SÉMINAIRE JEAN LERAY.
SUR LES ÉQUATIONS AUX
DÉRIVÉES PARTIELLES

JACQUES CHAZARAIN
ALAIN PIRIOU

Remarques sur la caractérisation des problèmes mixtes bien posés pour un opérateur hyperbolique

Séminaire Jean Leray (1972), exp. nº 4, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1972____A7_0>

REMARQUES SUR LA CARACTÉRISATION DES PROBLÈMES MIXTES BIEN POSÉS POUR UN OPÉRATEUR HYPERBOLIQUE

par

Jacques CHAZARAIN et Alain PIRIOU

§ 1 - INTRODUCTION

Pour commencer, indiquons de façon vague en quoi consiste le problème mixte dans un quadrant. On note $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ le demi-espace $\{(x,y,t)\ ;\ x > 0\ ,\ y \in \mathbb{R}^{n-1},\ t \in \mathbb{R}\}$. Soit P un opérateur hyperbolique dans la direction du temps t et on se donne un nombre fini d'opérateurs B_j .

On dit que le problème mixte est bien posé si : étant donnés f et des g_j il existe une solution u et une seule de

$$\begin{cases} P\,u = f & \text{pour } x > 0 \\ B_j u = g_j & \text{pour } x = 0 \quad \text{(condition au bord)} \\ \text{et conditions initiales nulles} & \\ \text{sur } t = 0 & \text{(conditions de Cauchy) .} \end{cases}$$

On se propose de caractériser les opérateurs (B_j) pour avoir un problème bien posé, bien entendu cette caractérisation dépendra des espaces où l'on se donne les fonctions.

Si P est d'ordre 2, on dispose depuis longtemps d'une théorie assez complète, motivée par l'étude de l'équation des ondes.

Par contre, si l'ordre P est quelconque, les résultats sont récents et on peut en résumer les étapes essentielles de la façon suivante :

(1961) S. AGMON [2] démontre l'inégalité d'énergie pour le problème mixte à coefficients constants mais avec une hypothèse restrictive sur P .

(196...) S. MIZOHATA, I. SHIROTA et leurs élèves étendent dans diverses directions les résultats d'AGMON.

(1970) R. SAKAMOTO [15] démontre l'inégalité d'énergie dans le cas des coefficients variables et sous des hypothèses générales et indépendamment T. BALABAN [3] démontre que le problème mixte est bien posé dans les espaces de Sobolev mais avec la même restriction que dans AGMON.

Notons que parallèlement, il y a des résultats relatifs aux systèmes hyperboliques du 1er ordre et non nécessairement symétriques : R. HERSH [6], KASAHARA [11], KREISS [12], RAUCH [14].

Dans presque tous ces travaux, il est fait une hypothèse, dite de LOPATINSKI uniforme, qui exclut par exemple, le cas du problème de Neumann ou du problème à dérivée oblique pour l'équation des ondes. Le but de ces exposés est d'indiquer une caractérisation des problèmes mixtes bien posés au moyen d'une condition de LOPATINSKI non nécessairement uniforme, par contre on se place dans le cas des opérateurs homogènes à coefficients constants.

La caractérisation sera aisée une fois que l'on aura ramené le problème mixte à un problème équivalent sur le bord $\{x = 0\}$ et ce en adaptant au cas hyperbolique la technique du projecteur de CALDERON (Voir par ex. [8], [13]).

On étudiera successivement le problème mixte dans les espaces de fonctions C^∞ puis dans les espaces de SOBOLEV. On se borne ici à esquisser les démonstrations dont on trouvera les détails dans [5], par contre on développe ici en appendice une remarque sur une formulation équivalente de la condition (L) du théorème 1 et une remarque sur la condition (L_θ) du théorème 2.

§ 2 - PROBLÈMES MIXTES DANS LES ESPACES DE FONCTIONS C^∞

a) Enoncé du résultat.

On commence par préciser les hypothèses et notations.

Sur l'opérateur P on supposera que

(A) $\begin{cases} P(D_x,D_y,D_t) \text{ est un opérateur de degré } m \text{ homogène à coefficients} \\ \text{constants et hyperbolique dans la direction du temps } N_o = (0,0,1) \end{cases}$.

Notons (ξ,η,τ) la variable duale de (x,y,t) et posons aussi $z = (y,t)$ et $\zeta = (\eta,\tau)$. Notons Γ la composante connexe contenant N_o de l'ouvert $\{N; N\in R^{n+1}$ et $P(N) \neq 0\}$ et posons $\Gamma_o = \Gamma \cap \{\xi = 0\}$. On sait que P admet une solution élémentaire E à support dans le cône dual

$$\Gamma^* = \{V \;;\; V\in\mathbb{R}^{n+1},\ V.N \geqq 0 \text{ pour tout } N\in\Gamma\} .$$

(B) {On suppose que le bord $\{x=0\}$ n'est pas caractéristique pour P} alors pour $\zeta\in\mathbb{R}^n - i\Gamma_o$ on désigne par $\xi_j^+(\zeta)$ $j = 0,\dots,\mu-1$ les racines en ξ du polynôme $P(\xi,\zeta)$ telles que $\operatorname{Im} \xi > 0$; on vérifie facilement que ce nombre μ de racines est indépendant de $\zeta \in \mathbb{R}^n - i\,\Gamma_0$. Sur le nombre de conditions au bord on fait l'hypothèse :

$$
(C)\begin{cases} \text{On se donne } \mu \text{ opérateurs différentiels homogènes à coefficients constants} \\ B_j(D_x,D_y,D_t) \text{ de degré } b_j \qquad j = 0,\dots,\mu-1 \,. \end{cases}
$$

Il reste à formuler l'hypothèse de LOPATINSKI sur les B_j. On définit le polynôme en ξ

$$
P^+(\xi,\zeta) = \prod_{j=0}^{\mu-1} (\xi - \xi_j^+(\zeta)) \quad \text{et on désigne par}
$$

$$
B_j'(\xi,\zeta) = \sum_{k=0}^{\mu-1} B'_{j,k}(\zeta)\xi^k
$$

le reste de la division euclidienne du polynôme B_j par P^+. On appellera "matrice de LOPATINSKI" la matrice carrée $\mu \times \mu$ $B'(\zeta) = (B'_{j,k}(\zeta))_{j,k}$ et déterminant de LOPATINSKI son déterminant $R(\zeta) = \det B'(\zeta)$.

Avec ces définitions on a la caractérisation suivante :

<u>THÉORÈME</u> 1. Sous les hypothèses (A), (B), (C) les conditions a) et b) sont équivalentes.

a) Pour les données $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, $g_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $j = 0,\dots,\mu-1$ et nulles pour $t < 0$, le problème

$$
(*)\begin{cases} P\,u = f & \text{pour } x > 0 \\ B_j u = g_j & \text{pour } x = 0 \end{cases}
$$

admet une solution unique $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ nulle pour $t < 0$.

b) La condition (L) est satisfaite :

$$
(L)\begin{cases} \text{il existe un cône ouvert connexe } \tilde\Gamma_0 \text{ avec } N_0 \in \tilde\Gamma_0 \subset \Gamma_0 \text{ tel que} \\ \text{pour tout cône fermé épointé } K \subset \tilde\Gamma_0 \text{ il existe } c > 0 \text{ et } \theta \geqq 0 \\ \qquad |R(\zeta)| \geqq c\,|\operatorname{Im}\zeta|^\theta \text{ pour } \zeta \in \mathbb{R}^n - i\,K \text{ et } |\zeta| = 1 \,. \end{cases}
$$

(On donne en appendice une forme équivalente de la condition (L)).

Esquissons la démonstration de ce théorème :

b) Réduction à un problème sur le bord

En résolvant le problème de Cauchy, on peut toujours se ramener au cas où $f = 0$:

$$\begin{cases} P\,u = 0 \\ B_j u = g_j \end{cases} .$$

Posons $u^o = u$ si $x \geq 0$ et 0 sinon, la formule des sauts s'écrit

$$P\,u^o = (P\,u)^o + \frac{1}{i} \sum_{j+\ell+1 \leq m} P_{j+\ell+1}\,(D_z)\;\gamma_\ell u \otimes D^j\,\delta_{(x=0)} \quad .$$

où
$$P = \sum_{k=0}^{m} P_k(D_z) D_x^k \quad \text{et} \quad \gamma_\ell u = D_x^\ell u \,/\, _{x=0} \quad ,$$

ce que l'on condense en $P\,u^o = \tilde{\tilde{P}}\gamma u$ avec $\gamma u = (\gamma_o u, \dots, \gamma_{m-1} u)$
et d'où l'on déduit :

$$u = (E * \tilde{P}\;\gamma u)|_{x>0}$$

puis en reprenant formellement les traces des deux membres on trouve que γu est solution de

$$\begin{cases} u \;\; = Q.\;\gamma u \\ P\gamma y \;\; = g \end{cases}$$

où l'on a posé $Q\,v = \gamma(E * \tilde{P}\;v)$ pour $v = (v_o, \dots, v_{m-1})$.

Ceci est justifié par la

PROPOSITION. L'application $\psi(z) \longrightarrow [E * (\psi \otimes D^j \delta_{(x=0)})]\big|_{x>0}$

applique $C_+^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $\overline{C_+^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})}$ (1) et s'exprime avec $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$: par

$$[E * (\psi \otimes D^j \delta)]\;(x,z) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{iz.\zeta}\;\psi(\zeta) \left(\int_{C_\zeta^+} \frac{\xi^j e^{ix\xi}}{P(\xi,\zeta)} \frac{d\xi}{2i\pi} \right) d\eta d\sigma$$

où C_ζ^+ est un contour de $\operatorname{Im}\xi > 0$ qui entoure les racines $\xi_j^+(\zeta)$. (2)

1) On indique par un indice + les espaces de fonctions nulles pour $t<0$.

2) On désigne par la même lettre une fonction et sa transformée de FOURIER-LAPLACE; c'est la présence de la variable duale qui les distingue.

On en déduit que l'opérateur Q consiste en la convolution par une matrice distribution $m \times m$ encore notée Q et dont la transformée de Laplace est donnée par

$$Q_{k,\ell}(\zeta) = (2\pi)^{-n} \int_{C_\zeta^+} \frac{1}{P(\xi,\zeta)} \sum_{j=0}^{m-1-\ell} P_{j+\ell+1}(\zeta)\xi^{j+k} \frac{d\xi}{2i\pi}$$

et il est alors facile de vérifier que Q a son support dans le cône dual Γ_0^* . On vérifie alors que l'on a l'équivalence des problèmes

$$\begin{cases} P\,u = 0 \\ B\gamma u = g \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Q\gamma u = \gamma u \\ B\gamma u = g \\ u \;= (E * \tilde{P}\gamma u)|_{x>0} \end{cases}$$

c) Image du projecteur de CALDERON

On vérifie facilement que $Q * Q = Q$ d'où le nom de projecteur donné à l'application Q . Etudions l'image dans $\mathbb{C}^m$ du projecteur $Q(\zeta)$.

PROPOSITION.

Soit $v = (v_0,\dots,v_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$, on a $Q(\zeta)v = v$ si et seulement si la solution $U(x)$ du problème de Cauchy

$$P(D_x,\zeta)\; U(x) = 0$$
$$\gamma U \;\; (o) = v$$

est bornée pour $x \geqq 0$.

La démonstration se fait en utilisant l'expression des solutions de cette équation différentielle que l'on déduit de la formule des sauts.

En remarquant que les solutions bornées pour $x \geqq 0$ de $P(x,\zeta)\; U(x) = 0$ sont les solutions de $P^+(D_x,\zeta)\; U(x) = 0$, on en déduit une autre caractérisation de l'image de $Q(\zeta)$:

PROPOSITION.

Soit $v \in \mathbb{C}^m$, on a $Q(\zeta)\; v = v$ si et seulement si $v'' = Q^+(\zeta)\; v'$ où on a posé

$$v = (v',\; v'') \quad v' = (v_0,\dots,v_{\mu-1}) \quad v'' = (v_\mu,\dots,v_{m-1})$$

et la matrice $Q^+(\zeta)$ est définie par

$$Q^+_{k,\ell}(\zeta) = \int_{C^+_\zeta} \frac{1}{P^+(\xi,\zeta)} \sum_{j=0}^{\mu-1-\ell} P^+_{j+\ell+1}(\zeta)\xi^{j+k} \frac{d\xi}{2i\pi}$$

avec $\zeta \in \mathbb{R}^n - i\,\Gamma_0$; $k = \mu,\dots,m-1$; $\ell = 0,\dots,\mu-1$; $P^+ = \sum P^+_k(\zeta)D^k_x$.

De cette proposition, il découle que si $u \in C^\infty_+\,(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ vérifie $Pu = 0$ alors on a l'équivalence

$$\gamma u = Q\gamma u \Longleftrightarrow \gamma'' u = Q^+\gamma' u \ .$$

d) <u>Fin de la démonstration de l'équivalence du théorème</u>.

Comme $\gamma''u$ s'exprime en fonction de $\gamma'u$ on est conduit à éliminer $\gamma''u$ dans l'équation $B\gamma u = g$. Pour cela on écrit que $B\gamma u = B\,Q\gamma u$ et on remarque sur l'expression intégrale de $Q(\zeta)$ que $B\,Q\gamma u = B'\,Q'\gamma u$, où Q' désigne la matrice distribution constituée des μ premières lignes de Q . De sorte que l'on trouve finalement le problème équivalent

$$\begin{cases} B'\gamma' u = g \\ \gamma'' u \;\; = Q^+\gamma' u \end{cases}$$

et par conséquent tout revient à résoudre l'équation

$$B'\gamma' u = g \ ,$$

or la condition (L) implique précisément, d'après le théorème sur la transformation de LAPLACE des distributions, qu'il existe une matrice distribution A à support dans $(\Gamma_0)^*$ qui soit un inverse de B' pour la convolution, d'où la solution

$$\gamma' u = A * g$$

puis $\qquad \gamma'' u = Q^+\gamma' u$ et enfin $u = (E * \tilde{P}\gamma u)|_{x > 0}$.

Réciproquement la nécessité de la condition (L) est basée sur le fait que la convolution par B' réalise un isomorphisme de $C^\infty_+\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^\mu)$.

§ 3 - <u>PROBLÈME MIXTE DANS LES ESPACES DE SOBOLEV</u>.

1) <u>Enoncé du résultat</u>.

Définissons d'abord les espaces de SOBOLEV que nous utiliserons : pour s, $r \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$, désignons par $H_{s,r;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ l'espace des $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ telles que $e^{-\gamma t}u \in H_{s,r}(\mathbb{R}^{n+1})$ - ce dernier espace étant défini en particulier dans [7] -. La norme dans $H_{s,r;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ est définie par

$$\|u\|^2_{s,r;\gamma} = \int_{R^{n+1}} (\xi^2 + |\zeta|^2)^s |\zeta|^{2r} \; |e^{-\gamma t} u(\xi,\eta,\sigma)|^2 d\xi d\eta d\sigma \quad ,$$

où $\zeta = (\eta, \sigma - i\gamma)$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \mathbb{R}$. On définit de même l'espace

$$H_{s;\gamma}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \langle v \rangle^2_{s;\gamma} = \int_{R^n} |\zeta|^{2s} \; |\widehat{e^{-\gamma t} v}(\eta,\sigma)|^2 \; d\eta d\sigma \quad .$$

Enfin, $H_{s,r;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ est l'espace des restrictions à $\mathbb{R}^{n+1}_+$ des distributions appartenant à $H_{s,r;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$; il est muni de la norme-quotient correspondante, que l'on note $|u|_{s,r;\gamma}$. On utilisera les notations

$$H_{+\infty;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+) = \bigcap_{s,r} H_{s,r;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \;, \quad H_{+\infty;\gamma}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_s H_{s;\gamma}(\mathbb{R}^n)$$

On remplace l'hypothèse (A) par :

(A') $P(D_x, D_y, D_t)$ est un opérateur différentiel de degré m homogène à coefficients constants <u>strictement hyperbolique</u> dans la direction du temps $N_o = (0,0,1)$

et on obtient le

<u>THÉORÈME</u> 2.

Soit θ un nombre réel $\geqq 0$. Sous les hypothèses (A'), (B), (C), les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout $\gamma > 0$, pour toutes $f \in H_{0,\theta;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $g_j \in H_{m-1-b_j+\theta;\gamma}(\mathbb{R}^n)$ $(j = 0,\dots,\mu-1)$, le problème

$$(*) \quad \begin{cases} Pu = f & \text{pour } x > 0 \\ B_j u = g_j & \text{pour } x = 0, \; j = 0,\dots,\mu-1 \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in H_{m,-1;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, qui vérifie l'inégalité d'énergie

$$(E)\quad \gamma|u|^2_{m,-1;\gamma} + \sum_{j=0}^{\mu-1} < \gamma_j u >^2_{m-1-j;\gamma} \leq \frac{C}{\gamma^{2\theta}}\left(\frac{1}{\gamma}|f|^2_{0,\theta;\gamma} + \sum_{j=0}^{\mu-1} < g_j >^2_{m-1-b_j+\theta;\gamma}\right)$$

où C est une constante indépendante de f, g_j, γ.
De plus, si f, g_j sont nulles pour $t<0$, alors u est nulle pour $t<0$.
Enfin, si $f \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $g_j \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in H_{+\infty;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

(L_θ) b) La condition suivante est satisfaite
Pour $\zeta = (\eta,\sigma-i\gamma)$, avec $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\gamma>0$, $|\zeta| = 1$, le déterminant de LOPATINSKI $R(\zeta)$ est non nul, et la matrice-inverse $A(\zeta)$ de la matrice de LOPATINSKI $B'(\zeta)$ vérifie $|A(\zeta)| \leq \frac{C'}{\gamma^\theta}$, avec une constante C' indépendante de ζ $(|\zeta| = 1)$.

Pour établir l'implications a) $\Longrightarrow$ b), on utilise la réduction précédente de (*) à un problème sur le bord $\{x = 0\}$, qui montre que l'operateur de convolution par B' est un isomorphisme de $\prod_{j=0}^{\mu-1} H_{m-1-j;\gamma}(\mathbb{R}^n)$ sur $\prod_{j=0}^{\mu-1} H_{m-1-b_j+\theta;\gamma}(\mathbb{R}^n)$; la condition (L_θ) résulte alors du théorème sur les multiplicateurs de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Pour établir l'implication b) $\Longrightarrow$ a), l'étape essentielle est la

2) Démonstration de l'inégalité d'énergie (E) pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $g_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

On commence par établir une forme affaiblie de (E) dans le cas du problème de DIRICHLET pour un opérateur P vérifiant les hypothèses (A'), (B) :

LEMME :

(E') Il existe une constante C telle que
$$\gamma|u|^2_{m-1;\gamma} \leq C\left(\frac{1}{\gamma}|Pu|^2_{0;\gamma} + \sum_{j=0}^{\mu-1} < \gamma_j u >^2_{m-1-j;\gamma}\right)$$
pour tout $\gamma>0$ et toute $u \in H_{m;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Pour démontrer ce lemme, on adapte une technique introduite par LERAY à propos du problème de Cauchy : si on pose $Q(\xi,\eta,\tau) = \frac{\partial P}{\partial \tau}(\xi,\eta,\tau)$, on remarque, en utilisant l'hyperbolicité stricte de P, que

$$- \operatorname{Im} P(\xi,\zeta)\,\overline{Q(\xi,\zeta)} \geq c\gamma\,(\gamma^2 + |\zeta|^2)^{\frac{m-1}{2}} \quad , \quad \text{avec} \quad c > 0 .$$

Par intégrations par parties en x, on obtient alors

$$- \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\gamma t}\, P(D)u . Q(D)u \; dx\, dz \geq c\gamma |u|^2_{m-1\,;\gamma} - C \sum_{j=0}^{m-1} < \gamma_j u >^2_{m-1-j;\gamma}$$

d'où (E') .

Grâce à (E') et (B) , l'inégalité (E) sera une conséquence de

$$(E'') \quad \left| \; \sum_{k=0}^{m-1} < \gamma_k u >^2_{m-1-k;\gamma} \leq \frac{C}{\gamma^{2\theta}} \left(\frac{1}{\gamma} |f|^2_{\circ,\theta;\gamma} + \sum_{j=0}^{\mu-1} < g_j >^2_{m-1-b_j+\theta;\gamma} \right) \right.$$

Pour établir (E'') , on explicite les $\gamma_k u$ en fonction des données f, g_j : désignons par $\xi_j^-(\zeta)$ $(j=0,\ldots,m-\mu-1)$ les zéros ξ de $P(\xi,\zeta)$ tels que $\operatorname{Im} \xi < 0$, et posons $P^-(\xi,\zeta) = \prod_{j=0}^{m-\mu-1} (\xi - \xi_j^-(\zeta))$; il vient alors

$$P^+ (D_x,\zeta)\, u(x,\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix.\xi} \frac{f(\xi,\zeta)}{P^-(\xi,\zeta)}\, d\xi$$

Si on désigne par $S_j(\xi,\zeta) = \sum_{k=0}^{m-1} S_{j,k}(\zeta)\xi^k$ le quotient de $B_j(\xi,\zeta)$ par $P^+(\xi,\zeta)$, et par $C^-(\zeta)$ un contour de $\{\operatorname{Im} \xi < 0\}$ entourant les $\xi_j^-(\zeta)$ $(j = 0,\ldots,m-\mu-1)$, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{\mu-1} B'_{j,k}(\zeta)\; (\gamma_k u)(\zeta) = g_j(\zeta) - \frac{1}{2\pi} \int_{C^-(\zeta)} \frac{S_j(\xi,\zeta)}{P^-(\xi,\zeta)}\, f(\xi,\zeta)\, d\xi \quad (j=0,\ldots,\mu-1)$$

d'où l'expression des μ premières traces de u :

$$(\gamma_k u)(\zeta) = \sum_{j=0}^{\mu-1} A_{k,j}(\zeta)\, g_j(\zeta) - \sum_{\substack{j=0,\ldots,\mu-1 \\ k=0,\ldots,m-1}} A_{k,j}(\zeta)\, S_{j,h}(\zeta) \int_0^{+\infty} f(x,\zeta)dx \int_{C^-(\zeta)} \frac{e^{-ix.\xi}\xi^h}{P^-(\xi,\zeta)} \frac{d\xi}{2\pi}$$

$(k=0,\ldots,\mu-1)$

Les traces suivantes s'obtiennent de proche en proche à partir de l'expression précédente de $P^+(D_x,\zeta)\, u(x,\zeta)$:

$$\gamma_{h+\mu}(\zeta) = - \sum_{j=0}^{\mu-1} P_j^+(\zeta)\gamma_{h+j} u(\zeta) + \int_0^{+\infty} f(x,\zeta)\, dx \int_{C^-(\zeta)} \frac{e^{-ix.\xi}\xi^h}{P^-(\xi,\zeta)} \frac{d\xi}{2\pi} \quad (h \in \mathbb{N}).$$

L'estimation (E") apparaît alors comme une conséquence immédiate de la

PROPOSITION. Il existe une constante C telle que

$$(E'')\quad \left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{+\infty} dx \left| \int_{C^-(\zeta)} \frac{e^{-ix.\xi}\xi^h}{P^-(\xi,\zeta)}\, d\xi \right|^2 \leq \frac{C}{\gamma} |\zeta|^{2(-m+\mu+h+1)} \\ \text{pour } h = 0,\dots,m-1, \quad \zeta = (\eta,\sigma-i\gamma),\ \eta \in \mathbb{R}^{n-1},\ \sigma \in \mathbb{R},\ \gamma > 0 . \end{array} \right.$$

Pour établir cette proposition, considérons la solution u du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} P\,u = 0 & \text{pour } x > 0 \\ \gamma_j u = \begin{cases} 0 \\ g \end{cases} & \begin{array}{l} \text{pour } j = 0,\dots,\mu-2 \\ \text{pour } j = \mu-1 \end{array} \qquad (g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)) . \end{cases}$$

On a explicitement

$$u(x,\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix.\xi}}{P^+(\xi,\zeta)}\, g(\zeta)\, d\xi .$$

D'autre part, on sait, d'après (E') et les calculs précédents des traces $\gamma_{h+\mu}u$ que

$$|u|^2_{m-1;\gamma} \leq \frac{C}{\gamma} < g >^2_{m-\mu;\gamma}$$

c'est-à-dire, en explicitant :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\zeta|^{2(m-1-h)} |g(\zeta)|^2 d\eta d\sigma \left(\int_0^{+\infty} dx \left| \int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix.\xi}\xi^h}{P^+(\xi,\zeta)}\, d\xi \right|^2 \right) \leq \frac{C}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} |\zeta|^{2(m-\mu)} |g(\zeta)|^2 d\tau$$

pour toute $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; le théorème sur les multiplicateurs de $L^2(\mathbb{R}^n)$ implique alors

$$\int_0^{+\infty} dx \left| \int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix.\xi}\xi^h}{P^+(\xi,\zeta)}\, d\xi \right|^2 \leq \frac{C}{\gamma} |\zeta|^{2(-\mu+h+1)}$$

d'où (E"') en remplaçant $P(\xi,\zeta)$ par $P(-\xi,\zeta)$.

§ 4 - EXEMPLE DE L'ÉQUATION DES ONDES AVEC CONDITION DE DÉRIVÉE OBLIQUE AU BORD.

On prend $P(D_x,D_y,D_t) = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$B(D_x,D_y,D_t) = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (B_j \in \mathbb{R}) \ .$$

Les hypothèses (A'), (B), (C) sont satisfaites, et on vérifie la validité de la condition (L) avec

$$\tilde{\Gamma}_o = \left\{ (\eta,\tau) \in \mathbb{R}^n \mid |\eta| < \frac{\tau}{\sqrt{1+|\beta|^2}} \right\} ,$$

ainsi que la validité de la condition (L_θ) avec $\theta = 1$. On peut donc appliquer au problème mixte (*) correspondant les théorèmes 1 et 2, ce qui complète, pour cet exemple, des résultats de CHAZARAIN [4], IKAWA [9], INOUE [10].

APPENDICE .

PROPOSITION

La condition (L) du théorème 1 est équivalente à la condition suivante :

$$(L') \quad \begin{cases} \text{il existe un cône convexe } \tilde{\Gamma}_o \text{ avec } N_o \in \tilde{\Gamma}_o \subset \Gamma_o \text{ tel que} \\ R(\zeta) \neq 0 \quad \text{pour} \quad \zeta \in \mathbb{R}^n - i\tilde{\Gamma}_o \ . \end{cases}$$

Il s'agit donc de montrer que pour tout cône K fermé de $\tilde{\Gamma}_o$ il existe des constantes $c > 0$ et $\theta \geqq 0$ pour lesquelles on a la minoration de $|R(\zeta)|$ indiquée dans la condition (L). Soit $P = P_1^{\ell_1},\ldots,P_r^{\ell_r}$ la décomposition du polynôme P en facteurs irréductibles et soit p_j le degré de P_j . On définit le polynôme $Q = P_1,\ldots,P_r$ et on désigne par $\rho(\zeta)$ le résultant de $Q(\xi,\zeta)$ et $\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi,\zeta)$. On va raisonner dans l'ouvert

$$\Omega = \{\zeta,\ \zeta \in \mathbb{R}^n - i\,\tilde{\Gamma}_o \quad \text{et} \quad \rho(\zeta) \neq 0\}$$

où Q a ses racines simples en ξ . On note $(\xi^+_{j,k})_{k=1,\ldots,d^+_j}$ les zéros de P_j tels que $\operatorname{Im} \xi > 0$, alors le déterminant de LOPATINSKI $R(\zeta)$ est défini par l'égalité suivante

$$(D) \qquad R.\prod_{\substack{i\\k<\ell}} (\xi^+_{i,k} - \xi^+_{i,\ell})^{2\ell_i} \prod_{i<j} (\xi^+_{i,k} - \xi^+_{j,\ell})^{\ell_i+\ell_j} =$$

$$= \det(\ldots,\ B_h(\xi^+_{j,k},\zeta),\ldots,\ D_\xi^{\ell_j-1} B_h(\xi^+_{j,k},\zeta)\ldots) \ .$$

En s'inspirant d'un travail de KASAHARA [11] on va étudier le comportement de $|R(\zeta)|$ en utilisant une conséquence du théorème de SEIDENBERG-TARSKI qui est indiquée dans HORMANDER [7] .

Soit $\varepsilon > 0$ fixé et en remplaçant éventuellement K par un cône plus grand on peut le supposer défini par des équations algébriques.

Considérons le système suivant de conditions algébriques réelles en des variables réelles indépendantes

$$(\operatorname{Re} \zeta_k, \operatorname{Im} \zeta_k, \operatorname{Re} \xi_{j,k}, \operatorname{Im} \xi_{j,k}, \operatorname{Re} R, \operatorname{Im} R, \sigma) \in \mathbb{R}^{2(n+\sum_{j=1}^{r} d_j^+ +1)+1}$$

(D)

$$\begin{cases} P_j(\xi_{j,k},\zeta) = 0 \quad (j=1,\dots,r \,;\, k=1,\dots,d_j^+,\ \xi_{j,k} = \operatorname{Re} \xi_{j,k} + i \operatorname{Im} \xi_{j,k}) \\ \operatorname{Im} \xi_{j,k} > 0 \\ |\operatorname{Im} \zeta|^2 \geq \varepsilon^2 \\ |\zeta|^2 = \sigma^2 \\ |\rho(\zeta)|^2 > 0 \\ |\xi_{j,k} - \xi_{j,\ell}|^2 > 0 \quad (j = 1,\dots,r \ \ k,\ell = 1,\dots,d_j^+ \quad k \neq \ell) \end{cases}$$

Ce qui définit pour σ fixé un ensemble semi-algébrique $M(\sigma)$ qui est non vide pour σ assez grand car $R(\zeta) \neq 0$ sur $\mathbb{R}^n - i\tilde{\Gamma}_0$; d'autre part pour σ fixé la projection de $M(\sigma)$ sur l'espace des ζ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^n - i\tilde{\Gamma}_0$ et donc $\inf_{M(\sigma)} |R| \neq 0$. Alors le théorème d'élimination implique l'existence d'une constante $C \neq 0$ et d'un nombre rationnel a tels que

$$\inf_{M(\sigma)} |R| \sim C^2 \sigma^{2a} \quad \text{pour } \sigma \text{ grand}$$

c'est-à-dire

$$|R(\zeta)| \geq C\, |\zeta|^a \quad \text{pour } \zeta \in \mathbb{R}^n - i\,K \ , \ |\operatorname{Im} \zeta| \geq \varepsilon \ , \ \rho(\zeta) \neq 0 \ , \ |\zeta| \text{ grand}$$

et par continuité, cette inégalité reste vraie sans la condition $\rho(\zeta) \neq 0$. Montrons maintenant que cette dernière inégalité implique celle de la condition (L) .

Soit $\varepsilon_0 > 0$ fixé, alors on a par continuité sur un compact l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$|R(\zeta)| \geqq c \quad \text{pour} \quad \zeta \in \mathbb{R}^n - i\,K \quad |\zeta| = 1 \quad |\operatorname{Im} \zeta| \geqq \varepsilon_0 \; .$$

Reste donc à considérer le cas où $|\operatorname{Im} \zeta|$ est petit, désignons par δ le degré d'homogénéité de $R(\zeta)$ en ζ et posons $\zeta' = \dfrac{\zeta}{|\operatorname{Im} \zeta|}$ on a

$$\zeta' \in \mathbb{R}^n - i\,K \quad |\operatorname{Im} \zeta'| = 1 \quad |\zeta'| = \frac{1}{|\operatorname{Im} \zeta|} \quad \text{et} \quad R(\zeta) = |\operatorname{Im} \zeta|^{\delta} R(\zeta')$$

alors l'inégalité trouvée nous montre que dans ce cas on a

$$|R(\zeta)| \geqq C \; |\operatorname{Im} \zeta|^{\delta - a}$$

ce qui démontre la condition (L) .

De la même façon on a pour la condition du théorème 2 la

PROPOSITION

Si $R(\zeta) \neq 0$ pour $\zeta = (\eta, \sigma - i\gamma)$ $\eta \in R^{n-1}$, $\sigma \in R$ $\gamma > 0$, alors il existe θ tel que la condition (L_θ) du théorème 2 soit satisfaite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. AGEMI et T. SHIROTA, J. Fac. Sc. Hokkaido Univ., vol. 21, n° 2 (1970).

[2] S. AGMON, C.N.R.S., Paris (1962).

[3] T. BALABAN, Memoirs of Amer. Math. Soc., n° 112 (1971).

[4] J. CHAZARAIN, J. of Fonct. Analysis, Vol. 7, n° 3 (1971).

[5] J. CHAZARAIN et A. PIRIOU, A paraître aux Ann. Inst. Fourier, Grenoble.

[6] R. HERSH, J. Math. and Mech., Vol. 12, n° 3 (1963).

[7] L. HÖRMANDER, Linear Partial Differential operators, Springer, (1963).

[8] L. HÖRMANDER, Ann. of math., Vol. 83 (1966).

[9] M. IKAWA, Osaka J. Math., 7, (1970).

[10] A. INOUE, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Vol. 16, n° 3 (1970).

[11] K. KASAHARA, Publ. Res. Inst. Math. Sc. Kyoto Univ., Vol. 6, n° 3 (1971).

[12] H.O. KREISS, Comm. Pure Appl. Math. 13, (1970).

[13] A. PIRIOU, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 21.1 (1971).

[14] J. RAUCH, A paraître aux Comm. Pure Appl. Math.

[15] R. SAKAMOTO, J. of Math., Kyoto Univ., Vol. 10, n° 2 et 3 (1970).