

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

HAÏM BRÉZIS

**Étude d'écoulements stationnaires à l'aide des
inéquationnelles**

Séminaire Jean Leray, n° 4 (1972-1973), exp. n° 2, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1972-1973__4_A2_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE D'ÉCOULEMENTS STATIONNAIRES À L'AIDE
DES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES
par Haïm BRÉZIS

L'objet de cet exposé est de présenter une nouvelle méthode, obtenue en collaboration avec G. Stampacchia, pour déterminer un écoulement irrotationnel d'un fluide parfait compressible autour d'un profil plan convexe et symétrique, en régime subsonique. Introduisant une nouvelle inconnue liée à la fonction courant, on montre que ce problème peut être réduit dans le plan de l'hodographe, à la résolution d'une inéquation variationnelle simple.

1. L'ÉQUATION DE L'ÉCOULEMENT DANS LE PLAN DE L'HODOGRAPHE.

Soit Γ un profil plan convexe et symétrique par rapport à l'axe $x'Ox$. On considère des écoulements symétriques autour de Γ , de vitesse uniforme à l'infini $\vec{q}_\infty$ avec $\vec{q}_\infty$ parallèle à l'axe $x'Ox$. On désigne par $\vec{q}(x,y)$ le vecteur vitesse, de composantes (q_1, q_2) et de module $q = (q_1^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}}$. Commençons par quelques brefs rappels. Les équations régissant l'écoulement irrotationnel d'un fluide parfait sont :

$$(1) \quad \operatorname{div}(\rho \vec{q}) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho q_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho q_2) = 0$$

et

$$(2) \quad \operatorname{rot} \vec{q} = \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0$$

où ρ désigne la densité.

La densité et la pression sont liées par une relation qui dépend des propriétés physiques du fluide. À l'aide de l'équation de Bernouilli on obtient une relation liant ρ et q , soit

$$(3) \quad \rho = h(q)$$

où h est une fonction régulière et décroissante de q .

Exemples :

- pour les fluides incompressibles $h = C^{te}$

- pour les gaz polytropiques $h(q) = C_1 (1 - C_2 q^2)^{\frac{1}{\gamma-1}}$ où C_1 , C_2 et γ sont des constantes.

On définit la fonction courant $\psi(x,y)$ à l'aide des relations

$$(4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho q_2, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho q_1$$

D'où l'on obtient

$$qh(q) = \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

et on en déduit q en fonction de ψ_x et ψ_y . Utilisant alors (2) on arrive à l'équation

$$(5) \quad \left(1 - \frac{q_1^2}{a^2(q)} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{q_2^2}{a^2(q)} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{2q_1 q_2}{a^2(q)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\text{où} \quad a^2(q) = - \frac{qh(q)}{h'(q)}$$

(noter qu'en incompressible, il vient simplement $\Delta \psi = 0$). On est ainsi conduit à résoudre une équation non linéaire du 2ème ordre de type mixte en général.

Plus précisément, soit

$$\Delta = \frac{q_1^2 q_2^2}{a^4(q)} - \left(1 - \frac{q_1^2}{a^2(q)} \right) \left(1 - \frac{q_2^2}{a^2(q)} \right) = -1 + \frac{q^2}{a^2(q)} ;$$

l'équation (5) est elliptique dans le domaine où $\Delta < 0$ i.e. $q < a(q)$ et hyperbolique dans le domaine où $\Delta > 0$ i.e. $q > a(q)$. On désigne par q_c (vitesse du son) la solution de l'équation $q_c = a(q_c)$. De sorte que l'équation (5) est elliptique dans la région subsonique ($q < q_c$) et hyperbolique dans la région supersonique ($q > q_c$).

La condition aux limites le long de $\mathcal{P}$ est $\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$ ($\vec{n}$ est la normale à $\mathcal{P}$) et équivaut à : $\psi = \text{Cte}$ sur $\mathcal{P}$.

On prendra

$$(6) \quad \psi = 0 \text{ sur } \mathcal{P}.$$

A cause de la symétrie on a aussi $\psi = 0$ sur l'axe $x'x$ et on se limitera dans toute la suite à l'étude de ψ dans le demi-plan supérieur où l'on peut supposer sans restreindre la généralité que $\psi \geq 0$.

Les résultats de Shiffman, Bers, Finn, Gilbarg etc... (cf. [2] pour une bibliographie détaillée) assurent l'existence et l'unicité d'une solution ψ , correspondant à un écoulement subsonique pourvu que $q_\infty < \hat{q}$; lorsque $q_\infty \rightarrow \hat{q}$ la vitesse q devient sonique en certains points de $\mathcal{P}$. Malheureusement les démonstrations ne sont pas constructives (elles utilisent en particulier le théorème de point fixe de Schauder) et ne suggèrent aucun procédé de calcul numérique.

La méthode de l'hodographe, que nous rappelons ci-dessous est fort intéressante car elle conduit à des équations linéaires et permet des calculs plus simples

(d'où sa popularité !). Le principal inconvénient de cette méthode est que l'on doit résoudre une équation linéaire sur un domaine a priori inconnu. En fait, on est en présence d'un problème à frontière libre qui peut être réduit à une inéquation variationnelle comme on le verra dans la suite.

Après la transformation de l'hodographe $\mathcal{E} : (x, y) \rightarrow (\theta, q)$ où $\theta = \text{Arg } \vec{q}$, l'équation (5) devient (Cf. [2], [3])

$$(7) \quad q \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{qh(q)} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{q}{h(q)} \frac{\partial \psi}{\partial q} \right)$$

qui est linéaire (équation de Chaplygin).

Notons que dans le cas incompressible on trouve simplement

$$q^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + q \frac{\partial \psi}{\partial q} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0.$$

Cette équation est elliptique dégénérée en $q = 0$.

Un changement de variable

$$(8) \quad \sigma = \int_q^{q_c} h(\tau) \frac{d\tau}{\tau}$$

permet d'éviter cette dégénérescence. On obtient alors au lieu de (7), l'équation de Tricomi

$$(9) \quad k(\sigma) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} = 0$$

où l'on désigne par $q(\sigma)$ la fonction réciproque de la fonction $q \rightarrow \sigma = \int_q^{q_c} h(\tau) \frac{d\tau}{\tau}$ et par

$$k(\sigma) = \frac{1}{h^2(q(\sigma))} \left\{ 1 - \frac{q^2(\sigma)}{a^2(q(\sigma))} \right\}.$$

Il est clair que $k(\sigma) > 0$ pour $\sigma > 0$ (ce qui correspond à $q < q_c$, i.e. à la zone subsonique), et que $k(\sigma) < 0$ pour $\sigma < 0$.

2. LES CONDITIONS AUX LIMITES DANS L'HODOGRAPHE.

Le profil $\mathcal{P}$ est transformé par $\mathcal{E}$ en une courbe Γ située entièrement dans le demi plan $\sigma > 0$ (car l'écoulement est supposé totalement subsonique). On désigne par $\theta = \theta(P)$ l'angle que la tangente à $\mathcal{P}$ en $P \in \mathcal{P}$ forme avec l'axe $x'x$ et par $R(\theta)$ le rayon de courbure algébrique de $\mathcal{P}$ en P ($R(\theta) < 0$ à cause de la convexité de $\mathcal{P}$). On suppose que

$$\theta_0 - \theta_1 < \pi$$

où $\theta_0 = \theta(A)$ et $\theta_1 = \theta(B)$.

La courbe Γ représente la distribution des vitesses (ou plutôt des σ) le long du profil P , en fonction de θ . Insistons sur le fait que Γ n'est pas donné a priori dans l'hodographe, mais doit être considéré comme une frontière libre.

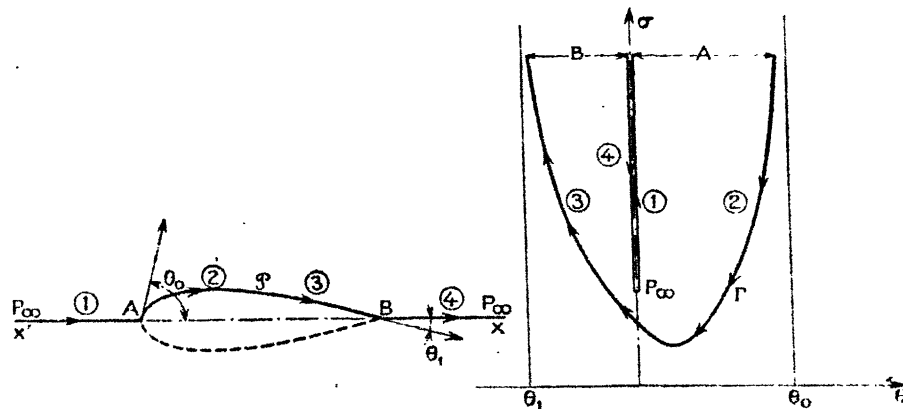


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 1. — Plan physique.

Fig. 2. — Plan de l'hodographe.

Le lemme suivant (prouvé par exemple dans [3] p. 46) précise les conditions aux limites dans l'hodographe.

LEMME 1. Le long de Γ , d'équation $\sigma = \ell(\theta)$, on a

$$(10) \quad \psi = 0$$

$$(11) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = - \frac{R(\theta)q(\sigma)}{1+k(\sigma)\left(\frac{d\ell}{d\theta}\right)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{R(\theta)q(\sigma)\frac{d\ell}{d\theta}}{1+k(\sigma)\left(\frac{d\ell}{d\theta}\right)^2}$$

Enfin on a

$$(12) \quad \psi(0, \sigma) = 0 \quad \text{pour} \quad \sigma \geq \sigma_\infty \quad \text{où} \quad \sigma_\infty = \int_{q_\infty}^{q_c} h(\tau) \frac{d\tau}{\tau}$$

3. CHANGEMENT DE FONCTION INCONNUE.

On introduit la fonction

$$(12') \quad u(\theta, \sigma) = \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} \frac{k(\tau)}{q(\tau)} \psi(\theta, \tau) d\tau$$

définie pour $\sigma > \ell(\theta)$ et $\theta_1 < \theta < \theta_0$.

Cette transformation est suggérée par la méthode utilisée par Baiocchi [1] dans un problème à frontière libre en hydrodynamique.

On définit l'ouvert $\mathcal{B}$ par

$$\mathcal{B} = \{[\theta, \sigma] ; \sigma > \ell(\theta) \text{ et } \theta_1 < \theta < \theta_0\} \setminus \{[0, \sigma] ; \sigma \geq \sigma_\infty\} .$$

Le lemme suivant sera utile dans la suite

LEMME 2. La fonction u vérifie :

$$(13) \quad \frac{1}{q^2(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{q^2(\sigma)}{k(\sigma)} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u = -R(\theta) \quad \text{sur } \mathcal{B}$$

$$(14) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

$$(15) \quad \text{gradu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

$$(16) \quad u(0, \sigma) = \text{cte} \quad \text{pour } \sigma \geq \sigma_\infty$$

Démonstration du lemme 2

On a

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{k(\sigma)}{q(\sigma)} \psi$$

et par suite

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{q^2(\sigma)}{k(\sigma)} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma} (q(\sigma) \psi) = \frac{dq}{d\sigma}(\sigma) \psi + q(\sigma) \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = - \frac{q(\sigma)}{h(q(\sigma))} \psi + q(\sigma) \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}$$

grâce à

$$(17) \quad \frac{dq}{d\sigma}(\sigma) = - \frac{q(\sigma)}{h(q(\sigma))} .$$

D'autre part

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} \frac{k(\tau)}{q(\tau)} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta, \tau) d\tau \quad (\text{utiliser (10)})$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= - \frac{k(\ell(\theta))}{q(\ell(\theta))} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta, \ell(\theta)) \frac{d\ell}{d\theta} + \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} \frac{k(\tau)}{q(\tau)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}(\theta, \tau) d\tau \\ &= - \frac{R(\theta) k(\ell(\theta)) \left(\frac{d\ell}{d\theta} \right)^2}{1 + k(\ell(\theta)) \left(\frac{d\ell}{d\theta} \right)^2} + \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} \frac{k(\tau)}{q(\tau)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}(\theta, \tau) d\tau \end{aligned}$$

$$= - \frac{R(\theta) k(\ell(\theta)) \left(\frac{d\ell}{d\theta} \right)^2}{1 + k(\ell(\theta)) \left(\frac{d\ell}{d\theta} \right)^2} - \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} \frac{1}{q(\tau)} \frac{\partial^2 \psi(\theta, \tau)}{\partial \sigma^2} d\tau$$

(en utilisant (11) et (9)) .

Or

$$\begin{aligned} \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} \frac{1}{q(\tau)} \frac{\partial^2 \psi(\theta, \tau)}{\partial \tau^2} d\tau &= \frac{1}{q(\sigma)} \frac{\partial \psi(\theta, \sigma)}{\partial \sigma} - \frac{1}{q(\ell(\theta))} \frac{\partial \psi(\theta, \ell(\theta))}{\partial \sigma} - \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} \frac{1}{q^2(\tau)} \frac{dq(\tau)}{d\tau} \frac{\partial \psi(\theta, \sigma)}{\partial \sigma} d\tau \\ &= \frac{1}{q(\sigma)} \frac{\partial \psi(\theta, \sigma)}{\partial \sigma} + \frac{R(\theta)}{1 + k(\ell(\theta)) \left(\frac{d\ell}{d\theta} \right)^2} - \frac{1}{q^2(\sigma)} \frac{dq(\sigma)}{d\sigma} \psi(\theta, \sigma) \\ &\quad + \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{q^2(\tau)} \frac{dq(\tau)}{d\tau} \right) \psi(\theta, \tau) d\tau . \end{aligned}$$

Il vient enfin

$$\frac{1}{q^2(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{q^2(\sigma)}{k(\sigma)} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u = -R(\theta) + \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} \left\{ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{q^2(\tau)} \frac{dq(\tau)}{d\tau} \right) + \frac{k(\tau)}{q(\tau)} \right\} \psi(\theta, \tau) d\tau .$$

On conclut en notant que

$$\frac{k(\sigma)}{q(\sigma)} + \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{q^2(\sigma)} \frac{dq(\sigma)}{d\sigma} \right) = 0 .$$

En effet dérivant (17) on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{q^2(\sigma)} \frac{dq(\sigma)}{d\sigma} \right) &= - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{q^2(\sigma) h(q(\sigma))} \right) = \frac{dq(\sigma)}{d\sigma} \frac{1}{q(\sigma) h(q(\sigma))} \left(\frac{1}{q(\sigma)} + \frac{h'(q(\sigma))}{h(q(\sigma))} \right) \\ &= - \frac{1}{h^2(q(\sigma))} \left(\frac{1}{q(\sigma)} + \frac{h'(q(\sigma))}{h(q(\sigma))} \right) = - \frac{k(\sigma)}{q(\sigma)} . \end{aligned}$$

On prolonge maintenant u en dehors de $\bar{\mathcal{D}}$ par 0 sur

$$\Omega = \left\{ [\theta, \sigma] \ ; \ \theta_1 < \theta < \theta_0 \text{ et } \sigma > 0 \right\}$$

On considère l'espace fonctionnel

$$V = \left\{ v(\theta, \sigma) \ ; \ q(\sigma) v(\theta, \sigma) \in L^2(\Omega) \ , \ q(\sigma) \frac{\partial v(\theta, \sigma)}{\partial \theta} \in L^2(\Omega) \ , \ \frac{q(\sigma)}{\sqrt{k(\sigma)}} \frac{\partial v(\theta, \sigma)}{\partial \sigma} \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$\text{et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

et le convexe

$$K_H = \left\{ v \in V \ ; \ v \geq 0 \text{ sur } \Omega \text{ et } v(0, \sigma) = H \text{ pour } \sigma \geq \sigma_{\infty} \right\}$$

où H désigne la moitié de l'épaisseur maximum du profil φ .

On introduit la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{k(\sigma)} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} - uv \right) q^2(\sigma) d\theta d\sigma$$

qui est coercive sur V à cause de l'hypothèse $\theta_0 - \theta_1 < \pi$.

Le résultat principal est le suivant :

THEOREME 1. La fonction u définie par (12) appartient à K_H et vérifie l'inéquation variationnelle

$$(18) \quad a(u, v-u) \geq \int_{\Omega} R(\theta) (v-u) q^2(\sigma) d\theta d\sigma \text{ pour tout } v \in K_H.$$

Conséquence : Etant donnés le profil φ (et donc $\theta_0, \theta_1, R(\theta)$ et H), les propriétés physiques du fluide (et donc $q(\sigma)$ et $k(\sigma)$) ainsi que la vitesse à l'infini (et donc σ_{∞}), il existe $u \in K_H$ unique solution de (18) ; des méthodes numériques efficaces permettent d'ailleurs le calcul de u .

On pose alors

$$\mathcal{A} = \left\{ [\theta, \sigma] \in \Omega ; u(\theta, \sigma) > 0 \right\}.$$

On distingue deux cas :

- Si $\mathcal{A} \cap \{\sigma = 0\} = \emptyset$, alors la courbe Γ , frontière de $\mathcal{A}$ représente la distribution des vitesses le long de φ et $\psi(\theta, \sigma) = \frac{q(\sigma)}{k(\sigma)} \frac{\partial u}{\partial \sigma}(\theta, \sigma)$ représente sur $\mathcal{A}$ la fonction courant cherchée.

- Si $\mathcal{A} \cap \{\sigma = 0\} \neq \emptyset$, la solution obtenue ne correspond physiquement à rien : il s'agit du cas où $q_{\infty} \geq \hat{q}$ et l'écoulement n'est pas totalement subsanique.

Principe de la démonstration du théorème 1.

Il est clair que $u \geq 0$ sur $\mathcal{A}$ puisque $\psi \geq 0$ sur $\mathcal{A}$. En intégrant par parties (formellement) on a

$$\begin{aligned} a(u, v-u) &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{k(\sigma)} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}(v-u) + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(v-u) - u(v-u) \right\} q^2(\sigma) d\theta d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \left\{ - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{q^2(\sigma)}{k(\sigma)} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) - q^2(\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - q^2(\sigma) u \right\} (v-u) d\theta d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \left\{ - \frac{1}{q^2(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{q^2(\sigma)}{k(\sigma)} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u \right\} (v-u) q^2(\sigma) d\theta d\sigma \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathcal{A}} \left\{ -\frac{1}{q^2(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{q^2(\sigma)}{k(\sigma)} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u \right\} (v-u) q^2(\sigma) d\theta d\sigma$$

puisque $u = 0$ en dehors de $\mathcal{B}$.

On déduit du lemme 2 que

$$a(u, v-u) = \int_{\mathcal{A}} R(\theta)(v-u)q^2(\sigma)d\theta d\sigma \geq \int_{\Omega} R(\theta)(v-u)q^2(\sigma)d\theta d\sigma$$

car

$$\int_{\Omega \setminus \mathcal{B}} R(\theta)(v-u)q^2(\sigma)d\theta d\sigma = \int_{\Omega \setminus \mathcal{B}} R(\theta)vq^2(\sigma)d\theta d\sigma \leq 0$$

($R(\theta) \leq 0$ à cause de la convexité de $\mathcal{P}$).

Il reste à vérifier que $u(0, \sigma) = H$ pour $\sigma \geq \sigma_{\infty}$. Il est clair que pour $\sigma \geq \sigma_{\infty}$ on a

$$u(0, \sigma) = \int_{\ell(0)}^{\sigma_{\infty}} \frac{k(\tau)}{q(\tau)} \psi(0, \tau) d\tau.$$

Pour prouver que $H = \int_{\ell(0)}^{\sigma_{\infty}} \frac{k(\tau)}{q(\tau)} \psi(0, \tau) d\tau$, on peut procéder de la manière suivante :

pour chaque constante $C \geq 0$, soit

$$K_C = \{v \in V ; v \geq 0 \text{ sur } \Omega \text{ et } v(0, \sigma) = C \text{ pour } \sigma \geq \sigma_{\infty}\}$$

et soit $u_C \in \mathcal{F}_C$ la solution de l'inéquation

$$a(u_C, v-u_C) \geq \int_{\Omega} R(\theta)(v-u_C)q^2(\sigma)d\theta d\sigma \quad \forall v \in K_C.$$

On montre à l'aide d'une variante du principe du maximum que pour chaque θ fixé, la fonction $\sigma \rightarrow u_C(\theta, \sigma)$ est croissante et tend vers une limite $w_C(\theta)$ quand $\sigma \rightarrow +\infty$. De plus on établit que $w_C(\theta) \in K_C$ où

$$K_C = \{\zeta \in H_0^1(\theta_1, \theta_0) ; \zeta \geq 0 \text{ sur } [\theta_1, \theta_0] \text{ et } \zeta(0) = C\}$$

et que pour tout $\zeta \in K_C$ on a

$$\int_{\theta_1}^{\theta_0} \left\{ \frac{dw_C}{d\theta} \left(\frac{d\zeta}{d\theta} - \frac{dw}{d\theta} \right) - w(\zeta-w) \right\} d\theta \geq \int_{\theta_1}^{\theta_0} R(\theta)(\zeta-w)d\theta.$$

Prenant maintenant $C = \int_{\ell(0)}^{\sigma_{\infty}} \frac{k(\tau)}{q(\tau)} \psi(0, \tau) d\tau$, alors $u(\theta, \sigma) = u_C(\theta, \sigma)$. La

fonction correspondante $w_C(\theta)$ vérifie nécessairement

$$w_C(\theta) > 0 \text{ sur }]\theta_1, \theta_0[$$

et par conséquent

$$(19) \quad \frac{d^2 w_c}{d\theta^2} + w_c = R \quad \text{sur }]\theta_1, 0[\quad \text{et sur }]0, \theta_0[\quad .$$

Enfin on montre que $u(\theta, \sigma)$ demeure borné dans $H^2(\theta_1, 0)$ et $H^2(0, \theta_0)$ quand $\sigma \rightarrow +\infty$. D'où il résulte en particulier que

$$\frac{dw_c}{d\theta}(\theta_0) = \frac{dw_c}{d\theta}(\theta_1) = 0 \quad .$$

Enfin en intégrant explicitement (19) avec les conditions aux limites

$$w_c(\theta_0) = w_c(\theta_1) = 0$$

on obtient

$$C = w_c(0) = - \int_0^{\theta_1} R(\tau) \sin \tau \, d\tau = - \int_0^{\theta_0} R(\tau) \sin \tau \, d\tau = H \quad .$$

Remarque. La fonction $u(\theta, \sigma)$ que nous avons définie sur D par un procédé mathématique (formule (12)) n'est pas totalement étrangère aux mécaniciens. En effet, elle est liée par une relation simple à la transformée de Legendre Ψ de la fonction courant ψ .

Plus précisément (cf. [4], p. 263) on a

$$\Psi(q_1, q_2) = \rho q_1 y - \rho q_2 x - \psi(x, y)$$

c'est-à-dire

$$\Psi(\theta, q) = \rho(y \cos \theta - x \sin \theta) - \psi(x, y)$$

$$\text{cù } (\theta, q) = \mathcal{E}(x, y) \quad .$$

On montre alors que

$$\Psi(\theta, q(\sigma)) + q(\sigma) \rho u(\theta, \sigma) = q(\sigma) \rho (y_0(\theta) \cos \theta - x_0(\theta) \sin \theta)$$

où $x_0(\theta)$ et $y_0(\theta)$ désignent les coordonnées du point P de ρ où la tangente à ρ fait un angle θ avec l'axe $x'x$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BAIOCCHI, Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica. *Annali di Mat. Pura ed Applic.* 92 (1972), p. 107-127.
- [2] L. BERS, *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics*, Chapman and Hall, London 1958.
- [3] C. FERRARI et F. TRICOMI, *Aerodinamica transonica*, Cremonese, Rome 1962.
- [4] R. VON MISES, *Mathematical theory of compressible fluid flow*, Acad. Press.