).

$Z(\ell)$ l'espace vectoriel $X \oplus X^*$, muni de la structure symplectique $[.,.]$ que voici : soient z et $z' \in Z(\ell)$; soient x,x', p et p' tels que

$$z = x+p \quad , \quad z' = x'+p' \quad , \quad x \text{ et } x' \in X \quad , \quad p \text{ et } p' \in X^* \quad ;$$

alors

$$[z,z'] = < p,x' > - < p',x > \quad ; \tag{1.1}$$

ν un nombre imaginaire pur, non nul : $\nu \in i\dot{\mathbb{R}}$;

$\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}$ et le produit par x seront donc, sur $\mathcal{H}(X)$, des opérateurs self-adjoints.

Tout $a \in Z(\ell)$ définit une fonction linéaire de

$z = x+p \in Z(\ell)$ $(x \in X \ , \ p \in X^*)$ valant en z , par définition :

$$a(z) = a(x,p) = [a;z] \quad ; \tag{1.2}$$

elle définit donc un opérateur différentiel $a(x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})$, linéaire en $(x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})$; cet opérateur est un endomorphisme de $\mathcal{S}'(X)$; il est self-adjoint sur X .

Tout automorphisme S de $\mathcal{S}'(X)$ le transforme en un endomorphisme SaS^{-1} de $\mathcal{S}'(X)$.

. <u>Définition</u>.- Nous notons $G(\ell)$ le groupe de ceux des automorphismes S de $\mathcal{S}'(X)$ qui transforment tous les opérateurs différentiels $a(x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})$ linéaires en x et $\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}$ en opérateurs du même type.

<u>Propriétés</u>.- Tout S de $G(\ell)$ induit donc un endomorphisme

$$s : a \mapsto SaS^{-1}$$

de $Z(\ell)$; mais l'opérateur différentiel

$$a(x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})\, b(x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) - b(x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})\, a(x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})$$

est la multiplication par $\frac{1}{\nu}[a,b] \in \mathbb{C}$; l'endomorphisme s de $Z(\ell)$ doit donc laisser $[.,.]$ invariant, c'est-à-dire être un automorphisme symplectique de $Z(\ell)$; le groupe de ces automorphismes est noté $Sp(\ell)$.

L'application $S \longrightarrow s$ est donc un morphisme naturel :

$$G(\ell) \longrightarrow Sp(\ell) \quad ; \tag{1.3}$$

la valeur de $sa = SaS^{-1}$ en z est donc

$$(sa)(z) = [sa,z] = [a,s^{-1}z] = a(s^{-1}z) = (a \circ s^{-1})(z) \quad ;$$

autrement dit l'endomorphisme sa de $Z(\ell)$ est l'application composée

(1.4) $$sa = a \circ s^{-1} \quad .$$

Le noyau du morphisme naturel (1.3) est l'ensemble des automorphismes S de $\mathcal{S}'(X)$ commutant à x et $\frac{\partial}{\partial x}$; $S1$ est donc une constante $c \neq 0$; si P est un polynome, $SP = cP$; or les polynomes sont denses dans $\mathcal{S}'(X)$; donc S est la multiplication par c. Le noyau de (1.3) est donc le sous-groupe $\dot{\mathbb{C}}$ du centre de $G(\ell)$ ayant pour éléments les multiplications cE par les nombres complexes $c \neq 0$. Notons $\dot{\mathbb{C}} = S^1 \times R_+$, S^1 étant le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 et R_+ celui des nombres réels > 0.

Le morphisme naturel (1.3) est un épimorphisme. Pour le prouver, notons A la donnée d'un nombre réel ou imaginaire pur $\Delta(A) \neq 0$ et d'une forme quadratique sur $X \oplus X^*$, à valeurs réelles :

(1.5) $X \oplus X^* \ni (x,x') \longmapsto A(x,x') = \frac{1}{2} < Px,x > - <Lx,x'> + \frac{1}{2} < Qx',x' > \in R$,

où $$L\ ,\ P = {}^tP,\ Q = {}^tQ : X \to X^*, \quad \text{dét}\ L = \Delta^2(A) \quad ;$$

notons ν un nombre imaginaire pur et $i^{\ell/2} = e^{\pi \ell i/4}$; pour tout $u' \in \mathcal{S}(X)$, définissons $u \in \mathcal{S}(X)$ par l'intégrale

(1.6) $$u(x) = \left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} \Delta(A) \int_X e^{\nu A(x,x')} u'(x')\, d^\ell x' \quad ;$$

$$S_A : u' \longmapsto u$$

est un automorphisme unitaire, puisqu'il est le composé des quatre automorphismes unitaires de $\mathcal{S}(X)$ que voici :

(1.7) une multiplication de v et v' par e^{iq} et $e^{iq'}$, q et q' étant des formes quadratiques $X \to R$;

(1.8) une transformation de Fourier ;

(1.9) un automorphisme de $\mathcal{S}(X)$ qui applique $v \in \mathcal{S}(X)$ sur u, valant

$$u(x) = \sqrt{\text{dét } T}\ \ v(Tx) \quad ,$$

où T est un automorphisme de X .

Ces automorphismes, donc leur produit S_A , se prolongent en automorphismes unitaires de $\mathcal{H}(X)$ et en automorphismes de $\mathcal{S}'(X)$.

D'autre part, la dérivation en x de la relation (1.5) montre que $S_A \in G(\ell)$; l'image s_A de S_A par (1.3) dans $Sp(\ell)$ est l'automorphisme symplectique

$$s_A : Z(\ell) \ni (x',p') \mapsto (x,p) \in Z(\ell)$$

défini par les relations

(1.10) $$p = A_x(x,x') \ , \ p' = - A_{x'}(x,x') \quad ,$$

c'est-à-dire par les relations, où L est inversible :

(1.11) $$p = Px - {}^tLx' \ , \ p' = Lx - Qx' \ .$$

<u>Le groupe métaplectique</u> $Mp(\ell)$ est le sous-groupe de $G(\ell)$ dont les éléments sont les éléments de $G(\ell)$ ayant une restriction à $\mathcal{H}(\ell)$ qui soit unitaire ; nous venons de voir que $S_A \in Mp(\ell)$; il en résulte que la restriction à $Mp(\ell)$ du morphisme (1.3) est un épimorphisme $Mp(\ell) \longrightarrow Sp(\ell)$; donc

(1.12) $$G(\ell) = Mp(\ell) \times R_+ \ .$$

Puisque le noyau de $G(\ell) \to Sp(\ell)$ est $\dot{\mathbb{C}}$, le noyau de $Mp(\ell) \to Sp(\ell)$ est $\mathbb{S}^1$; donc

(1.13) $$Mp(\ell)/\mathbb{S}^1 = Sp(\ell) \ .$$

2. LE GROUPE UNITAIRE $Sp_2(\ell)$.-

On déduit aisément de la définition (1.6) de S_A que,

(2.1) si $$s_A\, s_{A'}\, s_{A''} = E \ , \quad \text{alors} \quad S_A\, S_{A'}\, S_{A''} = \pm E \ .$$

Il en résulte que le sous-groupe de $Mp(\ell)$ engendré par les S_A est l'ensemble des produits d'un couple d'éléments de S_A . La restriction à ce sous-groupe du morphisme canonique (1.3) est donc un épimorphisme. On déduit de la définition (1.6) de S_A que

(2.2) si $\qquad s_A\, s_{A'} = E \quad$, alors $\; S_A\, S_{A'} = \pm E \;$.

Il en résulte que le noyau de cet épimorphisme est le sous-groupe à deux éléments $S^o = \{E, -E\}$; rappelons que $-E : v \mapsto -v$ (produit par -1 de $v \in \mathcal{S}'(X)$) . Donc: <u>les automorphismes</u> S_A (de $\mathcal{S}(X)$, de $\mathcal{S}'(X)$ et de $\mathcal{H}(X)$) <u>engendrent un revêtement à 2 feuillets</u>, $Sp_2(\ell)$ <u>de</u> $Sp(\ell)$.

Leurs restrictions à $\mathcal{H}(X)$ constituent <u>une représentation unitaire de</u> $Sp_2(\ell)$.

La projection naturelle de $Sp_2(\ell)$ sur $Sp(\ell)$ est : $\pm S \mapsto s$.

On prouve que ce revêtement est connexe, donc n'est pas trivial.

On prouve enfin que tout élément S de $Sp_2(\ell)$ est encore le produit des quatre automorphismes (1.7), (1.8) et (1.9), si l'on permet à la transformation de Fourier de n'opérer que sur certaines des variables indépendantes.

Nous noterons $\Sigma(\ell)$ [et $\Sigma_2(\ell)$] l'ensemble des $s \in Sp(\ell)$ [et des $S \in Sp_2(\ell)$] qui ne sont pas du type s_A [et S_A] ; $\Sigma(\ell)$ [et $\Sigma_2(\ell)$] sont des hypersurfaces de $Sp(\ell)$ [et de $Sp_2(\ell)$] ; la projection naturelle de $Sp_2(\ell)$ sur $Sp(\ell)$ applique $\Sigma_2(\ell)$ et $Sp_2(\ell) \setminus \Sigma_2(\ell)$ sur $\Sigma(\ell)$ et $Sp(\ell) \setminus \Sigma(\ell)$.

<u>Note</u> . -

(2.3) $\qquad s \notin \Sigma(\ell)$ signifie : X^* et sX^* sont transverses.

3. INERTIE ; INDICE DE MASLOV, mod. 4. - La preuve de (2.1) emploie la formule (3.2) que voici.

Définissons A' (et A'') comme A l'a été, par la donnée de $\Delta(A')$, L', P', Q'; la condition

(3.1) $\quad s_A\; s_{A'}\; s_{A''} = E \quad$ s'énonce

$$P'' + Q' = L'(P' + Q)^{-1}\, {}^tL' \quad , \quad P + Q'' = {}^tL(P' + Q)^{-1}\, L \quad , \tag{3.2}$$
$$L'' = -{}^tL(P' + Q)^{-1}\, {}^tL'$$

Cette formule (3.1) prouve que les formes quadratiques définies par les morphismes symétriques et inversibles

$$P' + Q \quad , \quad P'' + Q' \quad , \quad P + Q''$$

ont le même indice d'inertie[1] ;

$$\mathrm{Inert}(P'+Q) = \mathrm{Inert}(P''+Q') = \mathrm{Inert}(P+Q'')$$

nous le nommons <u>inertie</u> de $(s_A \, , \, s_{A'}, s_{A''})$ et le notons

$$\mathrm{Inert}(s_A, s_{A'}, s_{A''}) \quad \text{ou} \quad \mathrm{Inert}(S_A, S_{A'}, S_{A''}) \quad .$$

Ainsi

$\mathrm{Inert}(\ldots)$ est une fonction, à valeurs $\in\{0,\ldots,\ell\}$, de (S,S',S'') , <u>définie pour</u>

$$S, S' \text{ et } S'' \notin \Sigma \quad , \quad S\,S'\,S'' = \pm E \quad ;$$

<u>elle ne dépend que des projections</u> s,s',s'' <u>de</u> S,S',S'' <u>dans</u> $Sp(\ell)$; nous avons :

(3.3) $\mathrm{Inert}(S,S',S'') = \mathrm{Inert}(S',S'',S) = \mathrm{Inert}(S'',S,S') = \ell - \mathrm{Inert}(S''^{-1},S'^{-1},S^{-1})$

Supposons (3.1) vérifié ; (2.1) peut être précisé comme suit. Notons

(3.4) $$m(S_A) \equiv \frac{2}{\pi} \arg \Delta(A) \quad \mathrm{mod}\ 4 \quad ;$$

alors on a

$$S_A\, S_{A'} S_{A''} = E$$

quand

$$\mathrm{Inert}(S_A, S_{A'}, S_{A''}) \equiv m(S_A) - m(S_{A'}^{-1}) + m(S_{A''}) \quad \mathrm{mod.}\ 4 \quad ,$$

Ainsi :

m <u>est une fonction localement constante, à valeurs dans</u> $\mathbb{Z}_4$, <u>de</u> S , <u>définie sur</u> $Sp_2(\ell) \setminus \Sigma_2(\ell)$; <u>elle vérifie</u>

(3.5) $$\mathrm{Inert}(S,S',S'') \equiv m(S) - m(S'^{-1}) + m(S'') \quad \mathrm{mod.}\ 4$$

Ces deux propriétés la caractérisent évidemment.

Elle possède les propriétés suivantes :

(3.6) $$m(S^{-1}) \equiv \ell - m(S) \quad , \quad m(-S) \equiv m(S)+2 \quad \mathrm{mod.}\ 4 \quad .$$

---

[1] Un morphisme $q : X \longrightarrow X^*$ inversible et symétrique, c'est-à-dire tel que ${}^t q = q$, définit une forme quadratique :

$$x \longmapsto \langle qx, x \rangle \quad ; \quad \langle qx, x \rangle = -\sum_j L_j^2(x) + \sum_k L_k^2(x),$$

les L_j et L_k étant ℓ formes linéaires indépendantes ; $\mathrm{Inert}(q)$ est le nombre des j .

Note.- m est donc définie mod. 2 sur $Sp(\ell) - \Sigma(\ell)$:

$$m(s_A) \equiv m(\pm S_A) \equiv \text{signe } (\text{dét } L) \quad \text{mod. } 2$$

Note.- Le § 3 définira m comme étant une fonction à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et non plus dans $\mathbb{Z}_4$.

§ 2. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS À COEFFICIENTS POLYNOMIAUX.

4. Sur X , soit a un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux, dépendant de la variable imaginaire pure ν déjà introduite dans (1.6).

Il a deux formes canoniques :

$$a^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}). = \sum_\alpha a^+_\alpha(\nu,x)(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})^\alpha. \quad ; \tag{4.1}$$

$$a^-(\nu,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x},x). = \sum_\alpha (\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})^\alpha [a^-_\alpha(\nu,x).] \quad . \tag{4.2}$$

A ces deux formes faisons correspondre deux polynomes, valant :

$$a^+(\nu,x,p) = \sum_\alpha a^+_\alpha(\nu,x)p^\alpha \quad ; \quad a^-(\nu,x,p) = \sum_\alpha a^-_\alpha(\nu,x)p^\alpha \quad .$$

On prouve aisément ceci :

A cet opérateur différentiel a est associé un polynome $a^0 : (x,p) \mapsto a^0(x,p)$ tel que :

$$a^0(\nu,x,p) = e^{-\frac{1}{2\nu}\frac{\partial^2}{\partial x.\partial p}} a^+(\nu,x,p) = e^{\frac{1}{2\nu}\frac{\partial^2}{\partial x.\partial p}} a^-(\nu,x,p) \quad ; \tag{4.3}$$

on a noté

$$\frac{\partial^2}{\partial x.\partial p} = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial p_j} \quad , \quad \{x_j\} \text{ et } \{p_j\} \text{ étant des coordonnées duales de X et } X^* ;$$

$$e^{\frac{1}{2\nu}\frac{\partial^2}{\partial x.\partial p}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} (\frac{1}{2\nu}\frac{\partial^2}{\partial x.\partial p})^n$$

opère évidemment sur les polynomes de (x,p) .

Si le polynome a^o est associé à l'opérateur différentiel a alors le polynome

$$a^o \circ s^{-1} : (x,p) \rightarrow a^o(\nu, s^{-1}(x,p)) \quad ;$$

est associé à l'opérateur différentiel SaS^{-1} . s désigne la projection sur $Sp(\ell)$ de $S \in Sp_2(\ell)$.

§ 3. AUTRES INDICES D'INERTIES DE MASLOV SUR $Z(\ell)$.

La topologie algébrique permet d'établir les résultats suivants : il suffit d'employer des méthodes dues à I. Arnold [3] , comme je l'ai fait à Rome en janvier 1973 [2].

5. LE GROUPE FONDAMENTAL DE $Sp(\ell)$. - Ce groupe fondamental est (cf. E. Cartan):

$$\pi_1 [Sp(\ell)] \simeq \mathbb{Z} \; . \tag{5.1}$$

Le groupe $Sp(\ell)$ possède donc un seul revêtement non trivial $Sp_q(\ell)$ d'ordre q ($q \in \mathbb{N}$ ou $q = +\infty$) ; nous avons identifié $Sp_2(\ell)$ à un groupe unitaire opérant sur $\mathcal{H}(X)$.

Notons $\pi_1 [Sp(\ell)]$ mod. q l'image de $\pi_1 [Sp(\ell)]$ isomorphe à $\mathbb{Z}_q$;

(5.2) $\pi_1 [Sp(\ell)]$ mod. q s'identifie à un sous-groupe du centre de $Sp_q(\ell)$.

6. LA GRASSMANNIENNE LAGRANGIENNE $\Lambda(\ell)$. - On nomme sous-espace lagrangien de Z tout sous-espace de Z sur lequel la forme symplectique $[.,.]$ s'annule identiquement.

L'ensemble $\Lambda(\ell)$ des ℓ-sous-espaces lagrangiens est un espace homogène ; on peut l'identifier à $U(\ell)/O(\ell)$, quotient du groupe unitaire $U(\ell)$ par le groupe orthogonal $O(\ell)$. I. Arnold [3] a prouvé que le groupe fondamental de $\Lambda(\ell)$ est

$$\pi_1 [\Lambda(\ell] \simeq \mathbb{Z} \; . \tag{6.1}$$

Cette grassmannienne $\Lambda(\ell)$ possède donc un seul revêtement non trivial d'ordre q ($q \in \mathbb{N}$ ou $q = +\infty$) : $\Lambda_q(\ell)$; $\pi_1 [\Lambda(\ell)]$ opère sur $\Lambda_q(\ell)$; si β est le générateur de $\pi_1 [\Lambda(\ell)]$ et si $\lambda_q \in \Lambda_q(\ell)$, alors

(6.2) $\beta^p \lambda_q = \lambda_q$ <u>si et seulement si</u> $p = 0 \mod. q$.

D'autre part, $Sp(\ell)$ opère effectivement et transitivement sur $\Lambda(\ell)$; il en résulte que $Sp_\infty(\ell)$ opère effectivement et transitivement sur $\Lambda_\infty(\ell)$; en choisissant de façon cohérente <u>les générateurs</u> α de $\pi_1 [\, Sp(\ell)]$ et β de $\pi_1[\Lambda(\ell)]$, on obtient la formule :

(6.3) $$\alpha \lambda_\infty = \beta^2 \lambda_\infty \quad , \quad \text{où} \quad \lambda_\infty \in \Lambda_\infty(\ell)$$

Vu (6.2), il en résulte que $Sp_q(\ell)$ opère sur $\Lambda_{2q}(\ell)$, l'image α_q de α dans $Sp_q(\ell)$ opérant comme suit :

(6.4) $$\alpha_q \lambda_{2q} = \beta^2 \lambda_{2q} \quad .$$

<u>En particulier</u> : $Sp_2(\ell)$ opère sur $\Lambda_4(\ell)$;
l'élément $-E$ de $Sp_2(\ell)$ et l'élément β^2 de $\pi_1 [\Lambda(\ell)]$ définissent le même homéomorphisme de $\Lambda_4(\ell)$.

7. L'INERTIE D'UN TRIPLET DE ℓ-PLANS LAGRANGIENS. - Soient trois ℓ- sous-espaces lagrangiens de Z , <u>deux à deux transverses</u> : $\lambda, \lambda', \lambda''$; nous avons donc

$$Z = \lambda \oplus \lambda' = \lambda' \oplus \lambda'' = \lambda'' \oplus \lambda \quad .$$

Les conditions

(7.1) $$z \in \lambda \quad , \quad z' \in \lambda' \quad , \quad z'' \in \lambda'' \quad , \quad z+z'+z'' = 0$$

définissent évidemment trois isomorphismes

(7.2) $$\begin{tikzcd} & z \arrow[dr] & \\ z'' \arrow[ur] & & z' \arrow[ll] \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} & \lambda \arrow[dr] & \\ \lambda'' \arrow[ur] & & \lambda' \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

dont le produit est l'identité et tels que

(7.3) $$[z,z'] = [z',z''] = [z'',z]$$

est la valeur d'une forme quadratique de $z \in \lambda$, d'une forme de $z' \in \lambda'$ et d'une forme de $z'' \in \lambda''$. Ces trois formes sont les transformées l'une de l'autre par les isomorphismes (7.2) ; elles ont donc le même indice d'inertie ; elles sont de rang maximum.

C'est l'indice d'inertie de la forme opposée que nous emploierons.

Définition.- Etant donné le triplet $\lambda, \lambda', \lambda''$ d'éléments de $\Lambda(\ell)$, deux à deux transverses, la condition

$$z \in \lambda, z' \in \lambda' \quad , \quad z - z' \in \lambda''$$

définit un isomorphisme

$$z \mapsto z' \quad , \quad \lambda \to \lambda' \quad ;$$

$[z, z']$ est donc une forme quadratique de z , dont l'indice d'inertie sera noté $\mathrm{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'')$.

Evidemment

(7.4) $\mathrm{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') = \mathrm{Inert}(\lambda', \lambda'', \lambda) = \mathrm{Inert}(\lambda'', \lambda, \lambda') = \ell - \mathrm{Inert}(\lambda, \lambda'', \lambda') = \ldots$

Inert est une fonction localement constante, à valeurs dans $\{0, \ldots, \ell\}$.

Soients $\lambda_q, \lambda'_q, \lambda''_q \in \Lambda_q(\ell)$; supposons-les deux à deux transverses, c'est-à-dire leurs projections naturelles $\lambda, \lambda', \lambda''$ sur $\Lambda(\ell)$ deux à deux transverses ; nous définirons :

$$\mathrm{Inert}(\lambda_q, \lambda'_q, \lambda''_q) = \mathrm{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') \quad .$$

8. L'INDICE DE MASLOV D'UN COUPLE D'ÉLÉMENTS DE $\Lambda_\infty(\ell)$. On peut construire une fonction, évidemment unique, appelée indice de Maslov et notée m , qui a les trois propriétés suivantes :

- elle est définie sur tout couple d'éléments transverses de $\Lambda_\infty(\ell)$ et est à valeurs entières :

$$m(\lambda'_\infty, \lambda_\infty) \in \mathbb{Z} \quad ;$$

- elle est localement constante (en tout point de son domaine de définition) ;
- elle vérifie la relation

(8.1) $$\mathrm{Inert}(\lambda', \lambda'', \lambda) = m(\lambda''_\infty, \lambda_\infty) - m(\lambda'_\infty, \lambda_\infty) + m(\lambda'_\infty, \lambda''_\infty) \quad .$$

Note.- Cette relation (8.1) définit le cobord en topologie algébrique, sous des hypothèses différentes des précédentes.

Note.- Cette relation (8.1) prouve la suivante :

(8.2) $\text{Inert}(\lambda,\lambda'\lambda'') - \text{Inert}(\lambda,\lambda',\lambda''') + \text{Inert}(\lambda,\lambda'',\lambda''') - \text{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda''') = 0$.

Voici les propriétés de cet indice de Maslov : il est invariant par $Sp_\infty(\ell)$, c'est-à-dire :

(8.3) $$m(S_\infty\lambda'_\infty, S_\infty\lambda_\infty) = m(\lambda'_\infty,\lambda_\infty) \quad , \quad \text{où} \quad S_\infty \in Sp_\infty(\ell) \quad ;$$

(8.4) $$m(\lambda'_\infty,\lambda_\infty) + m(\lambda_\infty,\lambda'_\infty) = \ell \quad ;$$

(8.5) $$m(\beta^{p'}\lambda'_\infty,\beta^p\lambda_\infty) - m(\lambda'_\infty,\lambda_\infty) = p-p' \quad ,$$

à condition de choisir convenablement le générateur β de $\pi_1[\Lambda(\ell)]$.

Note.- La relation (8.5) prouve que m est défini mod. q sur les couples λ'_q,λ_q d'éléments de $\Lambda_q(\ell)$, les relations précédentes valant alors mod. q .

Par exemple : m est défini mod. 2 sur $\Lambda_2(\ell)$, qui est l'ensemble des ℓ-sous-espaces lagrangiens de Z orientés (au sens euclidien du terme) ; les orientations de λ_2 et λ'_2 sont compatibles avec la dualité de λ et λ' définie par la fonction bilinéaire de $z \in \lambda$ et $z' \in \lambda'$ valant

$$(-1)^{m(\lambda'_2,\lambda_2)}[z,z'] \quad ;$$

$m(X^*_2,\lambda_2) \equiv 0$ mod. 2 signifie que la projection parallèle à X^* projette λ_2 orienté sur X_2 orienté.

9. L'INDICE DE MASLOV de $s_\infty \in Sp_\infty(\ell)$.- L'inertie d'un triplet d'éléments, deux à deux transverses, de $\Lambda(\ell)$ (n° 7) et celle d'un triplet d'éléments de $Sp(\ell) \setminus \Sigma(\ell)$, dont le produit est l'identité,(n° 3) sont liées comme suit :

Soient $s,s',s'' \in Sp(\ell) \setminus \Sigma(\ell)$ (voir (2.3)) tels que $s\,s's'' = E$; on a

(9.1) $$\text{Inert}(s,s',s'') = \text{Inert}(s^{-1}X^*,X^*,s'X^*) = \text{Inert}(s''^{-1}X^*,X^*,sX^*) = \ldots$$

Définissons sur $Sp_\infty(\ell)\setminus \Sigma_\infty(\ell)$ une fonction m par la relation :

(9.2) $$m(s_\infty) = m(X^*_\infty, s_\infty X^*_\infty)$$

($\lambda_\infty \in \Sigma_\infty(\ell)$ signifie $\lambda \in \Sigma(\ell)$; nous choisissons $X^*_\infty \in \Lambda_\infty(\ell)$ de projection X^*)
Cette fonction m a donc les propriétés suivantes, qui la caractérisent :

- elle est à valeurs entières ;
- elle est localement constante ;
- elle vérifie la relation, où $s_\infty s'_\infty s''_\infty = E$ (dans $Sp_\infty(\ell)$)

(9.3) $$\mathrm{Inert}(s,s',s'') = m(s_\infty) - m(s'^{-1}_\infty) + m(s''_\infty) \quad .$$

Elle possède en outre les propriétés que voici

(9.4) $$m(s_\infty) + m(s_\infty^{-1}) = \ell$$

(9.5) $$m(\alpha^q s_\infty) - m(s_\infty) = 2q \quad ,$$

à condition de choisir convenablement le générateur α de $\pi_1[Sp(\ell)]$.

<u>Note</u>.- La relation (9.5) prouve que m est défini mod. 2q sur

$$Sp_q(\ell) \setminus \Sigma_q(\ell) \quad ;$$

$Sp_q(\ell)$ opère sur $\Lambda_{2q}(\ell)$; les relations précédentes valent mod. 2q quand on y remplace Sp_∞, Λ_∞, X^*_∞ par Sp_q , Λ_{2q} , X^*_{2q} .

L'unicité de m prouve que, sur $Sp_2(\ell)$, m mod. 4 est l'indice de Maslov défini mod. 4 par (3.4).

10. UN INDICE D'INERTIE MIXTE est l'indice d'inertie qu'emploiera l'étude des variétés lagrangiennes (§ 4, n° 12).

<u>Définitions</u>.- Soient $s \in Sp(\ell)\setminus \Sigma(\ell)$, λ et $\lambda' \in \Lambda(\ell)$; supposons λ et λ' transverses à X^* et tels que

$$\lambda = s\lambda' \quad ;$$

nous définissons alors

(10.1) $$\mathrm{Inert}(s,\lambda,\lambda') = \mathrm{Inert}(s^{-1}X^*, X^*, \lambda') = \mathrm{Inert}(X^*, sX^*, \lambda)$$

<u>Les propriétés</u> de cet indice d'inertie sont évidentes :

(10.2) $$\mathrm{Inert}(s,\lambda,\lambda') = \ell - \mathrm{Inert}(s^{-1},\lambda',\lambda) \quad ;$$

(10.3) $$\mathrm{Inert}(s,\lambda,\lambda') = m(s_q) - m(X^*{}_{2q},\lambda_{2q}) + m(X^*{}_{2q},\lambda'{}_{2q}) \mod. 2q$$

$$\text{si} \quad \lambda_{2q} = s_q\, \lambda'{}_{2q} \quad .$$

Note.- C'est le cas $q = 2$ qu'emploie la théorie des solutions asymptotiques.

§ 4. VARIÉTÉS LAGRANGIENNES DANS $Z(\ell)$.

11. DÉFINITION D'UNE VARIÉTÉ LAGRANGIENNE. - Une variété $V(\ell)$ de $Z(\ell)$ est dite lagrangienne quand

(11.1) $$\dim V(\ell) = 1 \quad , \; d\,p \wedge dx = 0 \quad \text{sur} \quad V(\ell) \quad ,$$

en notant $dp \wedge dx = d < p,dx >$.

Phase.- Puisque la forme $< p,dx >$ est régulière et fermée sur $V(\ell)$, l'équation

(11.2) $$d\varphi = < p,dx > = \frac{1}{2}\,[z,dz] + \frac{1}{2}\, d < p,x >$$

définit, à une constante additive près, sur le revêtement universel $\check{V}(\ell)$ une fonction

(11.3) $$\varphi = \check{V}(\ell) \longrightarrow \mathbb{R} \quad ;$$

on dit que φ est la phase associée à $V(\ell)$.

12. GROUPE SYMPLECTIQUE ET VARIÉTÉS LAGRANGIENNES. - Tout élément s de $Sp(\ell)$ transforme évidemment une variété lagrangienne $V'(\ell)$ en une variété lagrangienne $V(\ell) = sV'(\ell)$; si on choisit de façon cohérente les constantes additives de leurs phases φ et φ' , alors

(12.1) $$\varphi \circ s - \varphi'$$

est la restriction à $V'(\ell)$ de la forme quadratique valant en (x',p') :

$$\frac{1}{2} < p,x > - \frac{1}{2} < p',x' > \quad , \quad \text{où} \quad (x,p) = s(x',p') \quad .$$

Supposons les ℓ-plans tangents à $V(\ell)$ et à $V'(\ell)$ transverses à X^* : on peut prendre pour coordonnée locale x sur $V(\ell)$ et x' sur $V'(\ell)$; les conditions

$$(x,p) \in V(\ell) \quad , \quad (x',p') \in V'(\ell)$$

s'énoncent respectivement

$$(12.2) \qquad p = \varphi_x \quad , \quad p' = \varphi'_{x'} \quad (\varphi_x = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x})$$

L'automorphisme s de $Z(\ell)$ a pour restriction à $V'(\ell)$ une application

$$(12.3) \qquad s : V'(\ell) \longrightarrow V(\ell) \quad ,$$

que nous noterons, en coordonnées locales,

$$x' \longrightarrow x(x') \quad .$$

Supposons $s \notin \Sigma(\ell)$, c'est-à-dire s du type s_A (n° 1) ; alors (12.2) s'explicite comme suit, vu (1.10) :

$$(12.4) \qquad \varphi_x = A_x(x,x') \quad , \quad \varphi'_{x'} = - A_{x'}(x,x') \quad ; \quad \text{où} \quad x = x(x') \quad ;$$

puisque $\text{dét}(A_{xx'}) = \text{dét}\, L \neq 0$, chacune des deux solutions (12.2) définit l'application $x' \longmapsto x(x')$.

Bien entendu, (12.3) donne, conformément à (12.1) :

$$\varphi(x) - \varphi'(x') = A(x,x')$$

c'est-à-dire

$$(12.5) \qquad \varphi(x) - \frac{1}{2} < p,x > = \varphi'(x') - \frac{1}{2} < p',x' > \quad , \quad \text{vu } (12.2) \quad .$$

Les deux définitions équivalentes (12.3) de l'application $x \longmapsto x(x')$ permettent de calculer deux expressions équivalentes que voici de son déterminant fonctionnel :

$$(12.6) \qquad \frac{d^\ell x}{d^\ell x'} = \frac{\text{Hess}_{x'}\,[\varphi'(x') + A(o,x')]}{\Delta^2(A)} = \frac{\Delta^2(A)}{\text{Hess}_x\,[\varphi(x) + A(x,o)]}$$

Ce calcul montre en outre ceci : <u>les deux hessiens figurant</u> dans (12.6) <u>ont le même indice d'inertie</u>.

$$(12.7) \qquad \text{Inert Hess}_{x'}\,[\varphi'(x') + A(o,x')] = \text{Inert Hess}_x\,[\varphi(x) + A(x,o)]$$

$$= \text{Inert}(s,\lambda'(x'),\lambda(x)) \quad ,$$

où $\lambda'(x')$ est la direction du ℓ-plan tangent à $V'(\ell)$ en x' ,

$\lambda(x)$ est la direction du ℓ-plan tangent à $V(\ell)$ en x ;

(12.8) $$s\lambda'(x') = \lambda(x) \quad \text{quand} \quad x = x(x') \quad .$$

13. UNE q-ORIENTATION DE $V(\ell)$ est une application continue

$$V_q(\ell) \to \Lambda_q(\ell)$$

dont la composée avec la projection naturelle

$$\Lambda_q(\ell) \to \Lambda(\ell) \quad .$$

est l'application $V(\ell) \to \Lambda(\ell)$ appliquant chaque point $z \in V(\ell)$ sur la direction $\lambda \in \Lambda(\ell)$ de son ℓ-plan tangent.

Soit $s_q \in Sp_q(\ell)$, de projection naturelle $s \in Sp(\ell)$. Puisque s_q opère sur $\Lambda_{2q}(\ell)$, s_q applique une 2q-orientation de $V'(\ell)$ sur une 2q-orientation de $V(\ell) = sV'(\ell)$.

Reprenons les formules (12.6) et (12.7) ; supposons $s \notin \Sigma(\ell)$, donc $s = s_A$; définissons, si Q est une forme quadratique de rang maximum,

(13.1) $$\arg \operatorname{Hess}(Q) = \pi \operatorname{Inert}(Q) \quad .$$

<u>L'argument du déterminant fonctionnel</u> $d^\ell x/d^\ell x'$ <u>peut être défini comme suit mod.</u>$2q\pi$, compte-tenu de (3.4) :

(13.2) $$\arg \frac{d^\ell x}{d^\ell x'} \equiv \pi\Big[\operatorname{Inert.} \operatorname{Hess}_{x'}[\varphi'(x') + A(o,x')] - m(s_q)\Big] \bmod. 2q\pi$$

$$\equiv \pi[\operatorname{Inert}(s,\lambda'(x'),\lambda(x)) - m(s_q)] \bmod. 2q\pi$$

$$\equiv \pi[m(X^*{}_{2q},\lambda'{}_{2q}(x')) - m(X^*{}_{2q},\lambda_{2q}(x)] \bmod. 2q\pi \quad ;$$

cette dernière expression emploie (10.3), suppose $x = x(x')$ et note $\lambda'_{2q}(x')$ l'image dans $\Lambda_{2q}(\ell)$ du point d'abcisse x' de $V'(\ell)$ 2q-orientée ;

(13.3) $$\lambda_{2q}(x) = s_q \, \lambda'_{2q}(x')$$

est l'image dans $\Lambda_{2q}(\ell)$ du point d'abcisse x de $V(\ell)$ 2q-orientée.

<u>Note</u>.- Le § 6 emploiera pour $q = 2$ ce résultat, qui définit alors une déter-

mination de

$$\sqrt{\frac{d^{\ell}x}{d^{\ell}x'}} \quad .$$

§ 5. LES ESPACES q-SYMPLECTIQUES.

14. L'ESPACE Z_q ET SES REPÈRES. - Soit Z l'espace vectoriel symplectique de dimension 2ℓ , c'est-à-dire $\mathbb{R}^{2\ell}$ muni d'une forme bilinéaire alternée $[.,.]$ de rang maximum ; notons Z_q la donnée de Z et de $q \in \{1,2,\dots,\infty\}$; (nous ne définirons et n'utiliserons dans Z_q que des 2q-orientations).

Notons $\Lambda(Z)$ la grassmannienne lagrangienne de Z , c'est-à-dire l'ensemble de ses ℓ-sous-espaces lagrangiens ; soit $\Lambda_{2q}(Z)$ son revêtement connexe à 2q feuillets ; q est un entier ≥ 1 donné.

Notons $X = \mathbb{R}^{\ell}$, X^* son dual ; soit $Z(\ell)$ l'espace symplectique défini par $X \oplus X^*$ et la forme valant

$$[z,z'] = < p,x' > - < p',x >$$

pour $\qquad z = x+p \ , \ z' = x'+p' \ , \ x \text{ et } x' \in X \ , \ p \text{ et } p' \in X^*$.

Soit $\Lambda(\ell)$ la grassmannienne lagrangienne de $Z(\ell)$. $Sp(\ell)$ est un groupe d'automorphismes de $Z(\ell)$; il induit un groupe d'homéomorphismes de $\Lambda(\ell)$; $Sp_q(\ell)$ induit un groupe d'homéomorphismes de $\Lambda_{2q}(\ell)$.

Un q-<u>repère</u> R de Z_q est constitué par :

- un isomorphisme $j_R : Z \rightarrow Z(\ell)$, compatible avec la structure symplectique ;
- un homéomorphisme $h_R : \Lambda_{2q}(Z) \rightarrow \Lambda_{2q}(\ell)$ ayant pour projection naturelle l'homéomorphisme $\Lambda(Z) \rightarrow \Lambda(\ell)$ induit par j_R .

Soient deux repères de Z_q ;

$$R = j_R \times h_R \quad ; \quad R' = j_{R'} \times h_{R'} \quad .$$

Evidemment :

$$j_R \, j_{R'}^{-1} \in Sp(\ell) \quad ;$$

$$h_R\, h_{R'}^{-1} \;:\; \Lambda_{2q}(\ell) \to \Lambda_{2q}(\ell)$$

a pour projection l'homéomorphisme $\Lambda(\ell) \longrightarrow \Lambda(\ell)$ induit par $j_R\, j_{R'}^{-1}$. Il est évident que l'homéomorphisme $h_R\, h_{R'}^{-1}$ est induit par un élément $s_R^{R'}$ de $Sp_q(\ell)$; cet élément est unique ; nous pouvons donc l'identifier à

$$R\, R'^{-1} = j_R\, j_{R'}^{-1} \times h_R\, h_{R'}^{-1} \quad ,$$

donc écrire :

(14.1) $$R = s_R^{R'}\, R' \quad , \quad \text{où} \quad s_R^{R'} \in Sp_q(\ell) \quad .$$

$s_R^{R'}$ est défini par la donnée de R et R' ; c'est <u>le changement de repères</u> ; évidemment :

$$s_R^{R'}\, s_{R'}^{R''}\, s_{R''}^{R} = E \quad ; \quad s_R^{R'} = E \ \text{ si et seulement si } \ R = R' \quad .$$

Nous écrirons désormais R pour j_R , h_R ou $j_R \times h_R$.

Un <u>automorphisme</u> s_q de Z_q est constitué par un automorphisme s de Z et un homéomorphisme de $\Lambda_{2q}(Z)$, dont la projection sur $\Lambda(Z)$ soit induit par s . Son image dans R et dans R' est $R s_q\, R^{-1} \in Sp_q(\ell)$, $R'\, s_q\, R'^{-1} \in Sp_q(\ell)$, liés par la relation

$$R\, s_q\, R^{-1} = s_R^{R'}\, R'\, s_q\, R'^{-1}\, s_{R'}^{R} \quad .$$

Le <u>groupe</u> $Sp_q(Z)$ <u>des automorphismes de</u> Z_q est donc isomorphe à $Sp_q(\ell)$; chaque repère R' définit un isomorphisme $R' : Sp_q(Z) \longrightarrow Sp_q(\ell)$; $s_R^{R'}$ le transforme en $R : Sp_q(Z) \longrightarrow Sp_q(\ell)$.

La notion <u>d'inertie</u> et celle <u>d'indice de Maslov mod</u>. q ont évidemment, sur Z_q , un sens invariant par $Sp_q(Z)$, puisque dans chaque repère elles ont un sens indépendant du choix de ce repère.

15. VARIÉTÉ LAGRANGIENNE de Z_q .- Dans l'espace q-symplectique Z_q , les notions suivantes on évidemment un sens : variété lagrangienne V ; 2q-orientation de V .

Tout q-repère R définit, à une constante additive près, sur le revêtement universel $\check{V}$ de $V^{\cdot}$, une <u>phase</u> $\varphi_R : \check{V} \to R$ par la relation

(15.1) $$d\varphi_R = \langle p, dx \rangle \quad , \quad \text{où} \quad Rz = x+p \quad , \quad x \in X \; , \quad p \in X^* \; .$$

Vu (12.5)

(15.2) $$\varphi(z) = \varphi_R(z) - \frac{1}{2} \langle p, x \rangle$$

est la valeur d'une fonction $\varphi : \check{V} \to R$, indépendante de R , définie par

(15.3) $$d\varphi = \frac{1}{2} [z, dz] \; .$$

Evidemment, x est une coordonnée locale de V au voisinage de tout point z de V tel que $\lambda(z)$ soit transverse à $R^{-1} X^*$; nous noterons $V \setminus \Sigma_R$ l'ensemble de ces points z ; Σ_R ne dépend que de $R^{-1} X^*$; Σ_R est <u>le contour apparent</u> de V relativement à R ou, plus précisément, à $R^{-1} X^*$. Soient x et x' les coordonnées locales définies au voisinage de $z \in V \setminus \Sigma_R \cup \Sigma_{R'}$ par R et R' ; soit $d^\ell x \,/\, d^\ell x'$ le déterminant fonctionnel de la bijection $x' \longmapsto x(x')$; la formule (12.6) donne une expression de $d^\ell x \,/\, d^\ell x'$; la formule (13.2) définit son argument mod. $2q\pi$.

Voici l'une des expressions de cet argument : soit $\lambda_{2q}(z)$ la direction en z du plan tangent à la variété V munie d'une $2q$-orientation ; soit $X^*_{2q} \subset \Lambda_{2q}(\ell)$, de projection X^* sur $\Lambda(\ell)$; notons

(15.4) $$m_R(z) = m(R^{-1} X^*_{2q} \, , \, \lambda_{2q}) \; ;$$

alors

(15.5) $$\arg \frac{d^\ell x}{d^\ell x'} \equiv \pi \, [m_{R'}(z) - m_R(z)] \mod. 2q\pi \; .$$

La valeur de m_R dépend du choix de la $2q$-orientation de V et du choix de X^*_{2q} ; mais la valeur de $m_{R'} - m_R$ en est indépendante.

<u>Note</u>.- La formule (15.5) est compatible avec la définition suivante :

(15.6) $$\arg.\, d^\ell x \equiv - \pi \, m_R(z) \mod. 2q\pi \; .$$

§ 6. SOLUTIONS LAGRANGIENNES ET ASYMPTOTIQUES.

Nous supposerons désormais $q = 2$. Rappelons (§ 1) que $Sp_2(\ell)$ est un groupe d'automorphismes S de $\mathcal{S}(X)$, $\mathcal{H}(X)$, $\mathcal{S}'(X)$, unitaires sur $\mathcal{H}(X)$.

La projection naturelle de S sur $Sp(\ell)$ est notée s .

16. FONCTIONS LAGRANGIENNES. - Donnons-nous dans l'espace symplectique Z_2 une variété lagrangienne lisse V de phase φ :

$$d\varphi = \frac{1}{2}[z,dz] \quad .$$

Soit R' un 2-repère de Z_2 ; définissons

$$\varphi_{R'} : \check{V} \to \mathbb{R} \quad \text{par} \quad \varphi_{R'}(z) = \varphi(z) + \frac{1}{2} < p',x' > \quad ,$$

où $z \in V$, $R'z = x'+p'$, $x' \in X$, $p' \in X^*$; donc $d\varphi_{R'}(z) = < p',dx' >$.

Notons $U_{R'}$ une fonction de $z \in V \setminus \Sigma_{R'}$, fonction formelle de $\nu \in i\dot{\mathbb{R}}$, du type :

$$U_{R'}(\nu,z) = \alpha_{R'}(\nu,z)\, e^{\nu\varphi_{R'}(z)} \tag{16.1}$$

où $\alpha_{R'}$ est la série formelle, à coefficients indéfiniment différentiables :

$$\alpha_{R'}(\nu,z) = \sum_j \nu^{-j}\, \alpha_{jR'}(z) \quad .$$

Soit R un autre 2-repère de Z_2 ; le changement de repère est

$$S_R^{R'} \in Sp_2(\ell) \quad .$$

Soit f' une fonction de (ν,x') admettant, pour ν tendant vers $i\infty$, le développement asymptotique

$$u'_{R'}(\nu,x') = \sum_{\{z \mid R'z \in x'+X^*\}} U_{R'}(\nu,z) \quad ; \tag{16.2}$$

$S_R^{R'} f'$ est une fonction f de (ν,x) ; la méthode de la phase stationnaire montre que f admet un développement asymptotique

$$u_R(\nu,x) = \sum_{\{z \mid Rz \in x+X^*\}} U_R(\nu,z)$$

où U_R est défini comme $U_{R'}$ l'est par (16.1) et est unique ; nous écrirons

(16.3) $$u_R = S_R^{R'} u_{R'} \quad , \quad U_R = S_R^{R'} U_{R'} \quad ;$$

$S_R^{R'}$ opère localement sur $u_{R'}$ et $U_{R'}$, en conservant le support de $U_{R'}$:

$$\mathrm{Supp}\, U_{R'} = \bigcup_j \mathrm{Supp}\, \alpha_{jR'} \subset V \quad .$$

Nous dirons que U_R et u_R sont des fonctions ν-formelles définies respectivement sur V et X ; u_R sera nommée : projection de U_R .

La donnée sur $V \setminus \Sigma_R$ pour chaque 2-repère R d'une fonction ν-formelle U_R telle que

(16.4) $$U_R = S_R^{R'} U_{R'}$$

constituera une fonction lagrangienne $U = \{U_R\}$ définie sur V ; U_R sera son expression dans le repère R et u_R sa projection sur X dans ce repère.

L'allure au voisinage de Σ_R de l'expression U_R de U peut être précisée : au voisinage d'un point z de Σ_R n'appartenant pas à $\Sigma_{R'}$ on calcule

$$U_R = S_R^{R'} U_{R'}$$

au moyen de $U_{R'}$ par la méthode de la phase stationnaire ; elle introduit l'indice d'inertie d'un hessien ; cet indice s'identifie à

$$\mathrm{Inert}\,(S_R^{R'} \quad , \quad R\lambda_4 \quad , \quad R'\lambda_4) \quad ,$$

λ_4 étant le plan tangent à $\check{V}$ en z ; plus précisément, vu (3.4), cette méthode introduit

$$\mathrm{Inert}\,(S_R^{R'} \quad , \quad R\lambda_4 \quad , \quad R\lambda_4) - m(S_R^{R'}) \quad \mathrm{mod.}\ 4$$

c'est-à-dire, vu (10.3) et la définition (15.5), où $q = 2$,

$$\arg \sqrt{\frac{d^\ell x}{d^\ell x'}} \quad \mathrm{mod.}\ 2\pi \quad .$$

On obtient ainsi la structure des expressions U_R des fonctions lagrangiennes U :

(16.5) $$U_R(\nu,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} \frac{\eta}{d^\ell x}\right)^{j+\frac{1}{2}} \beta_{Rj}(z)\, e^{\nu\varphi_R(z)} ,$$

où : η est une mesure régulière > 0 sur V ;

$\sqrt{d^\ell x}$ est une demi-mesure, définie sur $\check{V}$ par (15.6), où $q = 2$;

les β_{Rj} sont des fonctions $\check{V} \to \mathbb{C}$, indéfiniment différentiables ;

β_{R0} est indépendante de j et est notée β_0 .

Puisque $U_R(\nu,z)$ est une fonction ν-formelle sur $V \setminus \Sigma_R$, chacun des termes de (16.5) doit être une fonction définie (donc uniforme) sur $V \setminus \Sigma_R$; autrement dit :

(16.6) $$\beta_{Rj}\, e^{\nu\varphi + (j+\frac{1}{2})\pi i\, m_R} \text{ est uniforme sur } V \setminus \Sigma_R ;$$

si V est orientable (au sens enclidien) (16.6) s'énonce :

(16.7) $$\beta_{Rj}\, e^{\nu\varphi + \frac{\pi}{2} i\, m_R} \text{ est uniforme sur } V \setminus \Sigma_R .$$

17. OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS. - Soit a^o une fonction ν-formelle , définie sur Z et de phase nulle :

(17.1) $$a^o(\nu,z) = \sum_j \nu^{-j}\, a^o{}_j(z) \quad \text{(série formelle)} .$$

Soit R un repère de Z ; notons $a^o{}_R$ la fonction ν-formelle définie sur $Z(\ell)$ par

(17.2) $$a^o{}_R(\nu,x,p) = a^o(\nu,R^{-1}(x+p)) ;$$

donc

(17.3) $$a^o{}_R = a^o{}_{R'} \circ s^R_{R'} ;$$

soit

$$a_R^+(\nu,x,p) = e^{\frac{1}{2\nu} < \frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial p} >} a^o(\nu,x,p) \quad ;$$

si a^o est un polynome en (ν^{-1},x,p) , alors $a_R = a_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})$ est un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux ; l'application (§2, n° 4)

$$a^o \longmapsto a_R = a_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})$$

se prolonge par complétion en une application de l'ensemble des a^o sur un ensemble d'opérateurs $a_R = a_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})$; a_R est un endomorphisme de l'ensemble des u_R et de l'ensemble des U_R ; a_R opère localement :

$$\text{Supp } u_R \subset \text{Supp } a_R\, u_R \quad ; \quad \text{Supp } U_R \subset \text{Supp } a_R\, U_R \quad .$$

a_R est le transformé de $a_{R'}$ par $S_R^{R'}$:

$$a_R = S_R^{R'}\, a_{R'}\, S_{R'}^R \quad ; \tag{17.4}$$

donc $$a_R\, U_R = S_R^{R'}(a_{R'}\, U_{R'}) \quad \text{si} \quad U_R = S_R^{R'}\, U_{R'} \quad .$$

Etant donnée une fonction lagrangienne, $U = \{U_R\}$, il existe donc une fonction lagrangienne $aU = \{a_R\, U_R\}$.

L'opérateur

$$a = \{a_R\} : U \longrightarrow a\,U \tag{17.5}$$

est nommé <u>opérateur pseudo-différentiel</u> de Z ; a_R est son expression dans le repère R .

$a\,U$ ne dépend que de U , qui est défini sur V , et du germe de a^o sur V , c'est-à-dire des valeurs sur V de a^o et de toutes ses dérivées.

Nous nommerons <u>solution lagrangienne</u> de l'équation pseudo-différentielle

$$a\,u = 0$$

toute fonction lagrangienne U vérifiant cette équation ; en général cette solution n'existera que pour certaines valeurs particulières de ν .

Note.- Un cas important, où a est self-adjoint, est le suivant :

a^o est indépendant de ν, est à valeurs réelles et

(17.6) $$< \frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial p} > a^o(x,p) = 0 \quad , \quad (\text{donc } a^+ = a^o) \quad .$$

18. SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES. - Soit, sur X, un opérateur différentiel $a_R(\nu,x,\frac{1}{\nu} , \frac{\partial}{\partial x})$; il est évidemment l'expression dans R d'un opérateur pseudo-différentiel de Z unique : a.

Soit $u_R(\nu,x)$ une solution asymptotique de l'équation

(18.1) $$a_R(\nu,s,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})\, u_R(\nu,x) = 0 \quad ;$$

c'est, par définition, une fonction ν-formelle sur X vérifiant (18.1). Un calcul classique donne la phase φ_R de u_R par résolution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre [c'est-à-dire par construction d'une variété lagrangienne V de $Z(\ell)$ appartenant à une hypersurface donnée de $Z(\ell)$] et l'amplitude α_R de u_R par intégrations le long des caractéristiques de cette équation : u_R est la projection d'une solution ν-formelle U_R sur $V \setminus \Sigma_R$ de l'équation

(18.2) $$a_R\, U_R = 0 \quad .$$

La théorie précédente montre que localement, de chaque côté de Σ_R, U_R a la structure (16.5), β_{Rj} pouvant donc faire un saut à la traversée de Σ_R ; en général U_R est indéterminé.

On lève cette indétermination en imposant à U_R d'avoir la structure (16.5) qui implique (16.6) ou (16.7) ; c'est imposer à U_R d'être l'expression dans R d'une fonction lagrangienne sur V, U, qui est évidemment solution lagrangienne de l'équation

(18.3) $$a\, U = 0 \quad .$$

On peut dire que c'est imposer à U_R de vérifier, en un certain sens, (18.1) même sur Σ_R.

C'est la condition que Maslov impose aux solutions asymptotiques(sans la justifier, puisqu'il n'emploie pas la notion d'opérateur pseudo-différentiel).

Note.- Dans le cas particulier ou a^o vérifie (17.6), β_o est constant et cette condition s'énonce

(18.4) $$e^{\nu\varphi + \frac{\pi}{2} i\, m_R} \text{ et les } \beta_{Rj} \text{ sont uniformes sur } V .$$

19. LES APPLICATIONS DE CETTE THÉORIE semblent limitées à des équations très particulières. Voir [7].

L'une d'elles est l'équation relativiste stationnaire de Schrödinger, avec champ magnétique non nul ; cette équation vérifie (17.6). Elle dépend d'un paramètre : "l'énergie" ; l'ensemble des valeurs de l'énergie pour lesquelles elle possède une solution, d'ailleurs unique, est "le spectre". Ce spectre se trouve être rigoureusement le même, qu'on impose aux solutions d'être des fonctions de carré sommable ou d'être des solutions asymptotiques, c'est-à-dire des fonctions ν-formelles (ici, $\nu = \frac{i}{\hbar}$ où $2\pi\hbar$ = constante de Planck).

C'est également vrai de l'équation de Dirac.

Le spectre est repéré par des entiers : les nombres quantiques ; c'est seulement quand ces nombres sont grands que la solution fonction de carré sommable est approchée par la solution asymptotique. Celle-ci est toujours définie en première approximation par une trajectoire et une densité d'électrons relativistes. La notion de solution asymptotique donne donc une formalisation de la première théorie des quanta qui diffère de la mécanique ondulatoire, qui emploie cependant les équations de Schrödinger et de Dirac sans altérer leurs spectres.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LERAY, J. Solutions asymtotiques des équations aux dérivées partielles ; (une adaptation du traité de V.P. Maslov). Convegno internaziole Metodi valutativi nelle fisicamatematica ; Accad. Naz. dei Lincei, Roma, 1972 (sous presse).

[2] LERAY, J. Complément à la théorie d'Arnold de l'indice de Maslov. Convegno di Geometrica simplettica e Fisica matematica, Istituto di Alta Matematica, Roma, 1973 (sous presse).

[3] MASLOV, V.P. Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques (M.G.U., Moscou, 1965).
ARNOLD, V.I. Une classe caractéristique intervenant dans les conditions de quantification, Analyse fonctionnelle (en russe), 1 (1967) 1-14.
BOUSLAEV, V.C. Intégrale génératrice et opérateur canonique de Maslov par la méthode W.K.B.
Traduits par LASCOUX, J. et SENEOR, R. (Dunod 1972)

[4] SEGAL, I.E. Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom (I). Mat-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 31, n° 12 (1959) 1-39.

[5] SHALE, D. Linear symmetrics of free boson fields, Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962), 149-167.

[6] WEIL, A. Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta math. 111 (1964) 143-211.

En préparation

[7] LERAY, J. Exposé au Colloque d'Aix en Provence, Géométrie symplectique et physique mathématique (Juin 1974).