Haïm Brezis

Inéquations variationnelles paraboliques

Séminaire Jean Leray (1971), exp. nº 7, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1971____A7_0>

INÉQUATIONS VARIATIONNELLES PARABOLIQUES

par Haïm BREZIS

En 1965 J.L. Lions et G. Stampacchia [9] introduisaient un nouveau type de problème pour des opérateurs paraboliques qu'ils intitulaient inéquations variationnelles. Ces auteurs montraient alors l'existence et l'unicité d'une solution faible et soulevaient la question de la régularité. Dans cet exposé nous reprenons le même problème dans un cadre plus général en indiquant quelques propriétés supplémentaires des solutions faibles.

Nous étudions ensuite la régularité de la solution à l'aide d'un outil développé récemment : la théorie des semi-groupes non-linéaires.

On trouvera dans [1] le détail des démonstrations que nous esquissons seulement ici.

§ I. Quelques rappels sur les inéquations elliptiques.

Soit $\mathcal{V}$ un espace de Hilbert(1) de norme $\| \ \|$ et soit $\mathcal{V}'$ son dual, non identifié à $\mathcal{V}$. Soit $\mathcal{K}$ un convexe fermé de $\mathcal{V}$ et soit A une application linéaire continue et coercive de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$.

On a alors le

THÉORÈME 1 (Stampacchia [10]). <u>Pour tout</u> $f \in \mathcal{V}'$ <u>il existe</u> $u \in \mathcal{K}$ <u>unique solution de l'inéquation</u>

$$(1) \qquad (Au, v-u) \geqq (f, v-u) \quad \forall\ v \in \mathcal{K} .$$

Un grand nombre de problèmes de ce type interviennent en mécanique et en théorie du contrôle optimal. En effet lorsque A est autoadjoint, le problème (1) équivaut à minimiser sur $\mathcal{K}$ la fonctionnelle $\frac{1}{2}(Au,u) - (f,u)$.

Indiquons quelques exemples.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, borné et de frontière Γ très régulière.

<u>Exemple</u> 1. $\mathcal{V} = H^1_0(\Omega)$

$$\mathcal{K}_1 = \{u \in H^1_0(\Omega) ; u \geqq \psi \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

où ψ est une fonction donnée de $H^1(\Omega)$ avec $\psi \leqq 0$ sur Γ .

A est défini par la forme bilinéaire

$$(Au,v) = \int_\Omega \Sigma \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx .$$

Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, le problème (1) admet une solution unique u .

(1) Ceci est pour simplifier car un grand nombre de résultats s'étendent aux espaces de Banach reflexifs.

On montre de plus (cf. H. Lewy-G. Stampacchia [7] et H. Brezis-G. Stampacchia [2]) que si $f \in L^p(\Omega)$ et si $\psi \in W^{2,p}(\Omega)$ alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

Exemple 2. $\mathcal{V} = H^1_0(\Omega)$

$$\mathcal{K}_2 = \{u \in H^1_0(\Omega) \; ; \; |\mathrm{grad}\, u| \leq 1 \text{ p.p. sur } \Omega\}$$
$$= \{u \in C(\bar{\Omega}) \; ; \; |u(x)-u(y)| \leq |x-y| \;\; \forall\, x,y \in \bar{\Omega}\}$$

A est défini comme à l'exemple 1.

Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$ le problème 1 admet une solution unique u .

On montre de plus (cf. H. Brezis-G. Stampacchia [2]) que si $f \in L^p(\Omega)$ alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

Exemple 3. $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$

$$\mathcal{K}_3 = \{u \in H^1(\Omega) \; ; \; u \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma\}$$

A est défini par la forme bilinéaire

$$(Au,v) = \int_\Omega \Sigma \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega u.v \, dx \, .$$

Pour tout $f \in \mathcal{V}'$ le problème (1) admet une solution unique u .

On montre de plus (cf. J.L. Lions [8] et H. Brezis [1]) que si $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq 2$, alors $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,p^*}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ si $p < N$ et p^* arbitraire si $p > N$.

Pour ces trois exemples on prouve aussi le résultat suivant.

Soient $f_1, f_2 \in L^p(\Omega)$ et soient $u_1, u_2 \in \mathcal{K}$ les solutions respectives des inéquations

$$(Au_1 + u_1, v-u_1) \geq (f, v-u_1) \qquad \forall\, v \in \mathcal{K}$$
$$(Au_2 + u_2, v-u_2) \geq (f, v-u_2) \qquad \forall\, v \in \mathcal{K} \, .$$

Alors

$$\|u_1 - u_2\|_{L^p} \leq \|f_1 - f_2\|_{L^p} \quad .$$

§ II. Inéquations variationnelles paraboliques ; formulation faible.

On introduit maintenant un second espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de norme $|\;|$ tel que

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$$

avec injections continues et denses.

On pose $V = L^2(0,T;\mathcal{V})$, $H = L^2(0,T;\mathcal{H})$ et $V' = L^2(0,T;\mathcal{V}')$.

$\mathcal{K}$ étant un convexe fermé de $\mathcal{V}$, on introduit le convexe fermé de V

$$K = \{u \in V ; u(t) \in \mathcal{K} \text{ p.p. sur }]0,T[\} \, .$$

Enfin on étend $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ en un opérateur linéaire continu et coercif de V dans V'. Pour simplifier l'exposé nous avons supposé A linéaire mais la plupart des résultats s'étendent à des opérateurs non-linéaires monotones et même à des opérateurs plus généraux (par exemple ceux vérifiant les hypothèses introduites par J. Leray et J.L. Lions [6]).

Etant donnés $f \in V'$ et $u_0 \in \mathcal{H}$, on cherche $u \in K$ tel que $\frac{du}{dt} \in V'$, vérifiant

$$(2) \quad \begin{cases} (\frac{du}{dt} + Au, v-u) \geq (f, v-u) & \forall\ v \in K \text{ p.p.sur }]0,T[\\ u(0) = u_0 . \end{cases}$$

On dit alors que u est une <u>solution forte</u>. On associe à cette formulation forte la notion de solution faible.

Notons d'abord que si u est une solution forte on a

$$(\frac{dv}{dt} + Au, v-u) = (\frac{du}{dt} + Au, v-u) + (\frac{dv}{dt} - \frac{du}{dt}, v-u)$$
$$\geq (f, v-u) + \tfrac{1}{2} \frac{d}{dt} |v-u|^2 \quad \forall\ v \in K\ ;\ \frac{dv}{dt} \in V' .$$

Intégrant cette inégalité sur $]0,T[$ il vient

$$\int_0^T (\frac{dv}{dt} + Au, v-u)dt \geq \int_0^T (f, v-u)dt - \tfrac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 .$$

On dit que u est une <u>solution faible</u> si $u \in K$ et vérifie

$$(3) \quad \int_0^T (\frac{dv}{dt} + Au, v-u)dt \geq \int_0^T (f, v-u)dt - \tfrac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 \qquad \forall\ v \in K\ ;\ \frac{dv}{dt} \in V' .$$

On a alors le

THÉORÈME 2. <u>Pour tout</u> $f \in V'$ <u>et tout</u> $u_0 \in \bar{K}^{\mathcal{H}}$ <u>il existe une solution faible unique.</u>

<u>Principe de la démonstration.</u> Nous n'insistons pas sur le résultat d'existence qui peut être prouvé de nombreuses manières lorsque $u_0 \in K$ (cf. par exemple J.L. Lions [8]). Dans le cas général on considère une suite $u_{0n} \in K$ telle que $u_{0n} \to u_0$ dans $\mathcal{H}$ et on montre sans difficultés que les solutions correspondantes convergent vers une solution faible.

Pour établir l'unicité nous utilisons le

LEMME 1. <u>Soient</u> $g \in V'$, $u \in K$ et $u_0 \in \bar{K}^{\mathcal{H}}$. <u>Alors</u>

$$\operatorname*{Inf}_{v \in K;\frac{dv}{dt} \in V'} \int_0^T (\frac{dv}{dt} + g, v-u)dt + \tfrac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 \leq 0 .$$

<u>Démonstration du lemme</u> 1. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + g, v-u\right)dt + \tfrac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 \geqq \alpha \qquad \forall\, v \in K\ ;\ \frac{dv}{dt} \in V' . \tag{4}$$

Soit $\xi \in \mathcal{H}$ et soit $\varepsilon > 0$; on désigne par u_ε la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} u_\varepsilon + \varepsilon \dfrac{du_\varepsilon}{dt} = u \quad \text{sur } [0,T] \\ u_\varepsilon(0) = \xi . \end{cases}$$

Cette équation admet une solution explicite

$$u_\varepsilon(t) = e^{-t/\varepsilon}\xi + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\varepsilon}}\, u(s)ds.$$

On vérifie aisément que $u_\varepsilon(t) \in \mathcal{H}$ $\forall\, t \in [0,T]$ et donc $u_\varepsilon \in K$. D'autre part il est bien connu que $u_\varepsilon \to u$ dans V quand $\varepsilon \to 0$. Reportant $v = u_\varepsilon$ dans (4) on obtient

$$-\varepsilon \int_0^T \left|\frac{du_\varepsilon}{dt}\right|^2 dt + \int_0^T (g, u_\varepsilon - u)dt + \tfrac{1}{2}|\xi - u_0|^2 \geqq \alpha .$$

D'où

$$\int_0^T (g, u_\varepsilon - u)dt + \tfrac{1}{2}|\xi - u_0|^2 \geqq \alpha .$$

Passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$ il vient

$$\tfrac{1}{2}|\xi - u_0|^2 \geqq \alpha \qquad \forall\, \xi \in \mathcal{H}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse $u_0 \in \overline{\mathcal{H}}^{\mathcal{H}}$.

<u>Fin de la démonstration du théorème</u> 2. Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles i.e.

$$\int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + Au_1, v-u_1\right)dt \geqq \int_0^T (f, v-u_1)dt - \tfrac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 \tag{5}$$

$$\int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + Au_2, v-u_2\right)dt \geqq \int_0^T (f, v-u_2)dt - \tfrac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 \qquad \forall\, v \in K\ ;\ \frac{dv}{dt} \in V'. \tag{6}$$

On introduit $u = \frac{u_1+u_2}{2}$. Par addition de (5) et (6) il vient

$$2\int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v-u\right)dt + \int_0^T (Au_1, v-u_1) + (Au_2, v-u_2)dt \geqq 2\int_0^T (f, v-u)dt - |v(0)-u_0|^2 .$$

Soit

$$2\int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v-u\right)dt + 2\int_0^T (Au, v-u)dt + \int_0^T \left(Au_1, \frac{u_2-u_1}{2}\right)dt + \int_0^T \left(Au_2, \frac{u_1-u_2}{2}\right)dt \geq 2\int_0^T (f, v-u)dt - |v(0)-u_0|^2 .$$

Par conséquent, on a

$$\frac{1}{4}\int_0^T (Au_1-Au_2, u_1-u_2)dt \leq \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}+g, v-u\right)dt + \frac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 \qquad \forall\ v\in K\ ;\ \frac{dv}{dt}\in V'$$

où $g = Au-f$. Grâce au lemme 1, on obtient finalement $u_1 = u_2$.

Dans le théorème suivant nous indiquons quelques propriétés de la solution faible :

THÉORÈME 3. <u>Soient</u> $g\in V'$, $u\in K$ <u>et</u> $u_0\in\bar{K}^{\mathcal{H}}$ <u>vérifiant</u>

$$\int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + g, v-u\right)dt \geq -\frac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 \qquad \forall\ v\in K\ ,\ \frac{dv}{dt}\in V' . \tag{7}$$

Alors $u\in C(0,T;\mathcal{H})$ et $u(0) = u_0$. De plus, pour tout $v\in K$ tel que $\frac{dv}{dt}\in V'$ la fonction $t \longmapsto |v(t)-u(t)|^2$ est à variation bornée et on a

$$\left(\frac{dv}{dt} + g, v-u\right) \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v-u|^2 \tag{8}$$

au sens des mesures sur $]0,T[$ (l'inégalité (8) est une forme "ponctuelle" de l'inégalité intégrale (7)).

Le théorème 3 sera prouvé à l'aide des théorèmes de régularité que nous présentons maintenant.

§ III. <u>Théorèmes de régularité</u>.

Indiquons d'abord un résultat simple de régularité qui est valable lorsque A est auto-adjoint; on pose dans ce cas $a(u) = (Au,u)$.

THÉORÈME 4. <u>Pour tout</u> $f\in H$ <u>et tout</u> $u_0\in K$, <u>il existe une solution forte unique</u>. <u>Plus précisément</u> $u\in C(0,T;\mathcal{V})$, $\frac{du}{dt}\in H$, $u(t)\in K$ $\forall\ t\in[0,T]$ <u>et on a</u>

$$\begin{cases} \left(\frac{du}{dt}+Au, v-u\right) \geq (f, v-u) & \forall\ v\in K\ ,\ \text{p.p. sur }]0,T[\\ u(0) = u_0 . \end{cases}$$

De plus la fonction $t \longmapsto a(u(t))$ est absolument continue et on a l'égalité

$$\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u(t)) = \left(f, \frac{du}{dt}\right) \quad \text{p.p. sur }]0,T[.$$

Principe de la démonstration. On sait déjà qu'il existe une solution faible i.e. $u \in K$ vérifie

$$(9) \qquad \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}+Au, v-u\right)dt \geq \int_0^T (f, v-u)dt - \tfrac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 \qquad \forall\ v \in K\ ;\ \frac{dv}{dt} \in V'\ .$$

Reportant dans (9) u_ε défini au cours de la démonstration du lemme 1, il vient

$$\int_0^T \left|\frac{du_\varepsilon}{dt}\right|^2 dt + \int_0^T \left(Au_\varepsilon, \frac{du_\varepsilon}{dt}\right)dt \leq \int_0^T \left(f, \frac{du_\varepsilon}{dt}\right)dt$$

soit

$$\int_0^T \left|\frac{du_\varepsilon}{dt}\right|^2 dt + \tfrac{1}{2}\, a(u_\varepsilon(T)) - \tfrac{1}{2}\, a(u_0) \leq \int_0^T \left(f, \frac{du_\varepsilon}{dt}\right)dt\ .$$

Il en résulte que $\frac{du_\varepsilon}{dt}$ est borné dans H et comme $u_\varepsilon \to u$ dans V quand $\varepsilon \to 0$, on a $\frac{du}{dt} \in H$ et $u(0) = u_0$. Enfin on montre que u est une solution forte en utilisant un artifice dû à Minty. Soit $v = (1-\theta)u + \theta w$ avec $w \in K$, $\frac{dw}{dt} \in V'$ et $w(0) = u_0$, $\theta \in]0,1]$.

Reportant v dans (9) on a

$$\theta \int_0^T \left((1-\theta)\frac{du}{dt} + \theta\,\frac{dw}{dt}+Au, w-u\right)dt \geq \theta \int_0^T (f, w-u)dt\ .$$

Divisant par θ et passant à la limite quand $\theta \to 0$, on a

$$\int_0^T \left(\frac{du}{dt}, w-u\right)dt + \int_0^T (Au, w-u)dt \geq \int_0^T (f, w-u) \quad \forall\ w \in K\ ,\ \frac{dw}{dt} \in V', w(0) = u_0.$$

On en déduit immédiatement que

$$(10) \qquad \left(\frac{du}{dt}, w-u\right) + (Au, w-u) \geq (f, w-u) \qquad \forall\ w \in K \text{ p.p. sur }]0,T[\ .$$

Pour le reste, indiquons formellement l'idée de la démonstration. Soit $h > 0$; prenant $w(t) = u(t \pm h)$ dans (10), on obtient après division par h et passage à la limite quand $h \to 0$

$$\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + \left(Au, \frac{du}{dt}\right) = \left(f, \frac{du}{dt}\right) \quad ,$$

ce qui prend un sens quand on l'écrit

$$\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\, a(u(t)) = \left(f, \frac{du}{dt}\right)\ .$$

A l'aide du théorème 4 nous pouvons indiquer le

<u>Principe de la démonstration du théorème</u> 3. Soit A l'isomorphisme canonique de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ (c'est un opérateur linéaire, continu, coercif et auto-adjoint). Comme u vérifie (7) on a

$$(11)\qquad \int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + Au, v-u\right)dt \geq \int_0^T (f, v-u) - \tfrac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 \qquad \forall\, v \in K\ ;\ \frac{dv}{dt} \in V'$$

avec $f = Au-g$.

Soit $f_n \in H$ une suite telle que $f_n \to f$ dans V' et soit $u_{on} \in \mathcal{H}$ une suite telle que $u_{on} \to u_o$ dans $\mathcal{H}$. D'après le théorème 4 il existe une solution forte u_n correspondant à f_n et u_{on} i.e.

$$(12)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{du_n}{dt} + Au_n, v-u_n\right) \geq (f_n, v-u_n) & \forall\, v \in K \text{ p.p. sur }]0,T[\\ u_n(0) = u_{on} \ . \end{cases}$$

On montre aisément que u_n est une suite de Cauchy dans $C(0,T;\mathcal{H})$ et dans V ; de plus u_n converge vers $\tilde{u}$ solution de (11). Grâce à l'unité on a $\tilde{u} = u$. Par ailleurs intégrant (12) sur $]t_1, t_2[$ avec $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ on obtient, après passage à la limite quand $n \to +\infty$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dv}{dt}, v-u\right)dt \geq \int_{t_1}^{t_2} (g, v-u)dt + \tfrac{1}{2}|v(t_2)-u(t_2)|^2 - \tfrac{1}{2}|v(t_1)-u(t_1)|^2$$
$$\forall\, v \in K\ ;\ \frac{dv}{dt} \in V' \ .$$

Autrement dit la fonction

$$t \longmapsto \int_0^t \left(\frac{dv}{dt} + g, v-u\right)dt - \tfrac{1}{2}|v(t)-u(t)|^2$$

est croissante avec t. On en déduit la seconde partie du théorème 3 .

La théorie des semi-groupes non-linéaires conduit à des théorèmes de régularité très précis, sans supposer nécessairement A auto-adjoint. Nous rappelons rapidement un des résultats principaux de cette théorie (cf. Kato [4], Komura [5], Crandall et Pazy [3]).

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit M une application multivoque de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. On pose $D(M) = \{u \in \mathcal{H} ; Mu \neq \emptyset\}$. On dit que M est monotone si

$$(v_1 - v_2, u_1 - u_2) \geq 0 \qquad \forall\, v_1 \in Mu_1 \ ,\ \forall\, v_2 \in Mu_2$$

et <u>maximal monotone</u> s'il n'existe aucun graphe monotone prolongeant strictement M . Un critère dû à Minty affirme que M est maximal monotone si et seulement si $I + \lambda M$ est surjectif $\forall\, \lambda > 0$.

On a alors le

THÉORÈME 5. Soit $f \in C(0,T;\mathcal{H})$ avec $\frac{df}{dt} \in L^1(0,T;\mathcal{H})$ et soit $u_o \in D(M)$. Alors il existe une fonction $u(t)$ unique telle que

$$\frac{du}{dt} \in L^\infty(0,T;\mathcal{H})$$

$$u(t) \in D(A) \qquad \forall\ t \in [0,T]$$

$$\frac{du}{dt} + Mu \ni f \qquad \text{p.p. sur }]0,T[$$

$$u(0) = u_o \ .$$

A l'aide du théorème 5 on établit le

THÉORÈME 6. Soit A linéaire continu et coercif (non nécessairement auto-adjoint) de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$. Soit $f \in C(0,T;\mathcal{H})$ tel que $\frac{df}{dt} \in L^1(0,T;\mathcal{H})$ et soit $u_o \in \mathcal{K}$ tel qu'il existe $\varphi_o \in \mathcal{H}$ avec $(Au_o, v-u_o) \geq (\varphi_o, v-u_o)$ $\forall\ v \in \mathcal{K}$. Alors l'inéquation (2) admet une solution forte unique. Plus précisément, on a

$$u \in C(0,T;\mathcal{V}) \ , \ \frac{du}{dt} \ L^\infty(0,T;\mathcal{H}) \cap L^2(0,T;\mathcal{V})$$

$$\begin{cases} (\frac{du}{dt} + Au, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall\ v \in K \quad \text{p.p. sur }]0,T[\\ U(0) = u_o \ . \end{cases}$$

Enfin, pour tout $t \in [0,T]$ il existe $\varphi(t) \in \mathcal{H}$ tel que

$$(Au(t), v-u(t)) \geq (\varphi(t), v-u(t)) \quad \forall\ v \in \mathcal{K} \ .$$

Principe de la démonstration du théorème 6. On applique le théorème 5 au graphe M défini de la manière suivante :

$$\varphi \in Mu \Leftrightarrow u \in \mathcal{K} \ , \ \varphi \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (Au, v-u) \geq (\varphi, v-u) \quad \forall\ v \in \mathcal{K} \ .$$

On vérifie grâce au critère de Minty que M est maximal monotone dans $\mathcal{H}$. D'autre part, résoudre l'inéquation (2) équivaut exactement à chercher la solution de l'équation multivoque

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Mu \ni f \\ u(0) = u_o \ . \end{cases}$$

Remarques

1) Le résultat de régularité obtenu au théorème 6 est optimal en t ; même si les données sont très régulières, en général $u \notin C^1(0,T;\mathcal{H})$.

2) Le théorème 6, combiné aux résultats rappelés au § I, permet d'obtenir des théorèmes de régularité en x lorsque A est un opérateur différentiel. Par ailleurs, on peut arriver à des résultats de régularité plus précis en utilisant la théorie des semi-groupes non-linéaires dans les espaces de Banach (on remplace $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ par $L^p(\Omega)$).

A titre indicatif nous avons groupé dans le tableau qui suit les résultats obtenus pour l'inéquation variationnelle parabolique correspondant aux données de l'exemple 1 du § I.

Soit $\psi \in W^{2,p}(\Omega)$ avec $\psi \leqq 0$ sur Γ fixé. Etant donnés f et $u_0 \geqq \psi$, il existe une fonction $u(x,t)$, unique, vérifiant en un sens faible les propriétés suivantes

$$u(x,t) \geqq \psi(x) \quad \text{p.p. sur } \Omega \times]0,T[$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \quad \text{aux points où} \quad u(x,t) > \psi(x)\ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{Max}\{\Delta u + f, 0\} \quad \text{aux points où} \quad u(x,t) = \psi(x)\ ,$$

$$u(x,t) = 0 \ , \ x \in \Gamma\ , \quad t \in]0,T[\ ,$$

$$u(x,0) = u_0(x) \ , \ x \in \Omega$$

De plus, on a :

HYPOTHÈSES	CONCLUSIONS
$f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ $u_0 \in L^2(\Omega)$	$u \in C(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$
$f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ $u_0 \in H^1_0(\Omega)$	$u \in C(0,T;H^1_0(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$ $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$
$f \in C(0,T;L^p(\Omega))$ $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0,T;L^p(\Omega))$ $u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$	$u \in C(0,T;L^p(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;W^{2,p}(\Omega))$ $\frac{\partial u}{\partial t}\ \ L^\infty(0,T;L^p(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ De plus $\forall\ t \in [0,T]$ $u(x,t) \in W^{2,p}(\Omega)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BREZIS. Thèse (à paraître)

[2] H. BREZIS-G. STAMPACCHIA. Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. Bull. Soc. Math. Fr. 96 (1968) 153-180.

[3] M.CRANDALL-A. PAZY. Semigroups of nonlinear contractions and dissipative sets. J. Funct. Anal. 3 (1969) 376-418.

[4] T. KATO, Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces. Proc. Symp. Nonlinear Funct. Anal. Chicago (1968).

[5] Y. KOMURA. Non linear semigroups in Hilbert spaces. J. Math. Soc. Jap. 19 (1967) 493-507.

[6] J. LERAY-J.L. LIONS. Quelques résultats de Visik... Bull. Soc. Math. Fr. 93 (1965) 97-107.

[7] H. LEWY-G. STAMPACCHIA. On the regularity of a solution of a variational inequality. Comm. Pure App. Math. 22 (1969) 153-188.

[8] J.L. LIONS. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires. Dunod-Gauthier-Villars, 1969.

[9] J.L. LIONS-G. STAMPACCHIA. Variational inequalities. Comm. Pure App. Math. 20 (1967) 493-519.

[10] G. STAMPACCHIA. Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes. C.R. Acad. Sci. Paris 258 (1964) 4413-4416.