Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Marie-Françoise Bidaut

Projection sur des ensembles fermés non convexes dans les espaces de Banach

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1973-1974), exp. n° 3, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1974___2_A3_0>

PROJECTION SUR DES ENSEMBLES FERMÉS NON CONVEXES DANS LES ESPACES DE BANACH

par

Melle Marie-Françoise BIDAUT

(Le texte ci-dessous est extrait des Théorèmes d'existence et d'existence "en général" pour des problèmes de contrôle optimal)

Analyse Numérique et Fonctionnelle
UNIVERSITÉ PARIS VI
et C.N.R.S.

THÉORÈMES DE PERTURBATION

Nous donnons ici quelques compléments aux résultats d'Asplund [1], Stetchkine [1], Edelstein [1] [2], Baranger [1].

THEORÈME 2.1. - Soit X un espace de Banach S.D.S. (strong differentiability space). Soit M un sous-espace fermé de X de codimension finie m. Soit F une application de X' dans $\bar{R}$, s.c.i. (pour la topologie forte), telle que, pour tout x appartenant à un voisinage ouvert U de 0 dans X,

$$\inf_{y \in X'} (F(y) - \langle x,y \rangle) > -\infty \ .$$

Alors il existe un sous ensemble D_M, G_δ dense dans $U \cap M$, tel que, pour tout $x \in D_M$, il existe $y(x) \in X'$ vérifiant

$$F(y(x)) - \langle x,y(x) \rangle = \inf_{y \in X'} (F(y) - \langle x,y \rangle) \ ;$$

et l'ensemble des $y(x)$ est contenu dans une variété linéaire de dimension

$$m : y(x)_{/M}$$

est unique, toute suite minimisante y_n est telle que $y_{n/M}$ converge fortement dans M' vers $y(x)_{/M}$, et l'application $x \to y(x)_{/M}$ est continue sur D_M.

REMARQUE 2.1. - Ce résultat complète celui d'Asplund [1] relatif au cas où $m = 0$.

DÉMONSTRATION. - Soit F^* la fonction polaire de F , définie sur X par

$$F^*(x) = \sup_{y \in X'} (< x,y > - F(y))$$

La restriction de F^* à M (sous espace fermé de X de codimension finie, donc encore S.D.S.) est convexe, continue sur $U \cap M$, donc Fréchet-différentiable sur un sous-ensemble D_M , G_δ dense dans $U \cap M$ et l'application $x \to \nabla F^*(x)$ (différentielle de F^* en x) est continue de D_M dans M' .

Soit $x \in D_M$ et soit y_n une suite minimisante quelconque : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n(\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geqq n(\varepsilon)$,

$$F(y_n) - < x,y_n > \leqq - F^*(x) + \varepsilon \tag{2}$$

d'où, pour tout $z \in M$

$$F^*(z) \geqq < z,y_n > - F(y_n) \geqq F^*(x) + < z-x,y_n > - \varepsilon$$

Posons $y'_n = y_{n/M}$. Donc $y'_n \in \partial_\varepsilon F^*(x)$.

Il en résulte que y'_n converge fortement vers $\nabla F^*(x)$ dans M' , d'après d'Asplund et Rockafellar [1] (*)

Et d'après (2), $F(y_n)$ est borné.

Désignons par N un supplémentaire (topplogique) de M . Alors $X' = N^\perp + M^\perp$ et, identifiant M' et $N^\perp$,

$$y_n = y'_n + y''_n \quad \text{avec} \quad y''_n \in M^\perp$$

Or par hypothèse $\inf_{y \in X'} (F(y) - < z,y >) > - \infty \quad \forall z \in U$

L'espace N étant de dimension finie, ceci entraine (en prenant

$$z = e_i \ , \ (e_i)_{i = 1,.,m}$$

étant une base de N) : $\exists\, \alpha \in R$, $\exists\, \beta > 0$, tels que

$$F(y' + y'') \geqq \alpha + \beta \|y''\|_M \ , \ \forall y' \in N^\perp , \ \forall y'' \in M^\perp ,$$

(*) L'introduction du sous différentiel à ε près, permettant de simplifier quelque peu la démonstration donnée dans Bidaut [3] m'a été suggérée par Raoul Robert [1].

donc y''_n est borné, dans $M^\perp$ de dimension finie.

Nous pouvons extraire une suite y''_ν convergeant vers $y'' \in M^\perp$. D'où

$$y_\nu \to y(x) = \nabla F^*(x) + y'' \in \nabla F^*(x) + M^\perp .$$

Et par passage à la limite dans (1),

$$F(y(x)) - \langle x,y(x)\rangle = \inf_{y \in X} (F(y) - \langle x,y\rangle) .$$

REMARQUE 2.2. - Le Théorème 2.1. permet de préciser dans le théorème 1.1 (res.1.2) la structure de l'ensemble de tous les $w \in L^{q'}(B,Z'_2)$ (resp. $\sigma \in L^{s'}(B,E')$) pour lesquels J_w (resp. J_σ) atteint sa borne inférieure : son intersection avec toute variété linéaire de codimension finie est un ensemble gras (i.e. contient un ensemble G_δ dense).

Du théorème 2.1, résulte aisément le

COROLLAIRE 2.1. - Soit X un espace de Hilbert. Soient S un fermé (m.m. : un fermé borné) de X , et F une application de S dans $\bar{R}$, s.c.i. minorée (m.m. : s.c.s. majorée).

Soit M une variété linéaire fermée de X , de codimension finie m . Alors il existe un sous-ensemble D_M , G_δ dense dans M , tel que pour tout $x \in D_M$ il existe $s(x) \in S$ vérifiant

$$F(s(x)) + \|x-s(x)\|^2 = \inf_{s \in S} (F(s) + \|x-s\|^2) \quad (\text{m.m : } = \sup) .$$

L'ensemble des $s(x)$ est contenu dans une variété linéaire de dimension m (de direction orthogonale à celle de M) : $\mathrm{proj}_M\, s(x)$ est unique, toute suite minimisante s_n est telle que $\mathrm{proj}_M\, s_n$ converge fortement vers $\mathrm{proj}_M\, s(x)$, et l'application $x \to \mathrm{proj}_M\, s(x)$ est continue sur D_M .

Ce corollaire admet les extensions suivantes :

THÉORÈME 2.2. - (borne supérieure) Soit X un espace de Banach reflexif, ayant la propriété des suites (i.e. si $x_n \in X$ converge faiblement vers $x \in X$ et $\|x_n\| \to \|x\|$, alors x_n converge fortement vers x) . Soit S un fermé borné de X , et F une application de S dans $\bar{R}$, s.c.s. majorée.

Soit $p \in [1 + \infty[$. Soit M une variété linéaire fermée de X , de codimension finie m . Alors il existe un sous-ensemble D_M , G_δ dense dans M , tel que pour tout $x \in D_M$ il existe $s(x) \in S$ vérifiant

$$F(s(x)) + \|x-s(x)\|^p = \sup_{s \in S} (F(s) + \|x-s\|^p)$$

Si $p > 1$, $m = 0$ et X est strictement convexe, $s(x)$ est unique, toute suite maximisante converge fortement et l'application $x \to s(x)$ est continue sur D_M.

REMARQUE 2.3. - Nous donnerons au cours de la démonstration la structure de l'ensemble des $s(x)$ (pour tous p et m) ainsi obtenus. Signalons que ce théorème peut s'étendre aisément à des fonctions de la norme plus générales que $\xi \to \xi^p$, vérifiant les hypothèses données dans Baranger et Temam [1].

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. - L'espace X est réflexif, donc S.D.S. d'après Troyanski [1].

Nous pouvons supposer $F \not\equiv -\infty$, et par translation $0 \in M$. Soit f l'application définie sur X par $f(x) = \sup_{S \in S} (F(s) + \|x-s\|^p)$. La restriction de f à M (espace S.D.S.) est partout définie, convexe, s.c.i. sur M, donc continue sur M, donc Fréchet différentiable sur un sous-ensemble D_M, G_δ dense dans M, et l'application $x \to \nabla f(x)$ est continue de D_M dans M'.

Soit s_n une suite minimisante quelconque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n \geq n(\varepsilon)$.

$$F(s_n) + \|x-s_n\|^p \geq f(x) - \varepsilon$$

d'où pour tout $z \in M$

$$f(z) \geqq F(s_n) + \|z-s_n\|^p \geq f(x) + \|z-s_n\|^p - \|x-s_n\|^p + \varepsilon$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $z_n \in X'$ tel que $\|z_n\| = 1$.

(3) $$\|x-s_n\| = < x-s_n , z_n >$$

d'où, pour tout $z \in M$,

$$f(z) \geq f(x) + < z-x,y_n > + \varepsilon$$

avec

(4) $$y_n = p\|x-s_n\|^{p-1} z_n$$

car pour tout $z \in X$

(5) $$\|z-s_n\|^p \geqq \|x-s_n\|^p + < z-x,y_n >$$

Désignons par N un supplémentaire (topologique) de M. Alors comme pour le théorème 2.1 , $y_n = y'_n + y''_n$, avec $y'_n \in M' = N^{\perp}$ et $y''_n \in M^{\perp}$, $y'_n \in \partial_\varepsilon f(x)$. Donc y'_n converge fortement vers $\nabla f(x)$.

Puisque $\|z_n\| = 1$ et S est borné, y_n est bornée. La projection sur $M^{\perp}$ étant continue, y''_n est bornée dans $M^{\perp}$; nous pouvons extraire y''_ν convergeant vers $y'' \in M^{\perp}$. Donc $y_\nu \to y = \nabla f(x) + y''$ dans X' . La suite s_ν est bornée, nous pouvons extraire s_μ convergeant faiblement vers $s = s(x) \in X$.

D'après (5)

$$\|x-s\|^p \geq \|x-s_\mu\|^p + < s_\mu - s, y_\mu > \geq \underline{\lim}\, \|x-s_\mu\|^p \geq \|x-s\|^p$$

d'où

$$\lim \|x-s_\mu\|^p = \|x-s\|^p$$

et

$$\lim \|x-s_\mu\| = \|x-s\|$$

L'espace X ayant la propriété des suites, il en résulte que s_μ converge fortement vers s (donc $s \in S$) et

$$f(x) = \lim(F(s_\mu) + \|x-s_\mu\|^p) \geq \underline{\lim}(F(s_\mu) + \|x-s\|^p) \geq F(s) + \|x-s\|$$

donc s réalise la borne supérieure.

Nous pouvons préciser la structure de l'ensemble des $s(x)$ ainsi obtenus : d'après (3) et (4)

$$< x-s(x), y > = \|x-s(x)\| \; \|y\|$$

et

$$\|y\| = p\|x-s(x)\|^{p-1}$$

Désignons par J la multiapplication de dualité de X' dans X .

Alors $s(x) \in x - \lambda\, J(y)$, avec $y \in \nabla f(x) + M^{\perp}$

et - si $p = 1$ $\lambda > 0$ quelconque

- si $p > 1$ λ est fonction de y :

$$\lambda(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y = 0 \\ \dfrac{1}{\|y\|}\left(\dfrac{\|y\|}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \text{ si } y \neq 0 \end{cases}$$

En particulier, dans le cas où X est strictement convexe, (J est une application (continue)), et où $m = 0$,

- si $p = 1$ $s(x) = x - \lambda J(\nabla f(x))$ appartient à une demi-droite contenant x

- si $p > 1$ $s(x) = x - \lambda(\nabla f(x))J(\nabla f(x))$ est unique et l'application $x \to s(x)$ est continue sur $D_M = D_X$ (comme composée des applications continues ∇f et λJ) .

REMARQUE 2.4. - L'unicité résulte de la stricte convexité de l'application

$$\xi \to \xi^p \quad \text{pour} \quad p > 1 \quad .$$

Voir un contre-exemple pour $p = 1$ dans Bidaut [3].

REMARQUE 2.5. - Nous retrouvons le résultat du corollaire 2.1 : X étant un espace de Hilbert (identifié à son dual), et $p = 2$, $m \geqq 1$,

$$s(x) = x - \frac{\gamma}{2} \in (x - \frac{\nabla f(x)}{2}) + M''$$

donc $s(x)$ appartient à une variété linéaire de dimension m .

THÉORÈME 2.3. (borne inférieure) Soit X un espace de Banach uniformément convexe. Soit S un fermé borné de X et F une application de S dans $\bar{R}$, s.c.i. minorée, soit $p \geqq 1$. Alors il existe un sous-ensemble D, G_δ dense dans X , tel que pour tout $x \in D$, il existe $s(x) \in S$ vérifiant

$$F(s(x)) + \|x-s(x)\|^p = \inf_{s \in S} (F(s) + \|x-s\|^p) \quad .$$

Si $p > 1$, $s(x)$ est unique, toute suite minimisante converge fortement, et l'application $x \to s(x)$ est continue sur D .

La démonstration de ce théorème reprend celle de Baranger [1] dans le cas $p = 1$ et se ramène au cas $F = 0$ en se plaçant dans $X \times R$ dans le cas $p > 1$ (voir Bidaut [3]).

REMARQUE 2.6. - Relativement à une variété linéaire fermée de X , de codimension $m \geqq 1$ nous n'avons jusqu'à présent obtenu de résultat analogue à celui du théorème 2.3 que dans le cas $p = 1$, $m = 1$, ou dans le cas d'un espace de Hilbert, $p = 2$, $m \geqq 1$ (corollaire 2.1). Par ailleurs, nous ignorons si le théorème peut s'étendre à des fonctions plus générales de la norme.

Enfin le théorème 2.3 est-il valable dans un espace réflexif ayant la propriété des suites? Nous indiquons en appendice un résultat positif en ce sens : le théorème d'Edelstein [2] est valable dans l'espace $X = V \times R^m$, où V est uniformément convexe, R^m est muni d'une norme quelconque, et X est normé par

$$\|(v,\xi)\|_X = \|v\|_V + \|\xi\|_{R^m} \quad .$$

Nous constatons que X n'est même pas strictement convexe, mais est réflexif et a la propriété des suites. Par contre Edelstein [3] a donné un contre exemple (avec $m = 1$) dans le cas où X est normé par $|||(v,\xi)||| = \sup(\|v\|_{V'},|\xi|)$. Observons que cet espace est réflexif mais n'a pas la propriété des suites.

REMARQUE 2.7 . - Le Théorème 2.3. permet de donner des résultats d'existence "en général" analogues à ceux du théorème 1.1(resp. 1.2), relatifs à des fonctions "coût" du type

$$J_\xi(y,v) = J(y,v) + \|f(y,v) - \xi\|^p$$

$$= \int^* y(y,v) + \gamma(y) + \|f(y,v) - \xi\|^p$$

avec $p \geqq 1$, $\xi \in L^q(B,Z_2)$

(resp. $J_\zeta(y,v) = J(y,v) + \|v-\zeta\|_E^p$ avec $p \geqq 1$, $\zeta \in L^S(B,E)$)

sous des hypothèses convenables sur Z_2 et E .

APPENDICE. -

PROPOSITION. - <u>Soit</u> V <u>un espace de Banach uniformément convexe. Soit</u> X , $V \times \mathbb{R}^m$, <u>où</u> $\mathbb{R}^m$ <u>est muni d'une norme quelconque, et</u> X <u>est normé par</u> $\|x\|_X = \|v\|_V + \|\xi\|_{\mathbb{R}^m}$ <u>pour tout</u> $x = (v,\xi)$.

<u>Soit</u> S <u>un fermé de</u> X . <u>Alors il existe un sous-ensemble</u> D , <u>dense dans</u> X , <u>tel que pour tout</u> $x \in D$ <u>il existe</u> $s \in S$ <u>vérifiant</u>

$$\|x-s\| = \inf_{s' \in S} \|x-s'\| \quad ; \quad (\text{i.e. : } x \text{ se projette sur } S)$$

DEMONSTRATION. - Nous allons démontrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^m$, il existe D_ξ , G_δ dense dans la variété linéaire H_ξ parallèle à V contenant ξ , tel que tout point D_ξ se projette sur S ; d'où résulte aussitôt la proposition. Soit $\xi \in \mathbb{R}^m$. Soit S_V la projection de S sur V :

$$S_V = \{\sigma \in V | \exists\, \eta \in \mathbb{R}^m \ , \ (\sigma,\eta) \in S\} \ ;$$

et pour tout $\sigma \in S_V$, soit S_σ la "section de S par σ" :

$$S_\sigma = \{\eta \in \mathbb{R}^m | (\sigma,\eta) \in S\} \ .$$

Donc S_V et S_σ sont fermés.

Soit F l'application définie sur S_V par :

$$F(\sigma) = \inf_{\eta \in S_\sigma} \|\eta-\xi\|_{\mathbb{R}^m}$$

Alors F est définie par un minimum : soit $\eta_n \in S_\sigma$ une suite minimisante

$$\|\eta_n-\xi\|_{\mathbb{R}^m} \to F(\sigma) \quad ,$$

donc η_n est bornée dans $\mathbb{R}^m$, nous pouvons extraire $n_\nu \to \eta$ dans $\mathbb{R}^m$. Donc

$$(\sigma,\eta_\nu) \to (\sigma,\eta) \quad \text{dans } X \quad , \quad \text{et} \quad (\sigma,\eta) \in S \ , \ \|\eta_\nu-\xi\|_{\mathbb{R}^m} \to \|\eta-\xi\|_{\mathbb{R}^m} \ .$$

d'où $F_\sigma = \|\eta-\xi\|_{\mathbb{R}^m}$. De plus F est <u>s.c.i. pour la topologie forte de</u> V : soient $r \in \mathbb{R}$, et $\sigma_n \in V$ tels que $F(\sigma_n) \leqq r$ et $\sigma_n \to \sigma$ dans V . Il existe donc η_n tel que

$$\eta_n \in S_{\sigma_n} \quad \text{et} \quad r \geqq F(\sigma_n) = \|\eta_n-\xi\|_{\mathbb{R}^m}$$

Donc η_n est bornée dans $\mathbb{R}^m$, nous extrayons $\eta_\nu \to \eta$ dans $\mathbb{R}^m$. D'où

$$(\sigma_\nu,\eta_\nu) \to (\sigma,\eta) \quad \text{dans } X \quad , \quad \text{donc} \quad (\sigma,\eta) \in S \quad , \quad \text{et} \quad \|\eta_\nu-\xi\|_{\mathbb{R}^m} \to \|\eta-\xi\|_{\mathbb{R}^m} \ .$$

D'où $r \geqq \|\eta-\xi\|_{\mathbb{R}^m}$.

Appliquons le théorème 2.3. : l'espace V est uniformément convexe, donc il existe D_V , G_δ dense dans V , tel que, pour tout $v \in D_V$, il existe $\sigma \in S_V$ tel que

$$\|v-\sigma\|_V + F(\sigma) \ \inf_{\sigma' \in S_V} (\|v-\sigma'\|_V + F(\sigma'))$$

donc pour tout $(\sigma',\eta') \in S$

$$\|v-\sigma\|_V + F(\sigma) \leqq \|v-\sigma'\|_V + \|\eta'-\xi\|_{\mathbb{R}^m}$$

et puisque F est définie par un minimum, il existe $\eta \in S_\sigma$ (donc $(\sigma,\eta) \in S$) tel que

$$\|v-\sigma\|_V + \|\eta-\xi\|_{\mathbb{R}^m} = \inf_{(\sigma',\eta') \in S} (\|v-\sigma'\|_V + \|\eta'-\xi\|_{\mathbb{R}^m})$$

D'où pour tout $x = (v,\xi) \in D_\xi = \{(v,\xi) | v \in D_V\}$, il existe $s = (\sigma,\eta) \in S$ tel que

$$\|x-s\|_X = \inf_{s' \in S} \|x-s'\|_X$$

BIBLIOGRAPHIE

E. ASPLUND [1] Frechet differentiability of convex functions. Acta Math. 121 (1968), p. 31-47.

E. ASPLUND et R-T. ROCKAFELLAR [1] Gradients of convex functions T.A.M.S. (1969), p. 443-467.

J. BARANGER [1] Théorèmes d'existence en densité et application au contrôle. Thèse, Grenoble (1972).

J. BARANGER et R. TEMAM [1] Un théorème d'existence en densité pour le problème $\sup_{x\in X}(\omega\|x-y\|-f(x))$ (novembre 1973).

Siam Journal of Contrôl (à paraitre).

M-F. BIDAUT [1] Quelques résultats d'existence pour des problèmes de contrôle optimal. C.R.A.S., 274(1972), p.62-65.

[2] Quelques résultats d'existence "en général" pour des problèmes de contrôle optimal. C.R.A.S., 277 (1973), p. 97-100.

[3] Théorèmes d'existence et d'existence "en général" d'un contrôle optimal pour des systèmes régis par des équations aux dérivées partielles non linéaires. Thèse, Paris (1973).

H. BREZIS [1] Problèmes unilatéraux. Thèse, Paris (1970).

[2] Perturbations non linéaires d'opérateurs maximaux monotones. C.R.A.S. 269 (1969), p. 566-569.

Ch. CASTAING [1] Sur la multiapplication mesurable. Thèse, Caen (1967)

[2] Une nouvelle extension du théorème de Dragoni-Scorza. C.R.A.S., 271 (1970),p. 396-398.

L. CESARI [1] Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints, I. T.A.M.S., 124 n° 3 (1966), p. 369-412.

[2] Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints, II. T.A.M.S., 124 n° 3 (1966), p. 413-430.

[3] Existence theorems for Abstract Multidimensimal Control Problems. J. of Opt. Th. and Appl., 6 n° 3 (1970), p. 210-236.

M-E. EDELSTEIN [1] Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces. Israel, J. of Math. 4 (1966), p. 171-176.

[2] On nearest points of sets in uniformly convex Banach spaces. J. London Math. Soc. 43 (1968), p. 375-377.

[3] A note on nearest points. Quart. J. Marh. Oxford (2), 21 (1970), p. 403-405.

I. EKELAND [1] Relaxation de problèmes de contrôle optimal pour des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles de type elliptique. Thèse, (1970)

J-L. LIONS [1] Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. (1969) Dunod.

R. ROBERT [1] Points de continuité de multiapplications semi-continues supérieurement. C.R.A.S. (à paraitre).

S-B. STETCHKINE [1] Caractérisation de l'approximation pour des sous-ensembles d'espaces vectoriels normés (en russe). Rev. Math. Pures et Appl. 8 (1963) p. 5-18.

S. TROYANSKI [1] On local uniform convexity and differentiable norms in certain non separable Banach Spaces. Studia Math. 37 (1971), 173-179.