Edmond Combet

Paramétrix et invariants sur les variétés compactes

Séminaire Jean Leray (1971), exp. n° 2, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1971____A2_0>

PARAMÉTRIX ET INVARIANTS SUR LES VARIÉTÉS COMPACTES

par Edmond COMBET

Les données sont les suivantes :

(M,g) : variété riemannienne de métrique elliptique g, de classe C^∞, compacte sans bord, de dimension n et dont on note v la mesure riemannienne canonique,

ξ : fibré vectoriel complexe, muni d'une structure hermitienne et basé sur M,

Δ : opérateur différentiel linéaire elliptique sur les sections C^∞ de ξ.

Nous nous intéressons ici à la construction de paramétrix des opérateurs Δ et $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$ par la méthode des approximations successives de HADAMARD.

Nous verrons au paragraphe II que ceci est possible pour une classe assez large d'opérateurs différentiels. Ce procédé de construction fait apparaître une suite de noyaux C^∞ qui interviennent dans l'expression de la trace du noyau élémentaire de l'opérateur de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$. En utilisant une expression de l'indice des opérateurs elliptiques obtenue par la méthode dite de l'équation de la chaleur on peut alors lier certains invariants topologiques de la variété M aux traces des noyaux qui entrent dans la construction de paramétrix des laplaciens usuels (laplacien sur les formes et les spineurs).

Pour simplifier l'exposé, les méthodes seront envisagées au paragraphe I dans l'étude du laplacien usuel sur les fonctions.

Le détail des calculs, souvent laborieux, ne sera pas donné ici, on pourra les trouver dans un article à paraître aux Annales de l'Ecole Normale Supérieure.

I. Le laplacien sur les fonctions.

Dans ce paragraphe, Δ est le laplacien sur les fonctions. On a, localement :

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{\det g}}\, \partial_i(\sqrt{\det g}\, g^{ij}\partial_j f) .$$

A. Paramétrix de Δ

On cherche une paramétrix à droite de Δ c'est-à-dire un noyau R très régulier sur $M \times M$ tel que :

$$\Delta_x R(x,y) = \delta(x,y) + S(x,y)$$

où S est une fonction de classe strictement positive.

On peut se limiter à un voisinage arbitraire V de la diagonale de $M \times M$. On prend pour V un voisinage normal de cette diagonale , ceci entraîne que, pour tout couple $(x,y) \in V$, il existe une géodésique unique joignant x à y. Nous désignerons par $r(x,y)$ la longueur de cette géodésique.

La méthode de HADAMARD consiste à partir du noyau élémentaire usuel dans $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$:

$$R_o = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{4\pi^{n/2}} r^{2-n} ,$$

puis à chercher R sous la forme :

$$R_o(v_o + r^2 v_1 + r^4 v_2 + \ldots) .$$

Pour cela, on fixe un repère orthonormé en y et on introduit les coordonnées normales et les coordonnées polaires géodésiques pour ce repère. On pose :

$$\rho(x,y) = (\text{dét } g(x))^{-1/4}$$

et on considère les fonctions régulières $u_i(x,y)$ définies sur V par le système :

$$u_o(x,y) = \rho(x,y)$$

$$u_i(x,y)[i - \frac{r(x,y)}{\rho(x,y)} \frac{\partial}{\partial r} \rho(x,y)] + r(x,y)\frac{\partial}{\partial r} u_i(x,y) + \Delta_x u_{i-1}(x,y) = 0 .$$

Un calcul direct conduit alors au résultat suivant :

(a) Pour n impair > 2 , le noyau :

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{4\pi^{n/2}} r^{2-n}[u_o + \sum_{i=1}^{N} \frac{r^{2i}}{4^i(\frac{n}{2}-2)(\frac{n}{2}-3)\ldots(\frac{n}{2}-1-i)} u_i]$$

est, pour tout entier $N > \frac{n-2}{2}$ une paramétrix à droite R de Δ avec un complément S de classe supérieure ou égale à $N - \frac{n-1}{2}$.

(b) Pour n pair > 2 , le noyau :

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{4\pi^{n/2}}\{r^{2-n}[u_o + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2} \frac{r^{2i}}{4^i(\frac{n}{2}-2)(\frac{n}{2}-3)\ldots(\frac{n}{2}-1-i)} u_i] - \frac{\text{Log } r^2}{4^{\frac{n}{2}-1}(\frac{n}{2}-2)!}[u_{\frac{n}{2}-1} + \frac{r^2}{4} u_{\frac{n}{2}}]\}$$

est una paramétrix à droite R de Δ avec un complément S de classe C^∞.

B. Noyau de diffusion.

On cherche une paramétrix P de l'opérateur de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$. La méthode et les formules explicites sont ici bien connues (voir par exemple K. YOSIDA [6]). On part du noyau élémentaire usuel de $\mathbb{R}^n$:

$$P_o = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} t^{-n/2} \exp(-\frac{r^2}{4t}) \qquad (t > 0) .$$

Les fonctions u_i déterminées au § I.A entrent dans la construction d'une paramétrix de $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$ de la façon suivante : pour tout entier $n \geqq 1$, chaque somme :

$$P(t,x,y) = P_o(t,x,y)[\sum_{i=0}^{N} t^i u_i(x,y)]$$

où $N > \frac{n}{2}$ est une paramétrix de l'opérateur de la chaleur.

On en déduit classiquement le noyau de diffusion $E(t,x,y)$ associé à Δ c'est-à-dire le noyau élémentaire du problème de CAUCHY pour l'opérateur de la chaleur. C'est l'unique fonction E, de classe C^∞ sur $]0,+\infty) \times M \times M$, vérifiant l'équation :

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x)E(t,x,y) = 0$$

ainsi que la condition :

$$f = \lim_{t \to 0^+} \int_M E(t,.,y)f(y)v(y)$$

dans l'espace $C^\infty M$ des fonctions de classe C^∞ sur M.

De la construction explicite de E à partir de P (E se présente sous la forme $P + W$), S. MINAKSHISUNDARAM [5] a déduit la formule asymptotique :

$$E(t,x,x) \underset{t \to 0^+}{\sim} (2\sqrt{\pi})^{-n} t^{-n/2} (\sum_{i=0}^{\infty} t^i u_i(x,x)) .$$

C. Fonctions u_i et structure de (M,g).

Par la nature même du problème envisagé (détermination de paramétrix), seules les traces $u_i(x,x)$ des fonctions $u_i(x,y)$ peuvent être liées de façon intéressante à la structure géométrique ou topologique de M.

Le système du § I.A donne :

$$u_o(x,x) = 1$$

$$u_i(y,y) = -\tfrac{1}{2} \Delta_x u_{i-1}(x,y)\big|_{x=y} .$$

On trouve aisément :

$$u_1(x,x) = \frac{1}{6}\,\mathcal{C}(x)$$

où $\mathcal{C}$ est la courbure scalaire de (M,g) .

La fonction $u_2(x,x)$ a été calculée par M. BERGER [1] dans son étude des relations entre le spectre et la courbure d'une variété riemannienne et aussi par MAC KEAN et SINGER [2] dans leur étude des relations entre le spectre et la forme d'une membrane vibrante plane.

Nous ne donnerons pas ici l'expression de cette fonction $u_2(x,x)$. Notons seulement qu'une surface compacte orientable M est topologiquement caractérisée par le nombre :

$$a_1 = \int_M u_1(x,x)\, v(x) \ ,$$

puisque l'on a, par la formule de GAUSS-BONNET :

$$\text{Nombre d'EULER de } M = \frac{1}{4\pi}\int_M \mathcal{C}.v$$

$$= \frac{3}{2\pi}\, a_1 \ .$$

Ce sont quelques relations de ce type que nous obtiendrons au § II.C.

II. Laplaciens généralisés.

Nous revenons maintenant aux notations initiales : ξ est un fibré vectoriel basé sur M et supposé muni d'une structure hermitienne h . L'espace $C^\infty\xi = \mathcal{D}\xi = \mathcal{E}\xi$ des sections C^∞ de ξ est muni de sa topologie usuelle et aussi de la structure préhilbertienne obtenue en posant

$$<\varphi,\psi> = \int_M h_x(\varphi(x),\psi(x))\, v(x) \quad ,$$

et ce fait permet de considérer les sections C^∞ de ξ comme éléments de l'espace $\mathcal{D}'\xi$ des sections distributions de ξ .

Nous appelons laplacien généralisé tout opérateur différentiel linéaire Δ sur $C^\infty\xi$ qui, pour $f\in C^\infty M$ et $\varphi\in C^\infty\xi$ vérifie l'identité :

$$(1) \qquad \Delta(f\varphi) = (\Delta f)\varphi - 2\ \mathrm{tr.}(df\otimes\mathcal{L}\varphi) + f\Delta\varphi$$

où :

- Δf est le laplacien usuel de la fonction f (§ I),
- $\mathcal{L}$ est une dérivation covariante : $C^\infty\xi \to C^\infty(T^*M\otimes\xi)$,
- le symbole tr est la trace prise par rapport à la métrique g (on a, localement: $\mathrm{tr.}(df\otimes\mathcal{L}\varphi) = g^{ij}\partial_i f\ \mathcal{L}_j\varphi$).

On notera qu'un laplacien généralisé est un opérateur différentiel d'ordre deux. Pour $\alpha \in T_x^* M$ et $u \in \xi_x$, le symbole de Δ est donné par la formule de définition:

$$\sigma_\Delta(x,\alpha)u = -\tfrac{1}{2}\,\Delta(f^2\varphi)(x)$$

où $f \in C^\infty M$ vérifie $f(x) = 0$, $df(x) = \alpha$ et où $\varphi(x) = u$. On déduit alors de (1):

$$\sigma_\Delta(x,\alpha)u = (g^{ij}(x)\alpha_i\alpha_j)u$$

et ceci prouve que Δ est elliptique.

Les laplaciens sur les champs de formes, le laplacien spinoriel sont de ce type. Plus généralement, si ∇ est la dérivation covariante riemannienne canonique sur $C^\infty T^*M$ (champs de formes linéaires) on peut définir :

$$\nabla \otimes \mathcal{L} : C^\infty(T^*M \otimes \xi) \to C^\infty(T^*M \otimes T^*M \otimes \xi)$$

en posant :

$$(\nabla \otimes \mathcal{L})(\alpha \otimes \varphi) = (\nabla\alpha) \otimes \varphi + \alpha \otimes \mathcal{L}\varphi ,$$

et alors $\Delta = -\operatorname{tr}((\nabla \otimes \mathcal{L}) \circ \mathcal{L})$ est un laplacien généralisé.

Nous allons voir qu'il est possible d'étendre aux opérateurs de ce type l'étude faite au § I pour le laplacien sur les fonctions. Dans toute la suite, Δ est donc un laplacien généralisé.

A. Paramétrix de Δ.

On considère à nouveau le voisinage normal V de la diagonale de $M \times M$. La donnée de la dérivation covariante $\mathcal{L}$ définit un transport parallèle le long de la géodésique γ joignant deux points x et y de M tels que $(x,y) \in V$. A chaque élément $u_y \in \xi_y$, ce transport fait correspondre un élément $u_z \in \xi_z (z \in \gamma)$ de façon que :

$$u_z = u_y \quad \text{pour} \quad z = y ,$$

$$\frac{\mathcal{L}(z)}{dr}\, u_z = 0$$

où le symbole $\frac{\mathcal{L}(z)}{dr}$ désigne la dérivation covariante dans la direction de γ.

On obtient ainsi un isomorphisme $\xi_y \simeq \xi_x$ que l'on peut décrire à l'aide d'une section double $\theta(x,y)$ de classe C^∞ au-dessus de V de façon que :

$$u_x = h_y(\theta(x,y), u_y) .$$

Par la définition même de θ on a :

- $u_x = h_x(\theta(x,x), u_x)$ pour tout $x \in M$
- $\frac{\mathcal{E}(x)}{dr} \vartheta(x,y) = 0$.

On considère alors les sections doubles (ou noyaux) u_i définies par le système :

$$u_o(x,y) = \rho(x,y)\vartheta(x,y)$$

$$u_i(x,y)[i - \frac{r(x,y)}{\rho(x,y)} \frac{\partial}{\partial r} \rho(x,y)] + r(x,y) \frac{\mathcal{E}(x)}{dr} u_i(x,y) + \Delta_x u_{i-1}(x,y) = 0 .$$

Ces noyaux sont de classe C^∞ et permettent d'obtenir une paramétrix pour Δ avec des expressions identiques à celles que nous avions au § I,A pour le laplacien sur les fonctions.

B. Noyau de diffusion de Δ .

Le noyau de diffusion de Δ est le noyau élémentaire $E(t,x,y)$ associé au problème de CAUCHY pour l'opérateur de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$. Les méthodes et les formules du § I.B s'étendent encore sans changement.

La formule de S. MINAKSHISUNDARAM s'interprète maintenant en termes de traces prises par rapport à la structure hermitienne h sur ξ . D'une façon précise on a $u_i(x,x) \in C^\infty(\xi \otimes \xi)$ et on pose localement, avec des notations évidentes :

$$\mathrm{Tr}\, u_i(x,x) = \sum_{a,b} h_{ab}(x)\, u_i^{ab}(x,x) .$$

On obtient alors le développement asymptotique :

$$\mathrm{Tr}\, E(t,x,x) \underset{t \to 0^+}{\sim} (2\sqrt{\pi})^{-n}\, t^{-n/2} \left(\sum_{i=0}^{\infty} t^i\, \mathrm{Tr}\, u_i(x,x) \right) .$$

C. Paramétrix et invariants de la variété M .

L'indice d'un opérateur différentiel elliptique peut s'exprimer à l'aide de noyaux de diffusion dans les circonstances suivantes :

Considérons deux fibrés vectoriels hermitiens ξ^+ , ξ^- basés sur M et un opérateur différentiel elliptique $D : C^\infty\xi^+ \to C^\infty\xi^-$ dont on note D^* l'adjoint pour ces structures hermitiennes.

Les opérateurs

$$\Delta^+ = D^*D : C^\infty\xi^+ \to C^\infty\xi^+$$

$$\Delta^- = DD^* : C^\infty\xi^- \to C^\infty\xi^-$$

sont elliptiques, autoadjoints, positifs et admettent des noyaux de diffusion $E^{\pm}(t,x,y)$.

On a alors pour tout $t > 0$:

$$\text{indice } (D) = \int_M \operatorname{Tr} E^+(t,x,x)v(x) - \int_M \operatorname{Tr} E^-(t,x,x)v(x) .$$

Cette expression est un cas particulier (complexe réduit à deux éléments) de la formule (46) de T. KOTAKE [3].

Si l'on suppose maintenant que $\Delta^{\pm}$ sont des laplaciens généralisés on déduit de la formule de S. MINAKSHISUNDARAM (§ II.B) avec des notations évidentes :

$$(2\sqrt{\pi})^{-n}\left(\int_M (\operatorname{Tr} u_i^+ - \operatorname{Tr} u_i^-)v\right) = \begin{cases} 0 \quad \text{pour } i \neq \frac{n}{2} \\ \text{indice } (D) \quad \text{pour } i = \frac{n}{2}, \ n \text{ pair.} \end{cases}$$

Connaissant les expressions topologiques de l'indice des opérateurs elliptiques usuels il est alors aisé de lier les noyaux u_i associés aux paramétrix des laplaciens usuels à certains invariants topologiques de M .

Dans toute la suite, on suppose que M est orientée.

Exemple 1 :

On désigne par $\Lambda^p T^*M$ le fibré des p-formes alternées sur M , par Δ_p le laplacien de de RHAM sur $C^\infty \Lambda^p T^*M$ et par E_p le noyau de diffusion associé à Δ_p et enfin par u_i^p les noyaux correspondants considérés au § II.A .

Notons ξ^+ (resp. ξ^-) le fibré des formes de degré pair (resp. impair), d l'opérateur de dérivation extérieure, d^* l'adjoint de d usuel.

On pose :

$$D = d + d^* : C^\infty \xi^+ \to C^\infty \xi^-$$

$$D^* = d^* + d : C^\infty \xi^- \to C^\infty \xi^+ ;$$

on obtient alors :

$$\Delta^+ = D^*D = \sum_{p \text{ pair}} \Delta_p$$

$$\Delta^- = DD^* = \sum_{p \text{ impair}} \Delta_p .$$

De l'unicité des noyaux de diffusion on déduit :

$$u_i^+ = \sum_{p \text{ pair}} u_i^p$$

$$u_i^- = \sum_{p \text{ impair}} u_i^p ,$$

d'où la formule :

$$(2\sqrt{\pi})^{-n} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \int_M \mathrm{Tr}\, u_i^p\, v = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq \frac{n}{2} \\ \text{nombre d'Euler de } M & \text{pour } i = \frac{n}{2}\text{, } n \text{ pair.} \end{cases}$$

<u>Exemple</u> 2 (<u>dimension de</u> M : $n = 4\nu$).

Sur le fibré des formes $\bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p T^*M$ on considère l'endomorphisme α défini par

$$\alpha\varphi = (-1)^{p(n-p)/2} * \varphi$$

sur les p-formes, $*\varphi$ étant l'adjoint de HODGE de φ. On a α^2 = identité et α décompose $\bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p T^*M$ en somme directe $\xi^+ \oplus \xi^-$ des sous-fibrés qui correspondent respectivement aux valeurs propres ± 1 de α.

On prend encore $D = d + d^* : C^\infty\xi^+ \to C^\infty\xi^-$ et on pose, avec les notations de l'exemple 1 :

$$E = \sum_{p=0}^{n} E_p \quad \text{et} \quad \Delta = \sum_{p=0}^{n} \Delta_p .$$

Puisque $\alpha\Delta = \Delta\alpha$ sur $\bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p T^*M$, il vient :

$$E^{\pm}(t,x,y) = \tfrac{1}{2}(E(t,x,y) \pm \alpha_x E(t,x,y)) .$$

Sachant que :

$$\mathrm{Tr}\, \alpha_x E(t,x,x) = \mathrm{Tr}\, *_x\, E_{2\nu}(t,x,x) ,$$

il vient :

$$16^{-\nu}\, \pi^{-2\nu} \int_M \mathrm{Tr}\, *_x\, u_i^{2\nu}(x,x) v(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq 2\nu \\ \text{signature de } M & \text{pour } i = 2\nu . \end{cases}$$

<u>Exemple</u> 3 (<u>dimension de</u> M : $n = 2\nu$)

On suppose qu'un fibré spinoriel ξ peut être basé sur M et on désigne par β l'opérateur de séparation des spineurs positifs et négatifs sur ξ. La situation est analogue à celle de l'exemple 2 .

En désignant par u_i les noyaux associés au laplacien spinoriel (A. LICHNEROWICZ [4]) on obtient :

$$4^{-\nu}\, \pi^{-\nu} \int_M \mathrm{Tr}\, \beta_x\, u_i(x,x).v(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq \nu \\ \hat{A}\text{-genre de } M & \text{pour } i = \nu . \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BERGER, Le spectre des variétés riemanniennes, Revue Roumaine de Math. pures et appliquées, 13 (1968) p. 915-931.

[2] MAC KEAN-SINGER. Curvature and the eigenvalues of the laplacian. Journal of Diff. Geometry, 1 (1967) 43-69.

[3] T. KOTAKE, The fixed point theorem of Atiyah-Bott via parabolic operators. Comm. on pure and appl. Math. XXII (1969) 789-806.

[4] A. LICHNEROWICZ, Spineurs harmoniques. C.R.A.S. Paris 257 (1963) 7-9.

[5] S. MINAKSHISUNDARAM, Eigenfunctions on Riemannian manifolds. Journal of Indian Math. Soc. 78 (1953) 159-165.

[6] K. YOSIDA, On the fundamental solution of the parabolic equation. Osaka Math. Jour. 5 (1953), 65-74.