Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Guy Pichon

Problèmes mathématiques de l'équation de Boltzmann relativiste

Séminaire Jean Leray (1971), exp. n° 5, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1971____A5_0>

PROBLÈMES MATHÉMATIQUES DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN RELATIVISTE

par Guy PICHON

Ce mémoire est consacré à l'étude de l'équation de Boltzmann relativiste et plus particulièrement à l'opérateur intégral de l'équation complète, à celui de l'équation linéarisée et au problème de Cauchy.

L'opérateur intégral de l'équation complète dépend essentiellement de la section efficace de choc $h(< p,q >, \cos\theta)$ laquelle est une fonction de l'énergie $< p,q >$ et de l'angle θ de déviation. Sous la seule hypothèse que h est une fonction symétrique de $\cos\theta$ nous obtenons des propriétés générales de cet opérateur qui ont en particulier comme conséquences le théorème H et le théorème des moments (cf. [1]).

La seconde partie est consacrée à la linéarisation de l'équation. Des études ont déjà été faites pour étudier l'équation de Boltzmann au voisinage de la solution d'équilibre $a\, e^{-\lambda p}$ et ceci par des développements à l'aide de diverses familles de polynômes (cf. par exemple [3], [12], [13]). Ici nous nous plaçons en Relativité restreinte et cherchons une solution sous la forme

$$F = a\, e^{-\frac{\lambda p}{2}} \left(e^{-\frac{\lambda p}{2}} + \varepsilon f\right)$$

en négligeant les termes en ε^2 et sans préjuger de la forme de la fonction f. Cette dernière satisfait alors à l'équation linéaire :

$$\text{(I)} \qquad \frac{p^\alpha}{p^0} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = -K(p) f + G(f) \ ,$$

K étant une fonction et G un opérateur intégral ne dépendant que du moment p. Avec une hypothèse simple sur la section efficace de choc, nous étudions le comportement asymptotique de la fonction $K(p)$ et obtenons des propriétés remarquables pour l'opérateur G, à savoir que G est un opérateur de Hilbert-Schmidt dans l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions de carré sommable en p et que $-K(p) + G$ est un opérateur dissipatif.

Pour étudier le problème de Cauchy pour l'équation (I), nous effectuons une transformation de Fourier par rapport aux variables d'espace (x^j) et nous ramenons à une équation de la forme :

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^0} = (A(\tilde{y}) + G)\hat{f} \ ,$$

$A(\tilde{y})$ étant un opérateur de multiplication dans $\mathcal{H}$ dépendant de la variable d'espace $\tilde{y}$; nous pouvons alors appliquer la théorie des semi-groupes d'opérateurs à un paramètre. Les propriétés obtenues pour les opérateurs K et G permettent alors une étude très précise du spectre de l'opérateur $A(\tilde{y})+G$. A l'aide d'une technique déjà utilisée par Arseniev pour un problème analogue (cf. [11]), nous montrons que ce spectr est tout entier dans un demi-plan $\mathrm{Re}\,\mu < -d_0$ avec $d_0 > 0$, ce qui a pour conséquence importante que la solution du problème (II) a pour limite 0 quand $x^0 \to +\infty$ au sens de la norme de l'espace des fonctions de carré sommable en p et $\tilde{y}$. Enfin, nous montrons que le problème de Cauchy pour l'équation (I) a une solution unique en un sens que nous précisons et nous étudions le comportement de cette solution quand $x^0 \to +\infty$.

I. L'équation de Boltzmann.

Dans cette première partie, nous allons rappeler l'expression de l'équation de Boltzmann en Relativité générale et en l'absence de champ électromagnétique. Pour l'établissement de cette équation, on pourra consulter [1], [2], [3]. Sur la variété espace temps V^4 on désignera par $g_{\alpha\beta}$ le tenseur métrique (cf. [4]) de signature $(+---)$. La vitesse de la lumière sera prise pour unité. Le fluide étudié est constitué d'un seul type de molécules. La masse d'une molécule est m et son quadrivecteur moment sera désigné par p, ou q.

Etant donné deux champs de vecteurs u et v quelconques, nous poserons :

$$uv = g_{\alpha\beta}\, u^\alpha v^\beta \qquad \text{et} \qquad < u,v > = \sqrt{|(uv)^2-(uu)(vv)|}\,.$$

En particulier, on a :

$$pp = m^2 \qquad < p,q > = \sqrt{(pq)^2 - m^4}\,.$$

Dans l'espace tangent au point (x^α) de V^4 on désignera par P le demi hyperboloïde d'équation :

$$g_{\alpha\beta}\, p^\alpha p^\beta = m^2\,;\; p^0 > 0\,.$$

Sur P nous prendrons la forme élément de volume invariante (cf. [3]) :

$$dP = \frac{\sqrt{-g}}{p^0}\, dp^1\, dp^2\, dp^3\,.$$

La probabilité pour qu'une molécule de moment p se trouve au point $x = (x^\alpha)$ de V^4 est décrite par la fonction $F(x,p)$.

Une molécule de moment p rencontrant une molécule de moment q, elles se retrouvent après le choc avec, comme moments respectifs, p' et q'. Nous supposerons les chocs élastiques, c'est-à-dire les relations :

$$p+q = p'+q' \qquad\qquad pp = qq = p'p' = q'q' = m^2\,.$$

On vérifie alors aisément les relations :

$$pq = p'q' \quad \text{et} \quad \langle p,q \rangle = \langle p',q' \rangle .$$

Quand x est fixé, nous ferons l'abus habituel de notations : $F(x,p) = F(p)$.

L'ÉQUATION DE BOLTZMANN

Elle s'écrit (cf. [1]) :

$$p^\alpha \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\rho}\, p^\beta p^\rho \frac{\partial F}{\partial p^\alpha} = I(F) \tag{I.1}$$

où les $\Gamma^\alpha_{\beta\rho}$ sont les symboles de Christoffel et I un opérateur intégral :

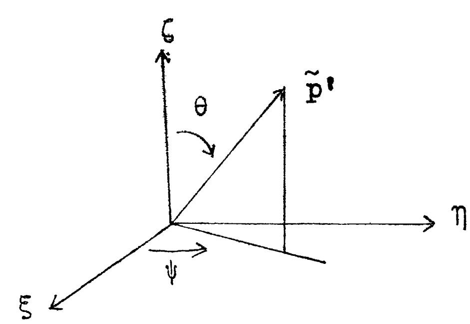
$$I(F) = \int_{P'}\int_Q [F(p')F(q') - F(p)F(q)] \langle p,q \rangle H(p,q,p')\, dP'dQ .$$

L'opérateur I est complètement déterminé quand on connait la fonction $H(p,q,p')$. Dans le cas du choc élastique, on peut prendre

$$H(p,q,p') = \frac{(p+q)(p+q)}{\langle p,q \rangle}\, h(\langle p,q \rangle, \cos\theta)\,\delta((p-p')(p+q)) \tag{I.2}$$

où δ désigne la mesure de Dirac et h une fonction dépendant seulement de deux arguments, à savoir $\langle p,q \rangle$ qui est un terme d'énergie et $\cos\theta$, θ étant l'angle de déviation. De façon plus précise pour calculer $I(F)$, on peut se placer dans une première phase dans l'espace à 3 dimensions orthogonal au vecteur $p+q$ et rapporter cet espace à un repère orthonormé ξ,η,ζ avec :

$$\zeta = \frac{p-q}{\sqrt{2(pq-m^2)}} .$$



En désignant par θ et ψ un système de coordonnées sphériques de la projection $\tilde{p}'$ de p' sur cet espace, on a :

$$\left\{\begin{aligned} p' &= \frac{p+q}{2} + \frac{\sqrt{pq-m^2}}{\sqrt{2}}(\xi \sin\theta \cos\psi + \eta \sin\theta \sin\psi + \zeta \cos\theta), \\ q' &= \frac{p+q}{2} - \frac{\sqrt{pq-m^2}}{\sqrt{2}}(\xi \sin\theta \cos\psi + \eta \sin\theta \sin\psi + \zeta \cos\theta) . \end{aligned}\right. \tag{I.3}$$

On vérifie alors aisément que l'on a :

$$1 + \cos\theta = \frac{2(pq-pp')}{pq-m^2}$$

et que l'on peut écrire (cf. [1]) :

$$I(F) = \int_Q < p,q > dQ\left[\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (F(p')F(q') - F(p)F(q))h(< p,q >, \cos\theta)\sin\theta \, d\theta d\psi\right]$$

où p' et q' sont donnés par les formules (I.3).

ÉTUDE DE L'OPÉRATEUR I.

Pour étudier quelques propriétés importantes de l'opérateur I nous poserons dans la formule (I.3) :

$$\sigma = \xi \sin\theta \cos\psi + \eta \sin\theta \sin\psi + \zeta \cos\theta \quad \text{et} \quad d\sigma = \sin\theta \, d\theta \, d\psi \, .$$

Pour abréger les notations, étant donné une fonction $f(p)$, nous poserons :

$$f(p) = f \, , \quad f(q) = f_1 \, , \quad f(p') = f' \quad , f(q') = f_1'$$

et pour deux fonctions f et g :

$$[f,g] = \tfrac{1}{2}(f'g_1' + f_1'g' - fg_1 - f_1 g) \, .$$

Enfin nous utiliserons la formule démontrée par Chernikov (cf. [1]) et aisée à vérifier : étant donné une fonction φ des trois variables p', q', p on a :

(I.4) $$\int \varphi(p',q',p)\delta((p'-p)(p'+q'))dQ' = \int \varphi(p',q',p)\delta((p-p')(p+q))dQ$$

où, dans la deuxième intégrale, $q' = p+q-p'$.

Soit alors $\Phi(p,q)$ une fonction de p et q, posons :

$$T[\Phi] = \int (\Phi(p',q')-\Phi(p,q)) < p,q > H(p,q,p')dP'dQ$$

et $\varphi(p)$ étant une autre fonction de p, considérons

$$\int T[\Phi]\varphi(p)dP = \int (\Phi'-\Phi)\varphi < p,q > H(p,q,p')dP'dQdP \, .$$

Effectuons le simple changement de notations : $p \rightleftarrows p'$ $q \rightleftarrows q'$ il vient :

$$\int T[\Phi]\varphi(p)dP = \int (\Phi-\Phi')\varphi' < p',q' > H(p',q',p)dPdQ'dP'$$

$$= \int (\Phi-\Phi')\varphi'(p'+q')(p'+q')h'\delta((p'-p)(p'+q'))dPdQ'dP' \, ,$$

soit, en utilisant la formule (I.4) :

$$\int T[\Phi]\varphi(p)dP = \int (\Phi-\Phi')\varphi'(p+q)(p+q)h(< p,q >, \cos\theta)\delta((p-p')(p+q))dP'dQdP$$

où, dans Φ', on a $q' = p+q-p'$.

On a donc, en utilisant la formule (I.2)

$$\int T[\Phi]\varphi(p)dP = \int(\Phi(p,q)-\Phi(p',q'))\varphi(p')< p,q >H(p,q,p')dPdP'dQ \, .$$

D'où l'on déduit

(I.5) $$\boxed{\int T[\Phi]\varphi(p)dP = \tfrac{1}{2} \int (\Phi-\Phi')(\varphi'-\varphi)< p,q >H(p,q,p')dPdP'dQ}$$

Nous allons encore transformer cette expression. Elle s'écrit :

$$\int T[\Phi]\varphi(p)dP = \frac{1}{2}\int <p,q> dPdQ \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (\Phi(p,q)-\Phi(p',q'))(\varphi'-\varphi)h \sin\theta \, d\theta d\psi$$

où, dans l'intégrale de droite, p' et q' sont donnés par les formules (I.3).

Effectuons le changement de notations $p \rightleftarrows q$, le membre de droite s'écrit :

$$\frac{1}{2}\int <p,q> dPdQ \int (\Phi(q,p)-\Phi(p',q'))[\varphi(p')-\varphi(q)]h \sin\theta \, d\theta d\psi$$

où p' et q' sont encore donnés par les formules (I.3) à cause de leur symétrie en p et q.

Effectuons le changement de variable $\theta = \theta'-\pi$, l'expression considérée s'écrit :

$$\frac{1}{2}\int <p,q> dPdQ \int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{2\pi} (\Phi(q,p)-\Phi(p',q'))(\varphi(p')-\varphi(q))h(<p,q>,-\cos\theta') \times (-\sin\theta' \, d\theta' d\psi)$$

avec, cette fois-ci :

$$\begin{cases} p' = \dfrac{p+q}{2} - \dfrac{\sqrt{pq-m^2}}{\sqrt{2}}(\xi \sin\theta' \cos\psi + \eta \sin\theta' \sin\psi + \zeta \cos\theta') \\ q' = \dfrac{p+q}{2} + \dfrac{\sqrt{pq-m^2}}{\sqrt{2}}(\xi \sin\theta' \cos\psi + \eta \sin\theta' \sin\psi + \zeta \cos\theta') . \end{cases}$$

En remarquant que

$$\int_{\pi}^{2\pi} = -\int_0^{\pi}$$

car il n'y a que des fonctions périodiques de θ' et, en effectuant de nouveau le changement de notations $p' \rightleftarrows q'$ et $\theta' \to \theta$, il vient pour l'expression considérée :

$$\frac{1}{2}\int <p,q> dPdQ \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (\Phi(q,p)-\Phi(q',p'))(\varphi(q')-\varphi(q))h(<p,q>,-\cos\theta)\sin\theta \, d\theta d\psi$$

où p' et q' sont donnés par les formules (I.3). En définitive, si nous supposons que la section efficace de choc h est une fonction paire de $\cos\theta$ et si nous prenons pour $\Phi(p,q)$ une fonction symétrique de p et q, il vient :

$$\text{(I.6)} \quad \boxed{\int T[\Phi]\varphi(p)dP = \frac{1}{4}\int <p,q> dPdQ \int_{\Sigma} (\Phi(p,q)-\Phi(p',q'))(\varphi'+\varphi_1'-\varphi-\varphi_1)h d\sigma}$$

où Σ désigne la sphère unité décrite par σ et où p' et q' ont les valeurs données par les formules (I.3). Cette formule nous sera utile dans l'étude de l'équation linéarisée.

Comme cas particuliers intéressants, si nous prenons

$$\Phi(p,q) = \tfrac{1}{2}(F(p)G(q) + F(q)G(p))$$

nous avons

$$\Phi(p,q) - \Phi(p',q') = - [F,G]$$

d'où

$$\text{(I.7)} \qquad \int T[\Phi]\varphi(p)dP = -\frac{1}{4}\int < p,q > dPdQ \int_\Sigma [F,G](\varphi'+\varphi_1'-\varphi-\varphi_1)hd\sigma$$

et, en particulier, si nous prenons $\Phi(p,q) = F(p)F(q)$ alors $T[\Phi] = I(F)$ et nous avons :

$$\text{(I.8)} \qquad \boxed{\int I(F)\varphi(p)dP = -\frac{1}{4}\int < p,q > dPdQ \int_\Sigma [F,F](\varphi'+\varphi_1'-\varphi-\varphi_1)hd\sigma} \; .$$

II. Equation de Boltzmann linéarisée.

Dans tout ce qui suit, nous nous plaçons en Relativité restreinte, l'espace temps R^4 étant rapporté à un repère orthonormé (e_o,e_i) , $(i,j = 1,2,3)$. Nous poserons alors dans ce repère :

$$p = \sqrt{m^2+r^2}\; e_o + r\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha\alpha = -1$$

$$dP = \frac{1}{p^o}\, dp^1 dp^2 dp^3 = \frac{1}{p^o}\, d\tilde{p} \; ; \quad \tilde{p} = (p^1, p^2, p^3) \; .$$

L'équation de Boltzmann s'écrit :

$$\text{(II.1)} \qquad p^\alpha \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} = I(F) \; .$$

On sait qu'à l'équilibre la fonction de distribution $F(x,p)$ peut s'écrire

$$F(x,p) = a(x)\, e^{-\lambda p} \quad (\text{cf. } [5])$$

où a est une fonction dépendant seulement de x et λ un quadrivecteur orienté dans le temps $(\lambda^o > 0)$ ne dépendant aussi que de x .

Nous étudions les mouvements du fluide au voisinage d'un équilibre particulier obtenu en prenant a et λ constants. Nous cherchons alors F solution de (II.1) sous la forme :

$$\text{(II.2)} \qquad F = a\omega(\omega+\varepsilon f)$$

où l'on a posé $\omega = e^{-\frac{1}{2}\lambda p}$ et où ε est une constante assez petite pour négliger

ε^2 ; f est une fonction de x et p .

Nous ferons les deux hypothèses suivantes :

(H_1) : La section efficace de choc h est une fonction symétrique de $\cos\theta$ et il existe deux constantes positives A et B telles que :

$$A(1-\cos^2\theta) < p,q > \leqq h \leqq B(1-\cos^2\theta) < p,q > .$$

(H_2) : Dans le repère (e_o,e_i) , on a $\lambda^o = (1+\delta)\sqrt{\lambda\lambda}$ où δ est strictement positif.

La signification physique de ces hypothèses est la suivante :

(H_1) signifie que la section efficace de choc tend vers l'infini avec l'énergie et s'annule pour des angles de déviation égaux à 0 ou π .

(H_2) signifie que l'hyperplan $x^o = 0$ qui, dans R^4, portera des données de Cauchy n'est pas orthogonal aux lignes engendrées par le champ de vecteurs λ.

Les notations du paragraphe précédent seront utilisées avec cette légère différence : lorsque nous prendrons $\Phi(p,q) = \frac{1}{2}(F(p)G(q) + F(q)G(p))$ nous écrirons $T[F,G]$ au lieu de $T[\Phi]$; ainsi avec cette notation $T[F,F] = I(F)$.

ÉQUATION LINÉARISÉE

Pour linéariser l'équation (II.1) nous calculons d'abord $[F,F]$.

$$\begin{aligned}[F,F] &= F'F_1' - FF_1 \\ &= a^2\omega'\omega_1'(\omega'+\varepsilon f')(\omega_1'+\varepsilon f_1') - a^2\omega\omega_1(\omega+\varepsilon f)(\omega_1+\varepsilon f_1) .\end{aligned}$$

Or pour les chocs élastiques, $\omega'\omega_1' = \omega\omega_1$; il vient donc en négligeant les termes en ε^2 :

$$[F,F] = \varepsilon a^2(\omega' f'\omega_1'^2 + \omega_1' f_1'\omega'^2 - \omega f\omega_1^2 - \omega_1 f_1\omega^2)$$

ce qui s'écrit

$$[F,F] = 2a^2\varepsilon[\omega f,\omega^2] .$$

L'équation de Boltzmann linéarisée s'écrit alors :

$$\boxed{p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = 2a\omega^{-1}T[\omega f,\omega^2]} \tag{II.3}$$

ÉTUDE DE L'OPÉRATEUR T

Remarquons d'abord que T ne dépend pas de la variable x . Nous désignerons par $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert des fonctions $\varphi(p) = \varphi(p^o,p^i)$ telles que, en posant $p = \sqrt{m^2+r^2}\, e_o + r\alpha$, on ait :

$$\int |\varphi(\sqrt{m^2+r^2}\ ,\ p^i)|^2 dp^1\, dp^2\, dp^3 < \infty\ .$$

Tous les opérateurs que nous considèrerons seront des opérateurs linéaires dans $\mathcal{H}$. Le produit scalaire de deux fonctions dans $\mathcal{H}$ sera désigné par (f/g)

$$(f/g) = \int f\, \bar{g}\, d\, \tilde{p} \qquad \bar{g} \text{ imaginaire conjuguée de } g\ .$$

En fait, pour des raisons qui apparaîtront dans le troisième paragraphe, nous allons étudier l'opérateur L défini par :

$$L(f) = \frac{2\omega^{-1}a}{p^o}\, T[\omega f, \omega^2]\ ,$$

ce qui donne en explicitant :

$$L(f) = \frac{\omega^{-1}a}{p^o} \int (\omega' f' \omega_1'^2 + \omega_1' f_1' \omega'^2 - \omega f \omega_1^2 - \omega^2 \omega_1 f_1) < p,q > H(p,q,p') dP' dQ$$

$$L(f) = -K(p).f + G_1(f) + G_2(f)$$

où l'on a posé

$$K(p) = \frac{a\omega^{-1}}{p^o} \int \omega_1^2 \omega < p,q > H(p,q,p') dP' dQ$$

ou encore :

$$K(p) = \frac{a}{p^o} \int e^{-\lambda q} < p,q > dQ \left(\int_\Sigma h\, d\sigma\right)$$

et de même :

$$G_1(f) = -\frac{a}{p^o} \int e^{-\frac{1}{2}\lambda(p+q)}\, f(q) < p,q > H(p,q,p') dP' dQ$$

$$G_1(f) = -\frac{a}{p^o} \int e^{-\frac{1}{2}\lambda(p+q)}\, f(q) < p,q > dQ \left(\int_\Sigma h.d\sigma\right)$$

et enfin :

$$G_2(f) = \frac{a\omega^{-1}}{p^o} \int (\omega' f' \omega_1'^2 + \omega_1' f_1' \omega'^2) < p,q > H(p,q,p') dP' dQ\ .$$

L'équation de Boltzmann linéarisée s'écrit alors, en posant $G = G_1 + G_2$:

(II.4) $$\boxed{p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = p^o L(f) = -\, p^o K(p).f + p^o G(f)\ .}$$

ÉTUDE DE LA FONCTION $K(p)$.

Nous allons chercher, sous les hypothèses (H_1) et (H_2) une minoration de la fonction $K(p)$ qui nous sera utile dans la suite. D'après l'hypothèse (H_1) nous avons :

$$K(p) \geqq \frac{aA}{p^o} \int e^{-\lambda q} < p,q >^2 dQ \int_\Sigma (1-\cos^2\theta)\sin\theta \, d\theta \, d\varphi \Rightarrow$$

$$K(p) \geqq \frac{8\pi aA}{3p^o} \int e^{-\lambda q}(q_\alpha q_\beta p^\alpha p^\beta - m^4)dQ \; .$$

Or la dernière intégrale s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel (cf. [6], [7]). En posant

$$K_n(\gamma) = \frac{\gamma^n}{1.3\ldots(2n-1)} \int_0^\infty \exp(-\gamma \operatorname{ch} s)\operatorname{sh}^{2n} s \, ds \; ,$$

en prenant $\gamma = m\sqrt{\lambda\lambda}$ et en posant $u = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda\lambda}}$ nous obtenons :

$$K(p) \geqq \frac{32\pi^2 a m^4 A}{3p^o}\left[\frac{K_3(\gamma)}{\gamma}(up)^2 - m^2\left[\frac{K_2(\gamma)}{\gamma^2} + \frac{K_1(\gamma)}{\gamma}\right)\right] ,$$

soit, compte tenu de la relation $K_3(\gamma) = K_1(\gamma) + 4\frac{K_2(\gamma)}{\gamma}$:

$$K(p) \geqq \frac{32\pi^2 a m^4 A}{3p^o}\left[\frac{3K_2(\gamma)}{\gamma^2}(up)^2 + \left(\frac{K_1(\gamma)}{\gamma} + \frac{K_2(\gamma)}{\gamma^2}\right)((up)^2 - m^2)\right] .$$

En posant $p = \sqrt{m^2+r^2}\, e_o + r\alpha$ et $u = u^o e_o + \sqrt{(u^o)^2-1}\,\beta$, nous avons :

$$\frac{(up)^2}{p^o} = \sqrt{m^2+r^2}\left(u^o + \alpha\beta . \frac{r\sqrt{(u^o)^2-1}}{\sqrt{m^2+r^2}}\right)^2 \geqq m\sqrt{1+\frac{r^2}{m^2}}\left(u^o - \sqrt{(u^o)^2-1}\right)^2 .$$

Or $\sqrt{1+\frac{r^2}{m^2}} \geqq \frac{r}{m}$ et, d'après l'hypothèse (H_2) nous avons $u^o = 1 + \delta$ avec $\delta > 0$; d'où :

$$\frac{(up)^2}{p^o} \geqq \left(1 + \delta - \sqrt{\delta^2+2\delta}\right)^2 r \; .$$

Pour chercher une minoration de $\frac{(up)^2 - m^2}{p^o}$, nous étudions la fonction de r :

$$\frac{(up)^2}{\sqrt{m^2+r^2}} \; ;$$

on constate que sa dérivée est positive, donc qu'elle est croissante et que son minimum vaut $m(u^o)^2$. On a alors :

$$\frac{(up)^2-m^2}{p^o} \geqq m(u^o)^2 - \frac{m^2}{\sqrt{m^2+r^2}} \geqq m((u^o)^2-1) = m(\delta^2+2\delta) .$$

En définitive, on a donc :

$$K(p) \geqq \frac{32\pi^2 am^4 A}{3}[3\frac{K_2(\gamma)}{\gamma}(1+\delta-\sqrt{\delta^2+2\delta})^2 r + (\frac{K_1(\gamma)}{\gamma} + \frac{K_2(\gamma)}{\gamma^2})(\delta^2+2\delta)m]$$

ce qui nous permet d'énoncer :

PROPOSITION 1. <u>Sous les hypothèses</u> (H_1) <u>et</u> (H_2) <u>il existe deux constantes strictement positives</u> k_o <u>et</u> k_1 <u>telles que</u>, <u>quel que soit</u> p :

$$K(p) \geqq k_o + k_1 r .$$

ÉTUDE DE L'OPÉRATEUR G_1 .

L'opérateur G_1 est un opérateur à noyau symétrique. On a, en effet :

$$G_1(f) = \int L_1(p,q)f(q)d\tilde{q}$$

avec

$$L_1(p,q) = -\frac{a}{p^o q^o} e^{-\frac{1}{2}\lambda(p+q)} < p,q > \int_{\Sigma} h \, d\sigma ;$$

de plus, sous l'hypothèse (H_1) :

$$L_1(p,q) \leqq \frac{8\pi aB}{3p^o q^o} e^{-\frac{\lambda}{2}(p+q)} < p,q >^2 .$$

On en déduit alors que :

$$\int |L_1(p,q)|^2 d\tilde{p}d\tilde{q} \leqq (\frac{8\pi aB}{3})^2 \int_{P,Q} e^{-\lambda(p+q)} < p,q >^4 dPdQ .$$

Or la dernière intégrale est finie et peut-être même calculée explicitement à l'aide de fonctions de Bessel (cf. [7]). Il en résulte la proposition suivante :

PROPOSITION 2. G_1 <u>est un opérateur de Hilbert Schmidt</u>.

En particulier G_1 est un opérateur compact dans $\mathcal{H}$ (cf. [8], page 277).

ÉTUDE DE L'OPÉRATEUR G_2 .

$$G_2(f) = \frac{a\omega^{-1}}{p^o} \int (\omega' f' \omega_1'^2 + \omega_1' f_1' \omega'^2) < p,q > H(p,q,p') dP' dQ ,$$

expression dans laquelle on doit prendre $q' = p+q-p'$. En utilisant la formule (I.4), on peut écrire

$$G_2(f) = \frac{a\omega^{-1}}{p^o} \int (\omega' f' \omega_1'^2 + \omega_1' f_1' \omega'^2) < p',q' > H(p',q',p) dP' dQ'$$

et, par un calcul analogue à celui qui a servi à obtenir la formule (I.6), on obtient :

$$G_2(f) = \frac{2a\omega^{-1}}{p^o} \int \omega_1'\omega'^2 f_1' < p',q' > H(p',q',p)dP'dQ' ,$$

ou encore, compte tenu de l'expression de H :

$$G_2(f) = \frac{2a}{p^o} \int e^{-\frac{\lambda}{2}(q'+2p'-p)} f(q')(p'+q')(p'+q')h'\delta((p'-p)(p'+q'))dP'dQ'$$

ce qui s'écrit :

$$G_2(f) = \int L_2(p,q')f(q')dq'^1 dq'^2 dq'^3$$

avec

$$L_2(p,q') = \frac{2a}{p^o q'^o} \int e^{-\frac{\lambda}{2}(q'+2p'-p)} (p'+q')(p'+q')\delta((p'-p)(p'+q'))h'dP' .$$

Nous allons étudier le noyau $L_2(p,q')$ en évaluant l'intégrale qui figure dans son expression. Cette intégrale étant écrite sous forme invariante, nous pouvons prendre un repère quelconque. Nous prendrons un repère orthonormé v, ξ', η', ζ' avec

$$v = \frac{p+q'}{\sqrt{2(pq'+m^2)}} \qquad \text{et} \qquad \zeta' = \frac{q'-p}{\sqrt{2(pq'-m^2)}} .$$

Posant alors :

$$p' = \sqrt{m^2 + \sum_{i=1}^{3} (p'^i)^2} + p'^1\xi' + p'^2\eta' + p'^3\zeta'$$

nous avons :

$$(p'-p,p'+q') = m^2 + (p',q'-p) - (p,q')$$

et puisque p et q' sont fixés :

$$d(p'-p,p'+q') = d(p',q'-p) = d(p'\zeta')\sqrt{2(pq'-m^2)} = -\sqrt{2(pq'-m^2)}dp'^3 .$$

Si nous posons :

$$\delta((p'-p)(p'+q'))dP' = d\pi$$

nous devons donc avoir :

$$-\sqrt{2(pq'-m^2)}dp'^3 \wedge d\pi = dP' = \frac{dp'^1 \wedge dp'^2 \wedge dp'^3}{\sqrt{m^2 + \sum_{i=1}^{3} (p'^i)^2}}$$

nous pouvons donc prendre :

$$d\pi = \frac{dp'^1 dp'^2}{\sqrt{2(pq'-m^2)}\sqrt{m^2+\sum_{i=1}^{3}(p'^i)^2}} .$$

Posant alors : $p'^1 = \rho\cos\psi$ et $p'^2 = \rho\sin\psi$, il vient :

(II.5) $$d\pi = \frac{\rho\, d\rho\, d\psi}{\sqrt{(pq'-m^2)(2\rho^2+m^2+pq')}} .$$

Calculons maintenant l'exposant de l'exponentielle figurant sous l'intégrale ; en remarquant que $(2p'+q'-p)(q'-p) = 0$ et en posant

$$\lambda = \lambda'^0 v + \lambda'^1\xi' + \lambda'^2\eta' + \lambda'^3\zeta' ,$$

il vient :

$$\lambda(q'+2p'-p) = 2(\lambda'^0\sqrt{\rho^2+\tfrac{1}{2}(pq'+m^2)} - \rho(\lambda'^1\cos\psi + \lambda'^2\sin\psi)) .$$

Nous aurons besoin de majorer l'exponentielle, il nous faut donc minorer $\lambda(q'+2p'-p)$. En utilisant la formule

$$\sqrt{a^2+b^2} \geqq \frac{|a| + |b|}{\sqrt{2}}$$

il vient :

$$\lambda(q'+2p'-p) \geqq \rho(\lambda'^0\sqrt{2} - \lambda'^1\cos\psi - \lambda'^2\sin\psi) + \sqrt{m^2+pq'} ,$$

d'où, a fortiori :

$$\lambda(q'+2p'-p) \geqq \rho\sqrt{\lambda\lambda} + \sqrt{m^2+pq'} .$$

Nous obtenons alors pour $L_2(p,q')$ la majoration suivante :

$$L_2(p,q') \leqq \frac{2a}{p^0 q'^0}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{m^2+pq'}}}{\sqrt{pq'-m^2}}\int \frac{e^{-\frac{\rho}{2}\sqrt{\lambda\lambda}}\; h'2(p'q'+m^2)\rho\, d\rho\, d\psi}{\sqrt{2\rho^2+pq'+m^2}} .$$

Nous allons maintenant tenir compte de l'hypothèse

(H_1) $$h' \leqq B(1+\cos\theta')< p'q' > .$$

Nous avons, d'après une formule établie au paragraphe I :

$$1+\cos\theta' = \frac{2(p'q'-pp')}{p'q'-m^2} .$$

Or, dans l'intégrale qui figure dans $L_2(p,q')$ nous avons $(p'-p)(p'+q') = 0$ soit $p'q' = pp' + pq' - m^2$ d'où

$$1 + \cos \vartheta' = \frac{2(pq'-m^2)}{p'q'-m^2}$$

ce qui prouve que $pq' \leqq p'q'$ et ce qui permet d'écrire

$$< p',q'> (1 + \cos \vartheta') = \frac{2(pq'-m^2)}{p'q'-m^2} \cdot \sqrt{(p'q'+m^2)(p'q'-m^2)}$$

$$= \frac{2(pq'-m^2)\sqrt{p'q'+m^2}}{\sqrt{p'q'-m^2}} ,$$

on a alors, puisque $pq' \leqq p'q'$,

$$h' \leqq 2B \sqrt{(pq'-m^2)} \sqrt{p'q'+m^2}$$

d'où la majoration

$$I_2(p,q') \leqq \frac{16\pi aB}{p^\circ q'^\circ} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{pq'+m^2}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\rho}{2}\sqrt{\lambda\lambda}}(p'q'+m^2)^{3/2}\rho d\rho}{\sqrt{2\rho^2+pq'+m^2}} .$$

Or on vérifie aisément que :

$$p'q'+m^2 = \frac{1}{2}\sqrt{pq'+m^2}\,(\sqrt{pq'+m^2} + \sqrt{2\rho^2+pq'+m^2}) \Rightarrow$$

$$p'q'+m^2 \leqq \sqrt{pq'+m^2}\,\sqrt{2\rho^2+pq'+m^2} ,$$

il vient alors

$$I_2(p,q') \leqq \frac{16\pi aB}{p^\circ q'^\circ} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{pq'+m^2}} \int_0^\infty (pq'+m^2)^{3/4}(2\rho^2+pq'+m^2)^{1/4} d\rho ,$$

ou encore

$$I_2(p,q') \leqq \frac{16\pi aB}{p^\circ q'^\circ} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{pq'+m^2}} \int_0^\infty (2\rho^2+pq'+m^2)\rho d\rho .$$

Il existe donc deux constantes positives c_1 et c_2 telles que :

$$I_2(p,q') \leqq \frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{m^2+pq'}}}{p^\circ q'^\circ}[c_1 + c_2(pq'+m^2)] .$$

Cette expression montre alors que :

$$\int |I_2(p,q')|^2 d\tilde{p} d\tilde{q}' < \infty$$

PROPOSITION 3. <u>L'opérateur</u> G_2 <u>est un opérateur de Hilbert Schmidt, donc aussi l'opérateur</u> $G = G_1 + G_2$.

ÉTUDE DE L'OPÉRATEUR L

Dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, étudions le produit scalaire $(L(f)/g)$. Nous avons :

$$(L(f)/g) = 2a \int \omega^{-1}\ T[\omega f,\omega^2]g dP\ .$$

Posons alors $\omega^{-1}f = \varphi$ et $\omega^{-1}g = \psi$ il vient : .

$$(L(f)/g) = 2a \int T[\omega^2\Phi,\omega^2]\Psi dP$$

c'est-à-dire d'après la formule (I.7) :

$$(L(f)/g) = -\frac{a}{2}\int <p,q> dPdQ \int_\Sigma [\omega^2\Phi,\omega^2](\Psi'+\Psi_1'-\Psi-\Psi_1)h.d\sigma$$

$$= -\frac{a}{4}\int <p,q> e^{-\lambda(p+q)} dPdQ \int_\Sigma (\Phi'+\Phi_1'-\Phi-\Phi_1)(\Psi'+\Psi_1'-\Psi-\Psi_1)h.d\sigma\ .$$

Cette dernière expression nous montre que

$$(L(f)/g) = (f/L(g))$$

et que

$$(L(f)/f) \leqq 0\ .$$

Par ailleurs $(L(f)/f) = 0$ si et seulement si nous avons

$$\Phi' + \Phi_1' - \Phi - \Phi_1 = 0\ .$$

Cette dernière équation a été résolue par Chernikov (cf. [5]) et les seules solutions sont de la forme $\Phi(p) = \beta - \nu p$ où β est une constante et ν un vecteur constant.

Donc $(L(f)/f) = 0$ si et seulement si

$$f = e^{-\frac{\lambda p}{2}}(\beta - \nu p)\ .$$

D'autre part, si f a l'expression ci-dessus, on vérifie aisément que

$$T[\omega f,\omega^2] = T[\omega^2(\beta-\nu p),\omega^2]$$

est nul, donc que $L(f) = 0$. D'où :

PROPOSITION 4. <u>L'opérateur</u> L <u>est un opérateur auto-adjoint dissipatif dans</u> $\mathcal{H}$. <u>On a</u> $(L(f)/f) = 0$ <u>si et seulement si</u> $L(f) = 0$, <u>c'est-à-dire si</u> f <u>est de</u>

la forme

$$f = e^{-\frac{\lambda p}{2}(\rho - \nu p)}$$

ρ étant une constante, ν un vecteur constant.

III. Problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann linéarisée.

Le problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann linéarisée se formule de la façon vague suivante : trouver une fonction $f(x^0, \tilde{x}, p)$ satisfaisant à :

$$\begin{cases} p^\alpha \dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha} = 2a\omega^{-1} T[\omega f, \omega^2] \\ f(0, \tilde{x}, p) = f_0(\tilde{x}, p) \qquad \tilde{x} = (x^1, x^2, x^3) \end{cases}$$

ou encore, en désignant par G la somme des opérateurs G_1 et G_2 étudiés au paragraphe précédent :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} p^\alpha \dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha} = -p^0 K(p).f + p^0 G(f) = p^0 L(f) \\ f(0, \tilde{x}, p) = f_0(\tilde{x}, p) \, . \end{cases}$$

Les qualités exigées pour la fonction f_0 qui est une donnée de Cauchy, et celles qui en résulteront pour la solution f seront précisées dans le théorème final.

Pour résoudre le problème (I), nous allons d'abord résoudre une famille de problèmes de Cauchy formels obtenus de la façon suivante :

Etant donné deux vecteurs (x^α) et (y^α) de R^4 nous posons

$$\tilde{x}.\tilde{y} = \sum_{j=1}^{3} x^j y^j$$

et à chaque fonction $f(x^0, x^j, p)$ nous associons sa transformée de Fourier par rapport aux variables d'espace :

$$\hat{f}(x^0, \tilde{y}, p) = (2\pi)^{-3/2} \int_{R^3} e^{-i\,\tilde{x}.\tilde{y}} f(x^0, \tilde{x}, p) d\tilde{x} \; ; \; d\tilde{x} = dx^1\, dx^2\, dx^3 \, .$$

Si nous appliquons formellement cette transformation de Fourier aux relations (I) il vient :

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \hat{f}}{\partial x^0} = -i\left(\dfrac{\tilde{p}}{p^0} . \tilde{y}\right)\hat{f} - K(p)\hat{f} + G(\hat{f}) \\ \hat{f}(0, \tilde{y}, p) = \hat{f}_0(\tilde{y}, p) \, . \end{cases}$$

Maintenant, $\tilde{y}$ étant un vecteur fixe nous allons étudier le problème de Cauchy(II) à l'aide de techniques d'analyse fonctionnelle puis, après avoir étudié les propriétés spectrales de l'opérateur dans $\mathcal{H}$

$$A(\tilde{y}) + G = -i(\frac{\tilde{p}}{p^o}.\tilde{y}) - K(p) + G ,$$

nous reviendrons au problème (I).

Nous poserons, pour simplifier l'écriture, $\frac{\tilde{p}}{p^o} = \tilde{q}$.

ÉTUDE DU PROBLÈME DE CAUCHY (II)

Nous allons utiliser la théorie des semi-groupes d'opérateurs à un paramètre dans $\mathcal{H}$. (Cf. [8] p. 231 ou [9] p. 302).

Dans $\mathcal{H}$ l'opérateur de multiplication $A(\tilde{y}) = -(i(\tilde{q}.\tilde{y}) + K(p)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe à un paramètre $U(x^o,\tilde{y})$ défini par :

$$U(x^o,\tilde{y})(f) = \exp\{-(i(\tilde{q}.\tilde{y}) + K(p))x^o\}.f \quad .$$

D'autre part, d'après les propositions 2 et 3 du paragraphe II, G est un opérateur borné dans $\mathcal{H}$; il résulte alors du théorème 13.2.1 de [9] que $A(\tilde{y})+G$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu de classe C_o , que nous désignerons par $V(x^o,\tilde{y})$. Soit alors $\mathfrak{D}(\tilde{y})$ le domaine de définition de l'opérateur $A(\tilde{y})+G$; en appliquant le théorème 23.8.1 de [9] nous obtenons :

THÉORÈME I. <u>Si</u> $\hat{f}_o(\tilde{y},p)$ <u>appartient à</u> $\mathfrak{D}(\tilde{y})$, <u>le problème de Cauchy</u> (II) <u>admet une solution unique</u> $\hat{f}(x^o,\tilde{y},p)$ <u>qui appartient à</u> $\mathcal{H}$ <u>quel que soit</u> $x^o \geqq 0$. <u>Cette solution est donnée par</u>

$$\hat{f}(x^o,\tilde{y},p) = V(x^o,\tilde{y})(\hat{f}_o) \; .$$

Remarquons que $\mathfrak{D}(\tilde{y})$ n'est pas vide car on trouve aisément des fonctions $\varphi(p)$ telles que $(-i(\tilde{q}.\tilde{y}) + K(p))\varphi(p)$ soit dans $\mathcal{H}$.

ÉTUDE DU SEMI-GROUPE D'OPÉRATEURS $V(x^o,\tilde{y})$

Nous pouvons d'abord obtenir une majoration de la norme de $V(x^o,\tilde{y})$ indépendante de $\tilde{y}$. D'après la proposition 1 du paragraphe II , nous avons $K(p) \geqq k_o+k_1 r$, k_o et k_1 étant deux constantes strictement positives et $r = \sqrt{\tilde{p}.\tilde{p}}$; il vient alors

$$\|U(x^o,\tilde{y})\| \leqq \exp(-k_o x^o) \; ;$$

nous avons donc, d'après le corollaire du théorème 13.2.1 de [9] :

$$\|V(x^o,\tilde{y})\| \leqq \exp(\|G\| - k_o)x^o \; .$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathfrak{D}(\tilde{y})$, en posant plus brièvement $V(x^o,\tilde{y}) = V(x^o)$, ou encore V , il vient, d'après les propriétés élémentaires des semi-groupes :

$$\frac{d}{dx^o}(V(\varphi)) = -K(p)V(\varphi) - i(\tilde{q}.\tilde{y})V(\varphi) + GV(\varphi)$$

et en prenant l'imaginaire conjuguée de cette égalité

$$\frac{d}{dx^o}(\overline{V(\varphi)}) = -K(p)\overline{V(\varphi)} + i(\tilde{q}.\tilde{y})\overline{V(\varphi)} + G.\overline{V(\varphi)}$$

d'où l'on tire, par une combinaison évidente :

$$\frac{d}{dx^o}(V(\varphi).\overline{V(\varphi)}) = -2K(p)V(\varphi)\overline{V(\varphi)} + V(\varphi)G.\overline{V(\varphi)} + V(\varphi)GV(\varphi) .$$

Intégrons cette dernière égalité entre x_1^o et x_o^2 :

$$(V(x_2^o)(\varphi))\overline{(V(x_2^o)(\varphi))} - (V(x_1^o)(\varphi))\overline{(V(x_1^o)(\varphi)} =$$

$$= \int_{x_1^o}^{x_2^o} [-2K(p)V(\varphi)\overline{V(\varphi)} + V(\varphi)G\overline{V(\varphi)} + \overline{V(\varphi)}GV(\varphi)]dx^o .$$

Intégrons maintenant par rapport à $\tilde{p}$:

$$\|V(x_2^o)(\varphi)\|^2 - \|V(x_1^o)\varphi\|^2 = 2\int_{x_1^o}^{x_2^o} (V(\varphi)/LV(\varphi))dx^o .$$

Or, d'après la proposition 4, L est un opérateur dissipatif d'où :

$$\|V(x_2^o)(\varphi)\|^2 \leqq \|V(x_1^o)\varphi\|^2 \qquad \text{pour} \qquad x_1^o \leqq x_2^o$$

ou encore, d'après la majoration ci-dessous :

$$\|V(x_2^o)(\varphi)\|^2 \leq (\exp(\|G\|-k_o)x_1^o)^2\|\varphi\|^2 .$$

Comme cette inégalité est vraie quel que soit $x_1^o > 0$ nous avons donc :

$$\|V(x^o,\tilde{y})(\varphi)\| \leqq \|\varphi\| .$$

PROPOSITION 5. <u>Le semi-groupe</u> $V(x^o,\tilde{y})$ <u>est un semi-groupe d'opérateurs contractants.</u>

ÉTUDE DU RÉSOLVANT DE L'OPÉRATEUR $A(\tilde{y}) + G$

Les résultats de cette étude nous seront nécessaires pour étudier la solution du problème (I) et son comportement quand $x^0 \to \infty$.

E étant l'opérateur identique dans $\mathcal{H}$, considérons le résolvant de $A(\tilde{y}) + G$ soit $R(\mu,\tilde{y}) = (\mu E - A(\tilde{y}) - G)^{-1}$.

Si $\varphi \in \mathfrak{D}(\tilde{y})$, nous savons que :

$$V(x^0,\tilde{y})(\varphi) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\beta \to \infty} \int_{\alpha-i\beta}^{\alpha+i\beta} \exp(\mu x^0) R(\mu,\tilde{y})(\varphi) d\mu \quad , \qquad \alpha > 0 .$$

Nous allons étudier les singularités de la fonction $\mu \to R(\mu,\tilde{y})$. Pour cela il est commode d'introduire une nouvelle fonction de μ à valeurs opérateurs, à savoir, $\tilde{y}$ étant fixé :

$$H(\mu,\tilde{y}) = \frac{1}{\mu + i(\tilde{q}.\tilde{y}) + K(p)} . G = \frac{1}{\mu - A(\tilde{y})} . G \quad .$$

On vérifie aisément que, si $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$R(\mu,\tilde{y})(\varphi) = (E - H(\mu,\tilde{y}))^{-1} \frac{1}{\mu - A(\tilde{y})}(\varphi) ,$$

k_0 étant la constante de la proposition 1, soit alors δ un nombre positif fixé tel que $-k_0 + \delta < 0$. Alors si $\mathrm{Re}\,\mu \geqq -k_0 + \delta$ les seules singularités de la fonction $R(\mu,\tilde{y})$ sont celles de la fonction $(E - H(\mu,\tilde{y}))^{-1}$. L'avantage de l'introduction de $H(\mu,\tilde{y})$ réside dans la proposition suivante qu'on trouvera démontrée par exemple dans [10] :

PROPOSITION 6. Si $H(\mu,\tilde{y})$ est analytique dans le demi-plan $\mathrm{Re}\,\mu \geqq -k_0 + \delta$ alors $(E - H(\mu,\tilde{y}))^{-1}$ est analytique dans ce demi-plan excepté aux points μ pour lesquels l'équation $\varphi = H(\mu,\tilde{y})(\varphi)$ a une solution non triviale ; chacun de ces points est un pôle isolé de $(E - H(\mu,\tilde{y}))^{-1}$.

Posons alors $|\tilde{y}| = \sqrt{\tilde{y}.\tilde{y}}$ et étudions la fonction $H(\mu,\tilde{y})$ on a la proposition :

PROPOSITION 7. Pour $\mathrm{Re}\,\mu \geqq -k_0 + \delta$

7.1 $\|H(\mu,\tilde{y})\|$ tend vers 0 quand $\sqrt{|\mu|^2 + |\tilde{y}|^2}$ tend vers l'infini et il existe donc un nombre $\omega(\delta)$ tel que $\|H(\mu,\tilde{y})\| < 0,5$ dès que

$$\sqrt{|\mu|^2 + |\tilde{y}|^2} \geqq \omega(\delta) .$$

7.2. L'application $(\mu,\tilde{y}) \to (E - H(\mu,\tilde{y}))^{-1}$ est continue par rapport au couple $(\mu,\tilde{y})$ pour la topologie de la convergence uniforme en tous les points où elle est définie.

Pour établir cette proposition, on utilise le résultat suivant aisé à vérifier :

Dans un espace de Banach $\mathcal{H}$ approximable (donc dans un Hilbert), étant donné un opérateur $G_o(\alpha)$ dépendant du paramètre α et tendant vers 0 avec α pour la topologie de la convergence simple et un opérateur compact G, alors le produit $G_o(\alpha).G$ tend vers 0 avec α pour la topologie de la convergence uniforme. Or, d'après la proposition 3, G est un opérateur compact, la proposition 7.1 sera donc démontrée si nous montrons que, pour $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\lim_{\sqrt{|\mu|^2 + |\tilde{y}|^2} \to \infty} \int \frac{|\varphi(p)|^2}{|\mu + i(\tilde{q}.\tilde{y}) + K(p)|^2} d\tilde{p} = 0$$

ce qui se vérifie compte tenu de la proposition 1 donnant la minoration $K(p) > k_o + k_1 |\tilde{p}|$. Pour démontrer 7.2, il suffit de démontrer que $H(\tilde{\mu},\tilde{y})$ est continue par rapport à $(\mu,\tilde{y})$ pour la topologie de la convergence uniforme. En utilisant la même technique que pour 7.1 ceci résulte de ce que, pour $\varphi \in \mathcal{H}$ on a:

$$\int \left| \frac{1}{\mu + \Delta\mu - A(\tilde{y} + \Delta\tilde{y})} - \frac{1}{\mu - A(\tilde{y})} \right|^2 |\varphi(p)|^2 d\tilde{p}$$

qui tend vers 0 avec $\sqrt{|\Delta\mu|^2 + |\Delta\tilde{y}|^2}$.

Nous pouvons maintenant établir quelques propriétés de la partie du spectre de $A(\tilde{y}) + G$ qui se trouve dans le demi-plan $\operatorname{Re}\mu \geq -k_o + \delta$. Désignons par $S(\delta,\tilde{y})$ cette partie de spectre. Nous savons déjà que les points de $S(\delta,\tilde{y})$ sont les points μ pour lesquels la fonction $(E - H(\mu,\tilde{y}))^{-1}$ présente une singularité, c'est-à-dire d'après la proposition 6, les points pour lesquels l'équation $\varphi = H(\mu,\tilde{y})(\varphi)$ a une solution non triviale. Désignons par $\operatorname{Im}\mu$ la partie imaginaire de μ.

PROPOSITION 8.

8.1. <u>Pour tout</u> $\tilde{y}$ <u>fixé, la fonction</u> $R(\mu,\tilde{y})$ <u>est analytique par rapport à</u> μ <u>dans tout le demi-plan</u> $\operatorname{Re}\mu \geq -k_o + \delta$ <u>excepté aux points</u> μ_k <u>de</u> $S(\delta,\tilde{y})$; <u>ces points sont des valeurs propres de</u> $A(\tilde{y}) + G$.

8.2. <u>On a</u> $\operatorname{Re}\mu_k \leqq 0$ <u>l'égalité ayant lieu seulement pour</u> $|\tilde{y}| = |\mu_k| = 0$.

8.3. <u>On a</u> $|\operatorname{Im}\mu_k| < \omega(\delta)$, $\omega(\delta)$ <u>étant la constante de la proposition</u> 7.

8.4. <u>Pour</u> $|\tilde{y}| > \omega(\delta)$ <u>la fonction</u> $R(\mu,\tilde{y})$ <u>n'a pas de points singuliers dans le demi-plan</u> $\operatorname{Re}\mu \geq -k_o + \delta$.

Soit donc $\mu_o \in S(\delta,\tilde{y})$; il existe donc $\varphi \in \mathcal{H}$ avec $\|\varphi\| = 1$ telle que

$$\mu_o\varphi - A(\tilde{y})\varphi = G(\varphi)$$

ce qui démontre 8.1.

Cette dernière équation s'écrit encore en introduisant l'opérateur L de la proposition 4

$$\mu_o\varphi + i(\tilde{q}.\tilde{y})\varphi = L(\varphi) .$$

Soit en multipliant scalairement apr φ

$$\mu_o + (i(\tilde{q}.\tilde{y})\varphi/\varphi = (L(\varphi)/\varphi)$$

d'où l'on tire :

$$\mathrm{Re}\ \mu_o = (L(\varphi)/\varphi) \leqq 0 \quad , \quad \mathrm{Im}\ \mu_o = -((\tilde{q}.\tilde{y})\varphi/\varphi) .$$

Si maintenant $\mathrm{Re}\ \mu_o = 0$ on a $(L(\varphi)/\varphi) = 0$ soit d'après la proposition 4 :

$$\varphi = e^{-\frac{\lambda p}{2}}(\beta-\nu p) \qquad \text{et} \qquad L(\varphi) = 0$$

d'où l'on tire aussi :

$$\mu_o\varphi + i(\tilde{q}.\tilde{y})\varphi = 0$$

φ n'étant pas nulle, on en déduit

$$\mathrm{Im}\ \mu_o = -(\tilde{q}.\tilde{y}) = -((\tilde{q}.\tilde{y})\varphi/\varphi)$$

ce qui implique $|\tilde{y}| = 0$ donc $|\mu_o| = 0$ et démontre la proposition 8.2.

Pour démontrer 8.3 et 8.4 il suffit de remarquer que si $|\mathrm{Im}\ \mu_o| \geqq \omega(\delta)$ ou si $|\tilde{y}| > \omega(\delta)$ d'après la proposition 7 on a $\|H(\mu,\tilde{y})\| < 0,5$ et on ne peut donc avoir $H(\mu,\tilde{y})(\varphi) = \varphi$.

PROPOSITION 9. <u>Soit</u> b <u>un nombre strictement positif quelconque et désignons par</u> $d(\tilde{y})$ <u>la distance du spectre de</u> $A(\tilde{y}) + G$ <u>à l'axe imaginaire</u>.

9.1. <u>Si nous posons</u> :

$$2d_o(b) = \inf_{|\tilde{y}| \geqq b} d(\tilde{y})$$

<u>alors</u> $d_o(b) > 0$.

9.2. <u>Il existe une constante</u> $C(b)$ <u>telle que sur la droite</u> $\mathrm{Re}\ \mu = -d_o(b)$ <u>et pour</u> $|\tilde{y}| > b$ <u>on ait</u> $\|R(\mu,\tilde{y})\| \leqq C(b)$, <u>et dans le demi-plan</u> $\mathrm{Re}\ \mu \geqq -d_o(b)$ <u>la fonction</u> $R(\mu,\tilde{y})$ <u>est analytique par rapport à</u> μ .

D'après la proposition 8 on sait que si $|\tilde{y}| > \omega(\delta)$ on a $d(\tilde{y}) > |-k_o+\delta|$. Pour démontrer 9.1. il suffit donc de prouver que

$$\inf_{b \leqq |\tilde{y}| \leqq \omega(\delta)} d(\tilde{y}) > 0 .$$

Supposons cette dernière quantité nulle : c'est dire qu'il existe une suite $\{\tilde{y}_n\}$ convergeant vers $\tilde{y}_o$ avec $b \leqq |\tilde{y}_o| \leqq \omega(\delta)$ et une suite de complexes $\mu_n = \sigma_n+i\tau_n$

telle que $\sigma_n \to 0$, μ_n étant un pôle de $R(\mu,y_n)$. Il existe donc un entier n_o tel que pour $n > n_o$ on ait $\sigma_n > -k_o+\delta$ c'est-à-dire d'après la proposition 8 $|\tau_n| \leqq \omega(\delta)$. La fonction $\|(E - H(i\tau,\tilde{y}_o))^{-1}\|$ étant continue par rapport à τ , elle est bornée pour $|\tau| \leqq \omega(\delta)$ par une constante C_1 . D'après la proposition 9.2 il existe alors un entier n_1 tel que pour $n > n_1$ et $n > n_o$ on ait :

$$\|(E - H(\mu_n,\tilde{y}_n))^{-1}\| < 2\, C_1$$

ce qui entraîne $\|R(\mu_n,\tilde{y}_n)\| \leq \frac{2C_1}{\delta}$ en contradiction avec le choix des suites $\{\tilde{y}_n\}$ et $\{\mu_n\}$ d'où 9.1. Pour démontrer 9.2 remarquons d'abord que si $\sqrt{|\mu|^2+|\tilde{y}|^2} \geqq \omega(\delta)$ et $\operatorname{Re}\mu \geqq -k_o + \delta$ on a, d'après la proposition 7 :

$$\|R(\mu,\tilde{y})\| \leqq \frac{1}{\delta}\|(E - H(\mu,\tilde{y}))^{-1}\| \leqq \frac{2}{\delta} .$$

On est donc ramené à majorer $\|R(\mu,\tilde{y})\|$ sur le compact défini par :

$$\sqrt{|\mu|^2+|\tilde{y}|^2} \leqq \omega(\delta) , \quad |\tilde{y}| \geqq b , \quad \operatorname{Re}\mu = -d_o(b) .$$

Cette majoration résulte de la continuité de $\|(E - H(\mu,\tilde{y}))^{-1}\|$ sur ce compact. L'analycité de $R(\mu,\tilde{y})$ résulte alors de la proposition 8 et du choix de $d_o(b)$.

PROPOSITION 10. <u>Posons</u> $\mu = \sigma + i\tau$ <u>avec</u> $\sigma \geqq -k_o+\delta$. <u>Alors, pour</u> $\tilde{y}$ <u>fixé, quel que soit</u> $\varphi \in \mathcal{H}$ <u>on a</u>

$$\lim_{|\tau| \to \infty} \|R(\mu,\tilde{y})(\varphi)\| = 0$$

<u>la limite étant uniforme par rapport à</u> $\sigma \geqq -k_o+\delta$.

On peut toujours supposer $|\tau| > \omega(\delta)$, alors :

$$\|R(\mu,\tilde{y})(\varphi)\|^2 \leqq \|(E - H(\mu,\tilde{y}))^{-1}\|^2 \int \frac{|\varphi(p)|^2}{\delta^2+(\tau+\tilde{q}.\tilde{y})^2}\, d\tilde{p}$$

soit encore

$$\|R(\mu,\tilde{y})(\varphi)\| \leqq 4 \int \frac{|\varphi(p)|^2}{\delta^2+(\tau+\tilde{q}.\tilde{y})^2}\, d\tilde{p}$$

ce qui démontre le résultat.

PROPOSITION 11. <u>Pour tout</u> $\varphi \in \mathcal{H}$ <u>et pour tout</u> $\tilde{y}$ <u>tel que</u> $|\tilde{y}| > 0$, <u>on a</u> :

$$\lim_{x^o \to \infty} \|V(x^o,\tilde{y})(\varphi)\| = 0 .$$

$A(\tilde{y}) + G$ étant le générateur infinitésimal d'un semi-groupe contractant de classe C_o , l'intersection des domaines de $A(\tilde{y}) + G$ et de $(A(\tilde{y})+G)^2$ est dense dans $\mathcal{H}$. Pour démontrer la proposition 11 , il suffit donc d'après le théorème de Banach-Steinhaus de la démontrer pour φ appartenant à cette intersection. Nous avons alors

$$V(x^o,\tilde{y})(\varphi) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\beta\to\infty} \int_{\alpha-i\beta}^{\alpha+i\beta} \exp(\mu x^o) R(\mu,\tilde{y})(\varphi)d\mu \ , \qquad \alpha > 0 \ .$$

Avec les notations de la proposition 9, pour $|\tilde{y}| \geqq b > 0$ prenons le contour d'intégration défini par le rectangle

$$\alpha-i\beta \ , \quad \alpha+i\beta \ , \quad -d_o(b)+i\beta \ , \quad -d_o(b)-i\beta$$

$R(\mu,\tilde{y})$ est analytique dans ce rectangle et les intégrales sur les côtés parallèles à l'axe réel tendent vers 0 quand $\beta \to \infty$. On a donc

$$V(x^o,\tilde{y})(\varphi) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\beta\to\infty} \int_{-d_o-i\beta}^{-d_o+i\beta} \exp(\mu x^o) R(\mu,\tilde{y})(\varphi)d\mu \ .$$

Soit pour $x^o > 0$:

$$V(x^o,\tilde{y})(\varphi) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\beta\to\infty} \int R(\mu,\tilde{y})(\varphi) d\left(\frac{\exp \mu x^o}{x^o}\right)$$

$$= -\frac{1}{2i\pi} \lim_{\beta\to\infty} \int \frac{\exp(\mu x^o)}{x^o} \left(\frac{dR}{d\mu}\right)(\varphi)d\mu$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \lim_{\beta\to\infty} \int_{-d_o-i\beta}^{-d_o+i\beta} \frac{\exp(\mu x^o)}{x^o} R^2(\mu,\tilde{y})(\varphi)d\mu \ .$$

Mais

$$R(\mu,\tilde{y}) = E + \frac{R(\mu,\tilde{y})[A(\tilde{y})+G]}{\mu}$$

donc pour φ appartenant au domaine de $(A(\tilde{y})+G)^2$ et pour $\mathrm{Re}\,\mu = -d_o$, on a, C étant la constante de la proposition 9 :

$$\|R^2(\mu,\tilde{y})(\varphi)\| \leqq \frac{\|\varphi\|^2 + 2C\|(A(\tilde{y})+G)(\varphi)\| + C^2\|(A(\tilde{y})+G)^2(\varphi)\|}{|\mu|^2}$$

ce qui entraîne, C_2 étant une constante en x^o :

$$\|V(x^o,\tilde{y})(\varphi)\| \leqq C_2 \exp(-d_o x^o)$$

ce qui démontre la proposition 11.

ÉTUDE DU PROBLÈME DE CAUCHY I

Nous dirons qu'une propriété est vraie pour presque tout $\tilde{y}$ si elle est vraie presque partout dans l'espace des $\tilde{y}$. Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME II. Soit $f_o(\tilde{x},p)$ une fonction telle que $\int |f_o(\tilde{x},p)|^2 d\tilde{x}\, d\tilde{p} < \infty$ et telle que sa transformée de Fourier en $\tilde{x}$ soit $\hat{f}_o(\tilde{y},p)$, appartienne à $\mathfrak{D}(\tilde{y})$ pour presque tous les $\tilde{y}$. Alors il existe une fonction $f(x^o,\tilde{x},p)$ définie pour presque tout $\tilde{p}$ et presque tout $\tilde{x}$ telle que $\int |f(x^o,\tilde{x},p)|^2 d\tilde{x}\, d\tilde{p} < \infty$ quel que soit $x^o > 0$ et telle que sa transformée de Fourier par rapport à $\tilde{x}$ soit solution du problème (II) .

On a de plus

$$\lim_{x^o \to \infty} \int |f(x^o,\tilde{x},p)|^2 d\tilde{x}\, d\tilde{p} = 0$$

C'est en ce sens que nous dirons que f est solution du problème (I).

$f_o(\tilde{x},p)$ étant donc donnée et satisfaisant aux hypothèses du théorème II, nous lui associons $\hat{f}_o(\tilde{y},p)$. D'après le théorème I le problème (II) admet une solution unique $\hat{f}_o(x^o,\tilde{y},p)$ qui, pour x^o et $\tilde{y}$ fixés, est un élément de $\mathcal{H}$.

Montrons que $\hat{f}(x^o,\tilde{y},p)$ est mesurable en $\tilde{y}$. Tout d'abord $\hat{f}_o(\tilde{y},p)$ est mesurable en $\tilde{y}$. Par ailleurs, pour $\mathrm{Re}\,\mu = \alpha$ assez grand, on a :

$$R(\mu,\tilde{y})\hat{f}_o(\tilde{y},p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu+A(\tilde{y})}\left[G.\, \frac{1}{\mu+A(\tilde{y})}\right]^k \hat{f}_o(\tilde{y},p)$$

donc $R(\mu,\tilde{y})\hat{f}_o(\tilde{y},p)$ est mesurable comme limite de fonctions mesurables donc aussi

$$\tilde{f}(x^o,\tilde{y},p) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \exp \mu x^o R(\mu,\tilde{y})\hat{f}_o(\tilde{y},p)d\mu \; .$$

Mais $\hat{f}(x^o,\tilde{y},p)$ étant mesurable en $\tilde{p}$ il en résulte que $\hat{f}(x^o,\tilde{y},p)$ est mesurable pour tout $x^o > 0$ par rapport au couple $(\tilde{y},\tilde{p})$.

D'autre part, le semi-groupe $V(x^o,\tilde{y})$ étant contractant, on a :

$$\int |\hat{f}(x^o,\tilde{y},p)|^2 d\tilde{p} \leqq \int |\hat{f}_o(\tilde{y},p)|^2 d\tilde{p}$$

ce qui entraîne :

$$\int d\tilde{y}\left[\int |\hat{f}(x^o,\tilde{y},p)|^2 d\tilde{p}\right] < \infty$$

soit, d'après le théorème de Fubini,

$$\int d\tilde{p}\left[\int |\hat{f}(x^o,\tilde{y},p)|^2 d\tilde{y}\right] < \infty$$

donc pour presque tout $\tilde{p}$ on a :

$$\int |\hat{f}(x^o,\tilde{y},p)|^2 d\tilde{y} < \infty \; .$$

Donc, pour presque tout $\tilde{p}$, il existe une fonction $f(x^o,\tilde{x},p)$ de carré sommable en $\tilde{x}$ définie par :

$$f(x^o,\tilde{x},p) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{i\tilde{x}.\tilde{y}} \hat{f}(x^o,\tilde{y},p)d\tilde{y} .$$

De plus, en vertu de l'égalité de Parseval, on a

$$\int |f(x^o,\tilde{x},p)|^2 d\tilde{x}\, d\tilde{p} = \int |\hat{f}(x^o,\tilde{y},p)|^2 d\tilde{y}\, d\tilde{p} .$$

Etudions maintenant cette dernière intégrale quand $x^o \to +\infty$.

D'après la proposition 11 on a :

$$\lim_{x^o \to +\infty} \int |\hat{f}(x^o,\tilde{y},p)|^2 d\tilde{p} = 0$$

et pour tout $x^o > 0$ on a

$$\int |\hat{f}(x^o,\tilde{y},p)|^2 d\tilde{p} \leqq \int |\hat{f}_o(x^o,\tilde{y})|^2 d\tilde{p}$$

la dernière intégrable étant sommable en $\tilde{y}$. Il résulte alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{x^o \to +\infty} \int |\hat{f}(x^o,\tilde{y},p)|^2 d\tilde{p}\, d\tilde{y} = 0$$

ce qui achève la démonstration du théorème II.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N.A. CHERNIKOV, Acta Phys. Pol., t. 23, 1963, p. 629.

[2] K. BITCHELER, Beiträge zur relativistischen kinetischen Gastheorie, Hamburg 1965.

[3] G. PICHON, Séminaire dirigé par M. A. LICHNEROWICZ au Collège de France, 5 février 1966.

[4] A. LICHNEROWICZ, Théories relativistes de la Gravitation et de l'électromagnétisme, Masson éd. 1955.

[5] N.A. CHERNIKOV, Acta Phys. Pol., t. 26, 1964, p. 1069.

[6] J.L. SYNGE, The relativistic Gaz. North Holland Publischung Company, Amsterdam 1957.

[7] G. PICHON, Calcul des moments de la fonction de distribution d'un fluide parfait, C.R. Acad. Sc., t. 264, p. 544.

[8] K. YOSIDA, Functional Analysis. Springer Verlag 1966.

[9] E. HILL and PHILLIPS, Functional Analysis and semi-groups, American Math. Soc. Coll. pub. Volume 31.

[10] R.T. SEELEY, Integral equations depending analytically on a parameter. Indag. math. 24, 4, 434-442, 1962.

[11] ARSENIEV, Zh vȳchisl. Mat. mat. Fiz. 5, 5, 864-882, 1965.

[12] C. MARLE, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. X, n° 1, 1969, p. 67 et vol. X, n° 2, 1969, p. 127.

[13] B. VIGNON, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. X, n° 1, 1969, p. 31.