

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

HAÏM BRÉZIS

Solutions à support compact d'inéquations variationnelles

Séminaire Jean Leray, n° 1 (1973-1974), exp. n° 3, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1974__1_A3_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS À SUPPORT COMPACT D'INÉQUATIONS VARIATIONNELLES

par Haïm BREZIS

Soit Ω un ouvert non borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière. Etant donnés f et ϕ , soit u la solution de l'équation

$$-\Delta u + u = f \text{ sur } \Omega, u = \phi \text{ sur } \partial\Omega.$$

On ne connaît pas d'hypothèses simples (sur f et ϕ) permettant de conclure que u est à support compact (dans $\bar{\Omega}$). Par contre, dans le cas des inéquations variationnelles, la situation est totalement différente. Considérons, par exemple, la solution u du problème.

$$(1) \text{ Min } \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\text{grad} u|^2 + \frac{1}{2} |u|^2 - fu \right) dx ; u \geq 0 \text{ sur } \Omega ; u = \phi \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

dont l'interprétation est :

$$u \geq 0 \text{ sur } \Omega, -\Delta u + u = f \text{ sur } [u > 0], f \leq 0 \text{ sur } [u = 0].$$

De sorte que s'il existe une solution à support compact; on voit apparaître les conditions nécessaires

$$(2) f(x) \leq 0 \text{ pour } |x| \text{ assez grand}$$

$$(3) \phi(x) = 0 \text{ pour } |x| \text{ assez grand}$$

Nous allons montrer que ces conditions sont "presque" suffisantes. En fait si ϕ vérifie (3) et si

(4) il existe $\varepsilon > 0$ et r_0 tels que $f(x) \leq -\varepsilon$ pour $|x| \geq r_0$, alors (1) admet une solution à support compact.

Plus généralement, soit L l'opérateur

$$L = - \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a$$

On suppose que

$$(5) a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), a_{ij}, a_i, a \in L^\infty(\Omega)$$

$$(6) \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha(r) |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |x| \leq r, \forall r \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \alpha(r) > 0 \quad \forall r,$$

$$(7) a(x) \geq \delta > 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Soit p un graphe maximal monotone de $\partial \chi_\Omega$; on pose $p(o) = [\gamma^-, \gamma^+]$.

Question Trouver des conditions sur f et ϕ qui assurent que la solution u du problème

$$(8) \quad \begin{cases} Lu + \alpha(u) \geq f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est à support compact.

Notons que cette formulation englobe le problème (1) ; il suffit de prendre $L = -\Delta + I$ et $\beta(r) = 0$ si $r > 0$, $\beta(0) =]-\infty, 0]$.

Ici aussi on voit apparaître les conditions nécessaires (3) et

$$(9) \quad f(x) \in [\gamma^-, \gamma^+] \text{ pour } |x| \text{ assez grand.}$$

Réciproquement, on a le

THEOREME 1. Soit $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$, φ à support compact, avec $\beta^0(\varphi) \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Soit $f \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ vérifiant

$$(10) \text{ il existe } \varepsilon > 0 \text{ et } r_0 \text{ tels que } f(x) \in [\gamma^- + \varepsilon, \gamma^+ - \varepsilon] \text{ pour } |x| \geq r_0.$$

Alors (8) admet une solution unique u , à support compact avec $u \in W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $p < +\infty$.

On en déduit aussitôt que sous les hypothèses (3) et (4), le problème (1) admet une solution à support compact.

Le corollaire suivant en découle aussi aisément

COROLLAIRE 1. Soit $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$, φ à support compact. Alors il existe une solution unique u à support compact, du problème

$$(11) \quad \text{Min} \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\text{grad} u|^2 + \frac{1}{2} |u|^2 + |u| \right) dx ; u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

En effet, il suffit d'appliquer le Théorème 1 avec $f = 0$, $L = -\Delta + I$ et $\beta(r) = +1$ si $r > 0$, $\beta(r) = -1$ si $r < 0$, $\beta(0) = [-1, +1]$.

Plus généralement, le problème

$$\text{Min} \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\text{grad} u|^2 + \frac{1}{2} |u|^2 \right) dx + \left(\int_{\Omega} |u| dx \right)^p ; u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

admet une solution à support compact. Il suffit d'appliquer le Théorème 1 avec $f = 0$, $L = -\Delta + I$ et $\beta(r) = +C$ si $r > 0$, $\beta(r) = -C$ si $r < 0$, $\beta(0) = [-C, +C]$ et $C = p \left(\int_{\Omega} |u| dx \right)^{p-1}$.

Remarque 1. La conclusion du Théorème 1 peut être comparée aux résultats obtenus par Auchmuty-Beals [1], Berkovitz - Pollard [2], R. Redheffer [4].

Principe de la démonstration du Théorème 1. On établit une estimation a priori sur le support de u en construisant une sur-solution et une sous-solution à supports compacts. Le problème de l'existence et de l'unicité se ramène alors

au cas du domaine borné pour lequel on a des résultats. Une sur-solution v est une fonction telle que

$$(12) \quad Lv + \beta(v) \geq g \quad \text{sur } \Omega \quad \text{avec } g \geq f \quad \text{sur } \Omega$$

$$(13) \quad v \geq \varphi \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Nous allons montrer que l'on peut fabriquer une fonction v de la forme $v(x) = G(|x|)$ où

$$G(r) = \begin{cases} -\frac{\lambda r^2}{2} + C & 0 \leq r \leq r_0 \\ \frac{\mu}{2}(r - R)^2 & r_0 \leq r \leq R \\ 0 & r \geq R \end{cases}$$

Les paramètres λ, μ, R, C sont à notre disposition. Exprimons d'abord la condition de contact au premier ordre en $r = r_0$.

$$(14) \quad -\frac{\lambda}{2} r_0^2 + C = \frac{\mu}{2} (r_0 - R)^2$$

$$(15) \quad -\lambda r_0 = \mu(r_0 - R)$$

Pour satisfaire (13), il suffit de supposer que

$$(16) \quad -\frac{\lambda}{2} r_0^2 + C \geq \max_{\partial\Omega} \varphi = N.$$

Distinguons 3 régions

$$\text{Région I} = \{x \in \Omega, \quad |x| \leq r_0\}$$

$$\text{Région II} = \{x \in \Omega, \quad r_0 \leq |x| \leq R\}$$

$$\text{Région III} = \{x \in \Omega, \quad |x| \geq R\}$$

Sur I, on a $v > 0$, donc $\beta(v) \geq \gamma^+$ et il suffit de choisir v vérifiant

$$(17) \quad Lv + \gamma^+ \geq \max_I f = M.$$

Sur II, on a encore $\beta(v) \geq \gamma^+$, mais comme $f \leq \gamma^+ - \epsilon$, il suffit de choisir v vérifiant

$$(18) \quad Lv \geq -\epsilon$$

Sur III, $v = 0$, $Lv = 0$ et (12) est satisfait avec $g = f$.

Les calculs déterminant λ, μ, R , et C étant assez fastidieux dans le cas général, nous nous limiterons au cas où $L = -\Delta + \delta I$. On a alors

$$Lv = -G'' - \frac{(n-1)}{r}G' + \delta G.$$

Sur I, il vient

$$Lv = n\lambda + \delta \left[-\frac{\lambda}{2}|x|^2 + C \right] \geq M - \gamma^+ \quad \text{pour } 0 \leq |x| \leq r_0 \\ \text{i.e.}$$

$$(19) \quad n\lambda + \delta \left[-\frac{\lambda}{2} r_0^2 + C \right] \geq M - \gamma^+ .$$

Sur II, il vient

$$Lv = -n\mu + (n-1)\mu \frac{R}{|x|} + \frac{\delta\mu}{2}(|x| - R)^2 \geq -\varepsilon \quad \text{pour } r_0 \leq |x| \leq R \\ \text{i.e.}$$

$$(20) \quad \mu \leq \varepsilon$$

On choisit alors $\mu = \varepsilon$ et R assez grand pour que

$$(21) \quad \frac{\varepsilon}{2} (R - r_0)^2 \geq N$$

$$(22) \quad n\varepsilon \left(-1 + \frac{R}{r_0} \right) + \frac{\delta\varepsilon}{2} (R - r_0)^2 \geq M - \gamma^+$$

Enfin, λ et C se déduisent des équations (15) et (14).

Remarque 2. L'Hypothèse (9) (condition nécessaire) n'est pas suffisante pour conclure que le support de u est compact. Même la condition $\gamma^- < f(x) < \gamma^+$ pour $|x| \geq r_0$, n'est pas suffisante. Par exemple $u(x) = e^{-kx}$ ($k > 1$) vérifie sur $\Omega = [0, +\infty[$ l'équation $-u'' + u + \beta(u) \geq (1 - k^2)e^{-kx}$ où $\beta(r) = 0, r > 0$, $\beta(0) =]-\infty, 0]$.

Néanmoins, si $\gamma^- < f(x) < \gamma^+$ pour $|x| \geq r_0$ et si $f(x)$ ne converge pas "trop rapidement" vers γ^+ ou γ^- quand $|x| \rightarrow +\infty$; alors u est encore à support compact. Plus précisément la conclusion du Théorème 1 est encore valable si l'on remplace l'hypothèse (10) par

$$(23) \quad \begin{cases} \forall w > 0 \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} e^{w|x|} (f(x) - \gamma^+) = -\infty \\ \forall w > 0 \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} e^{w|x|} (f(x) - \gamma^-) = +\infty . \end{cases}$$

Dans certains cas l'hypothèse (7) peut être affaiblie. Nous indiquons maintenant quelques résultats valables pour $L = -\Delta$.

Théorème 2. Soit $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$, φ à support compact avec $\beta^0(\varphi) \in L^\infty(\partial\Omega)$. Soit $f \in L_{loc}^\infty(\Omega)$ vérifiant

$$(24) \quad \begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^n (f(x) - \gamma^+) &< 0. \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^n (f(x) - \gamma^-) &> 0. \end{aligned}$$

Alors le problème

$$-\Delta u + \beta(u) \ni f \quad \text{sur } \Omega, \quad u = \varphi \quad \text{sur } \partial\Omega$$

admet une solution unique à support compact.

Pour la démonstration, cf. [3].

Remarque 3. L'hypothèse (24) est en quelque sorte optimale. En effet si $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $\beta(r) = 0$ $r > 0$, $\beta(0) =]-\infty, 0]$, alors pour tout $q > n$, il existe M et r_0 tels que le problème $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ sur $\mathbb{R}^n$

avec

$$f(x) = \begin{cases} M & |x| \leq r_0 \\ -\frac{1}{|x|^q} & |x| > r_0 \end{cases}$$

n'admette pas de solution à support compact.

Remarque 4. Les techniques précédentes peuvent être adaptées à certains problèmes d'évolution.

Ainsi, soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit u la solution du problème.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \beta(u) \ni f \ni & \text{sur } \Omega \times]0, +\infty[\\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

On suppose que $u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$ et que il existe $\varepsilon > 0$ et t_0 tels que $\gamma^- + \varepsilon \leq f(x, t) \leq \gamma^+ - \varepsilon$ pour $x \in \Omega$, $t \geq t_0$.

Alors il existe T tel que $u(x, t) = 0$ pour $x \in \Omega$, $t \geq T$.

On a même une variante abstraite de ce résultat. Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H .

On considère le problème

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f \quad \text{sur } [0, +\infty[, \quad u(0) = u_0.$$

On suppose qu'il existe t_0 et $\rho(t)$ tels que

$$B(f(t), \rho(t)) \subset A0 \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^{+\infty} \rho(s) ds = +\infty$$

Alors il existe T tel que $u(t) = 0$ pour $t \geq T$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. AUCHMUTY - R. BEALS, Variational solutions of some non linear free boundary value problems, Arch. Rat. Mech. Anal. 43 (1971) p. 255-271.
- [2] L. BERKOVITZ - H. POLLARD, A non classical variational problem arising from an optimal filter problem, Arch. Rat. Mech. Anal. 26 (1967) p. 281-304.
- [3] H. BREZIS (à paraître Uspekhi Mat. Nauk).
- [4] R. REDHEFFER, On a non linear functional of BERKOVITZ and POLLARD, Arch. Rat. Mech. Anal. 50 (1973) p. 1 - 9.