

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CLAUDE BARDOS

Comportement asymptotique de la solution d'un système hyperbolique

Séminaire Jean Leray, n° 1 (1973-1974), exp. n° 1, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1973-1974__1_A1_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SOLUTION
D'UN SYSTÈME HYPERBOLIQUE

par Claude BARDOS

On se place dans $\mathbb{R}^n$ (n impair) et on désigne par $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ n $p \times p$ matrices à coefficients complexes, constants. On notera $A \cdot \nabla$ l'opérateur différentiel $A \cdot \nabla = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. On suppose que l'opérateur $A \cdot \nabla$ est hyperbolique, c'est-à-dire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ les valeurs propres $\lambda_k(\xi)$ de la matrice $A \cdot \xi = \sum_{i=1}^n A_i \cdot \xi_i$ sont réelles. Le problème de Cauchy

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + A \cdot \nabla u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t, \quad u(\cdot, 0) = f(\cdot) \in S'(\mathbb{R}^n)$$

est alors bien posé et admet une unique solution que l'on notera $e^{-tA \cdot \nabla} f$.

On se propose d'étudier le comportement asymptotique de cette solution, principalement lorsque f est à support compact. Pour cela on fait les hypothèses suivantes :

(h.1) Les valeurs propres sont données par k fonction analytique ($1 \leq k \leq p$) (qui peuvent éventuellement coïncider en certains points de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)

(h.2) S'il existe $\xi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\lambda_k(\xi_0) = 0$ alors λ_k est identiquement nulle, ceci implique que la dimension du noyau de $A \cdot \xi$ est constante.

(h.3) Il existe une matrice $P(\omega)$ définie sur S^{n-1} , sphère unité de $\mathbb{R}^n$, analytique en ω , inversible, telle que l'on ait :

$$(2) \quad P(\omega) A \cdot \omega P^{-1}(\omega) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\omega) & & & 0 \\ & \lambda_2(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_p(\omega) \end{pmatrix}$$

[Dans la plupart des calculs il sera seulement nécessaire de supposer que les fonctions $\lambda_k(\cdot)$ et les matrices $p(\omega)$ appartiennent à $C^m(S^{n-1})$ (m assez grand) pour simplifier on prendra alors $\lambda_k(\cdot)$, $p(\cdot)$ dans $C^\infty(S^{n-1})$, mais un théorème d'ARTIN [1] permet alors d'affirmer que ces fonctions sont analytiques].

On dira qu'une distribution $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ est stationnaire si elle vérifie $A \cdot \nabla f = 0$, on dira qu'elle est non stationnaire si elle vérifie la relation

$$\langle f, A^* \nabla \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in (S(\mathbb{R}^n))^p.$$

Toute distribution f se décompose de manière unique en la somme d'une distribution stationnaire et d'une distribution non stationnaire $f = f_{\text{stat}} + f_{\text{non stat}}$. Comme on a $e^{-tA \cdot \nabla}(f_{\text{stat}}) = f_{\text{stat}}$, on se limitera à l'étude des distributions non stationnaires.

Les fonctions $\lambda_k(\xi)$ sont homogènes de degré 1, nous supposons que :

(h.4) Les fonctions $\xi \rightarrow \lambda_k(\xi)$ ($1 \leq k \leq p$, $\lambda_k \neq 0$) sont strictement convexes. Ainsi les surfaces

$$\partial \Lambda_k = \left\{ \frac{1}{\lambda_k(\omega)} \cdot \vec{\omega} \mid \omega \in S^{n-1} \right\} \quad (1 \leq k \leq p, \lambda_k \neq 0)$$

sont strictement convexes. La surface :

$$\bigcup_{\substack{0 \leq k \leq p \\ \lambda_k \neq 0}} \partial \Lambda_k$$

sera alors dite surface de lenteur.

∂W_k , polaire de la surface $\partial \Lambda_k$, enveloppe des hypersurfaces

$$\pi(\omega) = \{x \mid x \cdot \omega = \lambda_k(\omega)\},$$

est alors également strictement convexe, et on a les relations :

$$\max |\lambda_k(\omega)| = \max \{|\xi|, \xi \in \partial W_k\}$$

$$\min |\lambda_k(\omega)| = \min \{|\xi|, \xi \in \partial W_k\} \quad (\lambda_k \neq 0).$$

On désignera par ε et Λ les nombres :

$$\varepsilon = \inf_{\lambda_k \neq 0} \{|\lambda_k(\omega)|, \omega \in S^{n-1}\}$$

$$\Lambda = \max \{|\lambda_k(\omega)|, \omega \in S^{n-1}\}$$

Voici maintenant des Théorèmes :

THEOREME 1. On suppose que $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ est une distribution non stationnaire dont le support est contenu dans $B_R^{(1)}$, alors le support de $e^{-tA \cdot \nabla} f$ est contenu dans

$$\Sigma(t) = \{x \mid \varepsilon t - R < |x| < \Lambda t + R\}.$$

⁽¹⁾ $B_R = \{x \mid |x| < R\}.$

THEOREME 2. On suppose que f est une distribution non stationnaire dont le support singulier est $\{0\}$ alors le support singulier de la distribution $e^{-tA \cdot \nabla} f$ est contenu dans la surface $t(U \cap \partial W_k)$.

THEOREME 3. Il existe une constante C indépendante de f et de t , telle que pour tout $f \in [W^{1, (n+1)/2}(\mathbb{R}^n)]^p$ on ait

$$(3) \quad \|e^{-tA \cdot \nabla} f\|_{(L^\infty(\mathbb{R}^n))^p} \leq C t^{-(n-1)/2} \|f\|_{W^{1, (n+1)/2}}$$

THEOREME 4. On suppose que $f \in (L^1(\mathbb{R}^n))^p$ est une fonction non stationnaire à support contenu dans B_R . Soient $\theta, z \in \mathbb{R}^n$, $\theta \notin \bigcup_k \partial W_k$, alors il existe une constante dépendant de θ, z et R telle que l'on ait :

$$(4) \quad |(e^{-tA \cdot \nabla} f)(t\theta + z)| \leq C(R, \theta, z) t^{-n} \|f\|_{(L^1(\mathbb{R}^n))^p}.$$

Enfin nous supposons que les matrices A_i sont hermitiennes et que les valeurs propres sont indépendantes de ω (cf. opérateur de Maxwell par exemple). Comme $A \cdot \omega$ est une fonction impaire de ω , pour tout k , λ_k et $-\lambda_k$ sont des valeurs propres. Aussi on écrit $\mu_j = |\lambda_k|$ et on a les inégalités suivantes :

$$0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_\ell \quad (\ell \leq p/2).$$

Dans cette situation nous avons le théorème suivant

THEOREME 5. Soit $0 < \mu_j < \mu_{j+1}$ deux valeurs absolues successives, de valeurs propres de $A \cdot \omega$. Soit f une fonction non stationnaire à support dans B_R . On suppose que f appartient à $(L^1(\mathbb{R}^n))^p$.

Soit $\rho > 2R$, $t > 2R/\mu_j$, $t > (\rho+R)/(\mu_{j+1}-\mu_j)$, $\Sigma(t) = \{x | \rho + \mu_j t < |x| < \mu_{j+1} t - R\}$ alors

$$(5) \quad \int_{\Sigma(t)} |(e^{-tA \cdot \nabla} f)(x)|^2 dx \leq \frac{c}{\rho^n} \|f\|_{(L^1(\mathbb{R}^n))^p}^2.$$

où c est une constante indépendante de f et de t .

Dans (5) on désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{C}^p$. En utilisant la propriété de conservation de l'énergie des systèmes symétriques, on déduit du théorème 5 le résultat suivant :

THEOREME 6. Sous les hypothèses du théorème 5 il existe une constante $C > 0$ indépendante de f et de t telle que l'on ait

$$(6) \quad |e^{-tA \cdot \nabla} f|_{(L^\infty(\mathbb{R}^n))^p} \cong c t^{-(n-1)/2}.$$

Les théorèmes 1 et 2 sont classiques ; on les cite ici pour les comparer aux théorèmes 3, 4 et 5 qui montrent que "la solution d'un problème de Cauchy avec données régulières se propage comme les singularités de la solution d'un problème de Cauchy à données singulières à l'origine." Le théorème 3 est dû à D. GOLDSTEIN COSTA [], les théorèmes 4, 5 et 6 ont été établis par D. GOLDSTEIN COSTA en collaboration avec l'Auteur.

Les démonstrations utilisent la transformation de RADON. La transformation de RADON associe à une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ une fonction impaire définie sur $\mathbb{R} \times S^{n-1}$. Elle est donnée par la formule

$$(7) \quad \hat{f}(s, \omega) = \int_{x \cdot \omega = s} f(y) dy.$$

Nous utiliserons les relations suivantes :

$$(8) \quad \widehat{\frac{\partial}{\partial x_i} f} = \omega_i \frac{\partial \hat{f}}{\partial s}, \quad \widehat{\Delta f} = \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial s^2}.$$

et la formule inverse :

$$(9) \quad \int_{S^{n-1}} f(x \cdot \omega, \omega) d\omega = c(n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|} f(x-y) dy.$$

($C(n)$ désignera par la suite différentes constantes ne dépendant que de n).

Quand n est impair on a $\Delta^{(n-1)/2} \left(\frac{1}{|y|} \right) = C(n) \delta$; et ainsi on obtient :

$$(10) \quad \Delta^{(n-1)/2} \left[\int_{S^{n-1}} \hat{f}(x \cdot \omega, \omega) d\omega \right] = c(n) f(x).$$

Lorsque n est pair, la formule (9) reste valable ; dans la formule (10) il convient de remplacer $\Delta^{(n-1)/2}$ par $(-\Delta)^{(n-1)/2}$, on obtient alors un opérateur pseudo différentiel qui n'est plus local, c'est pourquoi les propriétés de décroissance locale ne sont plus vraies en dimension paire.

$\hat{u} = e^{-tA \cdot \nabla} f$ est la solution de l'équation

$$(11) \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + A \cdot \omega \frac{\partial \hat{u}}{\partial s} = 0,$$

On note $p_{ij}(\omega)$, $p_{ij}^{-1}(\omega)$ les coefficients des matrices $P(\omega)$, $P^{-1}(\omega)$

et on pose $\hat{v}(s, \omega, t) = P(\omega)\hat{u}(s, \omega, t)$ l'équation (11) s'écrit alors sous la forme :

$$(12) \quad \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial t} + \lambda_k(\omega) \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial s} = 0 \quad (1 \leq k \leq p) ;$$

La solution de (12) est alors explicitement donnée par la formule :

$$(13) \quad \hat{v}_k(s, \omega, t) = \hat{v}_k(s - \lambda_k(\omega)t, \omega, 0) ,$$

en revenant à $\hat{u}_k$ on en déduit l'expression :

$$(14) \quad \hat{u}(s, \omega, t) = \sum_{1 \leq k \leq p} G_k(\omega) \hat{f}(s - \lambda_k(\omega)t, \omega)$$

où
$$G_k(\omega) = [p_{ik}(\omega) p_{kj}^{-1}(\omega)] .$$

Comme on a supposé que f est non stationnaire, on a :

$$(15) \quad \hat{u}(s, \omega, t) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ \lambda_k \neq 0}} G_k(\omega) \hat{f}(s - \lambda_k(\omega)t, \omega)$$

et

$$(16) \quad u(x, t) = c(n)(\Delta)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ \lambda_k \neq 0}} G_k(\omega) \hat{f}(x \cdot \omega - \lambda_k(\omega)t, \omega) d\omega$$

Tous les résultats seront déduits de cette formule. On remarque déjà que si $|x| < \varepsilon t - R$ on a :

$$|x \cdot \omega - \lambda_k(\omega)t| > R \quad \text{et} \quad \hat{f}(x \cdot \omega - \lambda_k(\omega)t, \omega) = 0$$

(dans la situation du théorème 1) car la transformation de Radon préserve les supports. On a ainsi démontré la première partie du théorème 1. On note ensuite

$$T_k(t)(\cdot) \quad \text{et} \quad T_k(\cdot) = T_k(1)(\cdot)$$

les distributions

$$\langle T_k(t)(\cdot), f \rangle = c(n) \int_{S^{n-1}} G_k(\omega) \left(\int_{x \cdot \omega = \lambda_k(\omega)t} f(x) dx \right) d\omega .$$

On a :

$$\begin{aligned} & \int_{S^{n-1}} G_k(\omega) \hat{f}(x \cdot \omega - \lambda_k(\omega)t, \omega) d\omega \\ &= \int_{S^{n-1}} G_k(\omega) \left(\int_{y \cdot \omega = x \cdot \omega - \lambda_k(\omega)t} f(y) dy \right) d\omega \\ &= \int_{S^{n-1}} G_k(\omega) \left(\int_{(x-y) \cdot \omega = \lambda_k(\omega)t} f(y) dy \right) d\omega \end{aligned}$$

et ainsi il vient :

$$(17) \quad u(., t) = c(n)(\Delta)^{(n-1)/2} \sum_{\lambda_k \neq 0} T_k(t)(.) * f(.). \quad .$$

D'autre part on a :

$$(18) \quad T_k(t)(.) = \frac{1}{t} T_k\left(\frac{\cdot}{t}\right) \quad .$$

En effet on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \int_{S^{n-1}} G_k(\omega) \left(\int_{x \cdot \omega = \lambda_k(\omega)t} f(x) dx \right) d\omega \\ &= t^{n-1} \int_{S^{n-1}} G_k(\omega) \left(\int_{\xi \cdot \omega = \lambda_k(\omega)} f(t\xi) d\xi \right) d\omega \\ &= t^{n-1} \langle T_k(.), f(t.) \rangle \\ &= \frac{1}{t} \langle T_k\left(\frac{\cdot}{t}\right), f(.) \rangle \quad . \end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule

$$(19) \quad u(., t) = \frac{1}{t} \sum_{\lambda_k \neq 0} (\Delta)^{(n-1)/2} T_k\left(\frac{\cdot}{t}\right) * f \quad .$$

On étudie ensuite la distribution T_k . La stricte convexité de la surface ∂W_k joue ici un rôle important en particulier pour tout $\sigma \in \partial W_k$ il existe un unique $\omega(\sigma) \in S^{n-1}$ tel que l'on ait :

$$\sigma \cdot \omega(\sigma) = \lambda(\omega(\sigma)) \quad .$$

Désignons par W_k l'intérieur de ∂W_k ; pour tout $x \notin W_k$ on note $\Gamma(x)$ la courbe $\Gamma(x) = \{\sigma \in \partial W_k \mid (x - \sigma) \cdot \omega(\sigma) = \lambda_k(\omega(\sigma))\}$ $\Gamma(x)$ est une variété analytique

de dimension $(n-2)$ et on prouve (Cf. D. GOLOSTEIN COSTA []) que $T_k(.)$ est une fonction donnée par la formule :

$$(20) \quad T_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in W_k \\ \frac{1}{|x|} \int_{\Gamma(x)} \frac{G_k(\omega(\sigma)) h(\sigma) d\sigma}{(1 - (\frac{x \cdot \sigma}{|x||\sigma|})^2)^{\frac{n-1}{2}}} \end{cases}$$

où $h(\sigma)$ est une fonction analytique définie sur ∂W_k .

De la formule (20) on peut déduire que T_k est analytique partout sauf sur ∂W_k et décroît uniformément, ainsi que toutes ses dérivées, lorsque $|x| \rightarrow \infty$.

Enfin D. GOLDSTEIN COSTA a montré que toutes les dérivées de T_k jusqu'à l'ordre $(n-3)/2$ sont uniformément bornées.

On écrit donc enfin :

$$(21) \quad u(x,t) = \Delta^{(n-1)/2} \sum_{\substack{k \\ \lambda_k \neq 0}} \int_{R^n} T_k\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) dy.$$

Pour terminer la démonstration du théorème 1 on remarque que u est analytique en dehors du cône $C = \{(x,t) \mid |x| < \Lambda t + R\}$. On en déduit alors la deuxième partie du théorème 1. De même l'énoncé du théorème 2 se démontre trivialement à partir des formules (20) et (21).

Prouvons le Théorème 3. On écrit :

$$\Delta^{(n-1)/2} \int \frac{1}{t} T_k\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) dy$$

$$\sum_{\alpha, \beta} \int_{R^n} D^\alpha \left(T_k\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) D^\beta f(y) dy.$$

où les dérivées en α sont d'ordre $(n-3)/2$ et les dérivées en β d'ordre $(n+1)/2$. En utilisant le résultat de D. GOLDSTEIN COSTA on obtient :

$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{t} \frac{1}{t^{(n-3)/2}} \sum_k \int_{R^n} |(D^\alpha T_k)\left(\frac{x-y}{t}\right)| |D^\beta f(y)| dy$$

d'où l'on déduit le résultat du théorème 3.

Soit ensuite $\theta \in \bigcup \partial W_k$. On désigne par d la distance de θ à $\bigcup \partial W_k$;

soit f une fonction à support dans B_R . On choisit t tel que l'on ait $(|z| + R)/t < d - 2\varepsilon$ et on pose $\eta = (d - \varepsilon) - (|z| + R)/t$. Pour x tel que $|x - (t\theta + z)\theta| < t\eta$ on a :

$$\begin{aligned}
 (22) \quad \int_{\mathbb{R}^n} T_k\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} T_k\left(\frac{y}{t}\right) f(x-y) dy \\
 &= t^n \int_{\mathbb{R}^n} T_k(\xi) f(x-t\xi) d\xi \\
 &= t^n \int_{\left|\frac{x}{t} - \xi\right| \leq R/t} T_k(\xi) f(x-t\xi) d\xi .
 \end{aligned}$$

Mais $\{\xi \mid \left|\frac{x}{t} - \xi\right| \leq R/t\} \subset \{\xi \mid |\xi - \theta| < d - \varepsilon\}$

sur ce domaine T_k est analytique et ses dérivées sont uniformément bornées. On déduit donc de (22) l'expression :

$$\begin{aligned}
 (23) \quad (\Delta)^{(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}^n} T_k\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) dy \\
 &= t^n \int_{|\xi - \theta| < d-\varepsilon} T_k(\xi) \Delta_x^{(n-1)/2} f(x-t\xi) d\xi \\
 &= t^n t^{(n-1)/2} \int_{|\xi-\theta| < d-\varepsilon} T_k(\xi) \Delta_\xi^{(n-1)/2} f(x-t\xi) d\xi \\
 &= t^{n-(n-1)/2} \int_{|\xi-\theta| < d-\varepsilon} \Delta_\xi^{(n-1)/2} T_k(\xi) f(x-t\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

Le théorème 4 en résulte immédiatement.

Prouvons le théorème 5. Pour cela on revient à la formule (16), en écrivant

$$(24) \quad u_k(x, t) = \int_{S^{n-1}} G_k(\omega) \hat{f}_k(x, \omega - \lambda_k t, \omega) d\omega .$$

Pour $|\lambda_k| \geq \mu_{j+1}$ et $|x| < \mu_{j+1} t - R$ on a $|x, \omega - \lambda_k t| > R$ donc u_k est nul sur $\Sigma(t)$.

Il suffit donc d'évaluer

$$(25) \quad \int_{\Sigma(t)} |u_k(t, x)|^2 dx \leq \int_{|x| \geq \mu_{j+1} t + R} |u_k(t, x)|^2 dx ,$$

pour k vérifiant $|\lambda_k| \leq \mu_j$.

On remarque alors que u_k est solution d'une équation des ondes :

$$(26) \quad u_k'' - \lambda_k^2 \Delta u_k = 0 ,$$

il en est de même de $V_k(t, x) = \int_0^t u_k(s, x) ds + h_k$, où h_k est donné par la relation :

$$(27) \quad h_k = - (\lambda_k)^{-1} \Delta^{(n-3)/2} \int_{S^{n-1}} G_k(\omega) \frac{\partial \hat{f}}{\partial s}(x, \omega, \omega) d\omega .$$

En appliquant l'inégalité de l'énergie classique on obtient :

$$(28) \quad \begin{aligned} \int_{|x| \geq \mu_j t + \rho} |u_k(t, x)|^2 dx \\ \leq \int_{|x| \geq \mu_j t + \rho} \left(|V_k'(t, x)|^2 + |\nabla V_k(t, x)|^2 \right) dx \\ \leq \int_{|x| \geq \rho} \left(|u_k(0, x)|^2 + |\nabla h_k(x)|^2 \right) dx . \end{aligned}$$

Pour terminer on remarque que :

$$(29) \quad \begin{aligned} u_k(0, x) &= \Delta^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} G_k(\omega) \hat{f}(x, \omega, \omega) d\omega , \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_i} &= (\Delta)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} \omega_i G_k(\omega) \hat{f}(x, \omega, \omega) d\omega . \end{aligned}$$

Ces expressions sont du même type :

$$(\Delta)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} h(\omega) \hat{f}(x, \omega, \omega) d\omega$$

ou $h(\omega)$ est une fonction analytique sur S^{n-1} .

En procédant comme dans HELGASQW [3] on voit que l'on a :

$$(30) \quad \int_{S^{n-1}} h(\omega) \hat{f}(x, \omega, \omega) d\omega = \frac{1}{|\cdot|} \tilde{h}\left(\frac{\cdot}{|\cdot|}\right) *^f \cdot$$

où $\tilde{h}$ est définie par

$$\tilde{h}(\sigma) = \int_{S^{n-1} \cap \sigma \cdot \omega = 0} h(\omega) dS_{\omega}^{n-2} .$$

($\tilde{h}$ est la transformée de Radon de h sur la sphère).

En utilisant enfin le fait que le support de f est borné, on voit que pour $|x| > 2R$ on a (d'après (29) et (30)) :

$$(31) \quad \left(|u_k(0, x)|^2 + |\nabla h_k(x)|^2 \right) \leq \frac{c}{|x|^n} .$$

En reportant dans (31) on obtient le théorème 5.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN, On the solution of analytic equations *Inventiones Math.* 5, p. 277-291, 1968.
- [2] D. GOLDSTEIN COSTA, The Uniform behavior of solution of linear hyperbolic equations for large time. Ph. D., Brown University, June 1973.
- [3] S. HELGASON, The Radon Transform on Euclidean Spaces... *Acta Math.* 113 p. 93-106, 1965.