

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DIMITRI FOTIADI

Désingularisation et graphes de Feynman

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1969), p. 1-171

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969__2_1_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Don de P. Nalgrange

D. Fotiadi. Désingularisation et graphes de Feynman.

BSM 10773
2

Je donne d'abord un théorème d'Algébricité de Support Singulier d'Intégrale. Il est basé sur le théorème d'Hironaka d'existence d'une désingularisation d'un ensemble algébrique. Il est applicable aux intégrales de Feynman.

La suite du travail essaie de donner explicitement cette résolution des singularités associées aux graphes de Feynman.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Jean Leray qui a non seulement ouvert son séminaire à ces questions, mais m'a constamment aidé et encouragé par ses conseils et ses cours.



10773-2
S - leray

UNIVERSITÉ DE

LE I

INSTITUT FOURIER

Notations principales : pages

48

84

85

E1

E2

E11

E12

B8

B9

B10

B11

A1

I - UN THEOREME DE SUPPORT SINGULIER ALGEBRIQUE

Soit une forme méromorphe qui peut être intégrée sur une chaîne qui rencontre la variété polaire algébrique de la forme. Alors, sous certaines conditions simples, la fonction qui résulte de cette intégration est ramifiée autour d'une variété ALGEBRIQUE.

C'est le cas des fonctions de Feynman.

Nous donnons d'abord, sous la forme la plus simple, un théorème concernant cette question. Il suffit au cas de Feynman. Sa démonstration utilise (et rappelle) les résultats de la désingularisation algébrique de H. Hironaka^[1], puis la théorie maintenant classique des résidus et cobords composés et relatifs de J. Leray^[2].

Des conditions suffisantes sont données par un lemme trivial si la forme est non ramifiée, mais faux si la forme est ramifiée.

Diverses extensions du théorème sont ensuite étudiées, notamment si la chaîne borde dans les variétés de zéro (qu'elles soient ou non de ramification) de la forme. On retrouve ainsi certains des résultats de J. Leray.^[3]

THEOREME DU SUPPORT SINGULIER ALGEBRIQUE

Soient :

$Y \xrightarrow{\pi} T$ deux variétés Y et T

Algébriques - analytiques,
complexes
non singulières

et π un morphisme

Algébrique - analytique,
complexe,
propre,
qui soit aussi une Fibration différentiable.

$\mathfrak{s} \subset Y$ une famille

Algébrique de Codimension un pour π .

ω une forme

Méromorphe dans Y , dont les pôles sont
portés par $\mathfrak{s}$.

$n = \text{degré } \omega = \text{dimension } \mathbb{C} \text{ de la fibre } X$
de $\pi = n$.

On suppose en plus que

T est porteuse de partie réelle $T(\mathbb{R})$

Y est porteuse de partie réelle $Y(\mathbb{R})$

π est un morphisme analytique réel, donc si $t \in T(\mathbb{R})$ a pour fibré Y_t
(pour π) alors

Y_t est porteuse de partie réelle $Y_t(\mathbb{R})$ et $Y_t(\mathbb{R}) = (Y(\mathbb{R}))_t$.

Chaque composante $i\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{s}$ est l'équation réelle dans l'atlas réel de Y .

ω est d'expression réelle dans l'atlas réel de Y .

Si, dans ces conditions, il existe $t_0 \in T(\mathbb{R})$ et un voisinage $V(t_0)$ tel que pour tout $t \in V(t_0) \cap T(\mathbb{R})$, l'intégrale $I(t) = \int_{Y_t(\mathbb{R})} \omega$ soit absolument convergente.

Alors I définit un germe de fonction analytique multiforme ramifiée autour d'un support singulier algébrique dans T.

Avant que d'éclairer les divers termes qui se trouvent dans l'énoncé, introduisons en un supplémentaire ; et remarquons que si la famille $\mathfrak{s}$ est en plus en position générale (P.G.) dans Y , le théorème devient presque trivial. En effet, le lemme facile que l'on trouve dans la démonstration montre qu'alors la variété polaire n'a pas de point réel, donc la chaîne d'intégration ne rencontre pas la variété polaire dont elle est totalement DEGAGÉE, sous forme de cycle (relatif éventuellement) de son complémentaire ; la position générale de $\mathfrak{s}$ est encore invoquée pour montrer que la fibre du couple $(Y, \mathfrak{s})$ et donc le cycle peuvent être déformés grâce à un théorème simple d'isotopie ambiante au-dessus de tout chemin de T issu de t_0 et ne rencontrant pas l'obstruction à l'isotopie ; cette obstruction Λ étant la variété algébrique $\Lambda \subset T$ définie par

$$\Lambda = \{t \in T \mid \text{La contre image } \mathfrak{s}_t = \pi^{-1}(t) \cap \mathfrak{s} \text{ est en (P.G.) dans } Y_t = \pi^{-1}(t)\}$$

Alors nous montrerons en employant les cobords composés de J. Leray que l'intégrale I de ω définit une fonction analytique (multiforme) dans le complément $T - \Lambda$ donc dans le complément $T - L$ de l'hypersurface algébrique maximale L contenue dans Λ .

Toute la difficulté est donc concentrée sur le problème suivant peut-on se ramener à cette situation où $\mathfrak{s}$ est en (P.G.) dans Y et où les

hypothèses du théorème sont encore vérifiées ? c'est ce que nous allons résoudre grâce aux résultats de H. Hironaka, et nous aurons de ce fait dégagé la chaîne hors des surfaces polaires.

RAPPELS PRELIMINAIRES ET DEFINITIONS

Définition 1 : FAMILLE POUR π

$\mathfrak{s}$ est une famille algébrique de codimension un pour $Y \xrightarrow{\pi} T$
 $\Leftrightarrow \mathfrak{s} \subset Y$ est un sous ensemble algébrique (fermé),
 chacune de ses composantes $^i \mathfrak{s}$ irréductible est de codimension un dans Y .
 $\pi : Y \rightarrow T$ est tel que la restriction $\pi|_{^i \mathfrak{s}}$ soit surjective pour tout i .

Définition 2 : VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE PORTEUSE D'UNE PARTIE REELLE

Dans l'espace numérique $\mathcal{C}^n$, considéré comme complexifié de l'espace numérique $\mathbb{R}^n$, on a les notions de partie réelle canonique et de l'imaginaire conjugué $\bar{z}$ d'un point z .

A toute application $f : \Omega^n \rightarrow \mathcal{C}^r$, dans $\mathcal{C}^r$ d'une partie de $\mathcal{C}^n$, on associe l'application (conjuguée) $\bar{f} : \bar{\Omega}^n \rightarrow \mathcal{C}^r$ dans $\mathcal{C}^r$ de la partie conjuguée de Ω^n , définie par $\bar{f}(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

- (1) On dit qu'une telle application f est réelle si f et $\bar{f}$ sont égales
- (2) On dit qu'une variété analytique complexe $X(\mathcal{C})$ de dimension n est porteuse de partie réelle, si l'on en a choisi un sous atlas analytique $(\underline{W}, \underline{\varphi})$ $\varphi_i : W_i \rightarrow \Omega^n \subset \mathcal{C}^n$, dont les applications de recollement $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sont réelles au sens précédent. $(\underline{W}, \underline{\varphi})$ étant de plus un sous-atlas complet pour cette condition est appelé l'atlas réel de $X = X(\mathcal{C})$

- (3) La partie réelle $X(\mathbb{R})$ d'une telle variété est alors définie comme réunion des images réciproques des parties réelles canoniques $\mathbb{R}^n$ des cartes de cet atlas :

$$X(\mathbb{R}) = \bigcup_j \varphi_j^{-1}(\mathbb{R}^n) .$$

Cette partie réelle est donc soit vide, soit une variété réelle analytique et de dimension n ;

- (4) Une application $f : Y \rightarrow T$ est un morphisme analytique réel, si Y et T sont porteuses de partie réelle, d'atlas réel $\underline{\varphi}$ et $\underline{\psi}$ si f est un morphisme analytique des variétés analytiques complexes Y et si $\underline{\varphi}_i^{-1} \xrightarrow{f} T \xrightarrow{\psi_j}$, i.e. $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ est réelle (au sens(1)) et pour tout $\psi_j \in \underline{\psi}$ et $\varphi_j \in \underline{\varphi}$.

Remarque : a) Deux variétés complexes différentes peuvent admettre la "même" partie réelle, c'est le cas de la sphère complexe affine Σ^n comparée à la projective $\bar{\Sigma}^n$.

b) Une même variété analytique complexe peut être munie de parties réelles de deux façons non isomorphes :

c'est ainsi que sur la sphère complexe Σ^n : $\sum^n z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 1$

On peut considérer que les points de l'hyperboloïde défini par

$$\{z \in \Sigma^n, z = (ix_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n\},$$

forment une partie réelle de Σ^n .

c) Tout choix d'une partie réelle $X(\mathbb{R})$ d'une variété analytique complexe $X(\mathbb{C})$, détermine une involution $I : X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$, ($I^2 = 1$) qui est un antimorphisme analytique (en un sens à définir), dont les points fixes constituent $X(\mathbb{R})$. Et réciproquement.

d) Si f est réel analytique, alors l'image d'un point réel est un point réel. Si f est injectif réel, alors l'image réciproque d'un point réel est un point réel.

Définition 3 : ABSOLUE CONVERGENCE

ω et $\mathfrak{s}$ étant comme dans l'énoncé, l'intégrale $Y_t(\mathbb{R}) \int \omega$ est absolument convergente si la suite de nombres positifs $K_p \int |\omega|$ reste bornée, i.e. est convergente, lorsque les $K_p \subset K_{p+1} \subset \dots \subset (Y_t(\mathbb{R}) - \mathfrak{s}_t)$ sont des compacts réguliers dont la réunion est $Y_t(\mathbb{R}) - \mathfrak{s}_t$.

Remarque : l'absolue convergence globale dans Y entraîne l'absolue convergence locale, i.e. si Y est remplacée par une carte de son atlas.

Définition 4 : POSITION GENERALE (P.G.)

Il y a de multiples définitions équivalentes de cette notion ; en voici une : une famille $\mathfrak{s} = \bigcup_i \mathfrak{s}^i$ d'hypersurfaces (fermées) de Y est en position générale en $y_0 \in Y$, si toutes celles d'entre elles qui passent par y_0 forment les premiers hyperplans associés à une carte en y_0 de l'atlas de Y .

Si $\mathfrak{s}$ est en (P.G.) en tout point de Y , on dit aussi qu'elle est en (P.G.) dans Y ou encore à croisements normaux dans Y .

On remarque qu'alors chacune des $\mathfrak{s}^i$ est non singulière.

Lemme fondamental { La situation est celle du théorème, mais où T est le point $\mathbb{C}^0 = \mathbb{R}^0$, $\mathfrak{s} \subset Y$ est en (P.G.) dans Y , on ne demande plus ni algébricité ni propriété de π .

- (a) Si X est une variété analytique complexe de dimension n porteuse de partie réelle $X(\mathbb{R})$.
- (b) Si $S = \bigcup_i S^i$ est une famille d'hypersurfaces en (P.G.) dans X .
- (c) Si chaque S^i est irréductible et d'équation réelle (dans l'atlas réel de X).
- (d) Si ω est une forme méromorphe de degré maximum (ie degré $\omega = n$).
- (e) Si ω est d'expression réelle (dans l'atlas réel de X).
- (f) Si les pôles de ω sont portés par S
- (g) Si l'intégrale $X(\mathbb{R}) \int \omega$ est absolument convergente.

- Alors la variété polaire de ω est de partie réelle vide,
autrement dit :
- (h) Si l'intersection $X(\mathbb{R}) \cap {}^iS$ n'est pas vide,
(k) Alors iS n'est pas une surface polaire pour ω .

Preuve du lemme

(h) entraîne : il existe $\tilde{a} \in X(\mathbb{R}) \cap {}^1S$ (on pose $i = 1$)

(b) + (c) entraînent : il existe une carte d'origine $\tilde{a}$ de l'atlas réel de X , pour laquelle l'équation locale de 1S est $x_1 = 0$ et l'équation locale de S est $x_1 x_2 \dots x_p = 0$; donc l'équation locale de S au point a de coordonnées réelles $a = (0, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n)$ ($\varepsilon > \varepsilon_j > 0 \quad \forall j \in \{2, 3, \dots, n\}$) est aussi celle de 1S soit $S : x_1 = 0$.

(d) + (e) + (g) entraînent : l'expression de ω au voisinage de a dans une sous carte est :

$$\omega(x) = \frac{\varphi(x)}{x_1^{\alpha_1}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \quad \text{où} \quad \left| \begin{array}{l} n = \dim X \\ \alpha_1 \text{ est un entier} \end{array} \right.$$

et où $\varphi(x)$ est analytique au voisinage de a et on peut supposer que $\varphi(a) \neq 0$ (en choisissant convenablement α_1 , ε et ε_j)

(g) enfin, entraîne l'absolue convergence locale au voisinage de a , donc il y a convergence absolue de l'intégrale restreinte à

$$\underline{\text{boule réelle centrée en } a} \int \omega = \int_{B(a)} \frac{\varphi(x)}{x_1^{\alpha_1}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Mais $\varphi(a) \neq 0$, donc finalement il y a convergence absolue de

$$\int_{B(a)} \frac{1}{x_1^{\alpha_1}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Mais α_1 est entier, donc α_1 est soit nul soit négatif.

Donc ω est une forme analytique au voisinage de $a \in {}^1S$; donc, près de $a \in {}^1S$, 1S n'est pas polaire pour ω .

Mais 1S est non singulière dans X et en (P.G.) par rapport aux autres surfaces ${}^2S, \dots, {}^kS$ composant S , donc 1S admet un cobord de J. Leray^[2] ${}^1S \rightarrow X - {}^1S$; ceci donne un disque (qu'on peut supposer analytique) dont le centre décrit 1S , dont le bord reste situé toujours hors de 1S et hors de S lorsque son centre n'est pas sur ${}^2S \cup {}^3S \cup \dots \cup {}^kS$; l'analyticité de ω au voisinage de a , et la condition (f), entraînent (par le théorème du disque^[4] que 1S n'est pas polaire pour ω , ou plus précisément que ω est holomorphe hors de ${}^2S \cup {}^3S \dots \cup {}^kS$.]]

Si $\alpha_1 = 0$ on peut effacer 1S

Si $\alpha_1 < 0$, 1S est une variété de zéro pour le coefficient de ω .

Remarque : Pour ce lemme, aucune hypothèse d'algébricité n'a été nécessaire ni pour X , ni pour S , ni pour ω . La position générale et la réalité sont les conditions majeures.

Remarque : ω est une forme fermée dans $(X - S)$ d'après (d) et (f), si $X(\mathbb{R})$ est de plus compacte, alors l'intégrale ne dépend que de la classe de $X(\mathbb{R})$ dans l'homologie de $(X - {}^pS)$ éventuellement modulo ${}^zS - {}^pS$ (si $X(\mathbb{R})$ n'était pas orientable) où S est la réunion de pS , les surfaces effectivement polaires pour ω , et d'autres hypersurfaces zS .

On remarque que $\omega|_{{}^zS} = 0$ en raison des dimensions.

Remarque : C'est parce qu'il faudra l'adapter à d'autres situations, que nous avons donné la démonstration de ce lemme dans tous ses fastidieux détails.

En contraste au lemme, voici un petit arsenal d'horreurs où (h) est vérifié, mais (k) en défaut, car une condition manque :

Cas non ramifié

$$B(o) \int \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 \wedge dx_2 \quad \text{ici (c) est en défaut}$$

$$B(o) \int \frac{dx_1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \wedge \frac{dx_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \wedge \frac{dx_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad \text{ici (b) est en défaut}$$

$$B(o) \int \frac{(x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2 + x_1^2} dx_1 \wedge dx_2 \quad \text{ici (b) est en défaut}$$

$$\int_{\Gamma} d\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \quad \text{ici (d) est en défaut (la forme n'est pas de degré maximum)}$$

(h) est vérifié non suivant le chemin

$$\Gamma = \text{chemin issu de } x_1 = x_2 = 0$$

Cas ramifié

$$B(o) \int \frac{dx_1}{x_1^\alpha (\lg x_1)^\gamma} \quad \text{ici (d) est en défaut car il y a ramification}$$

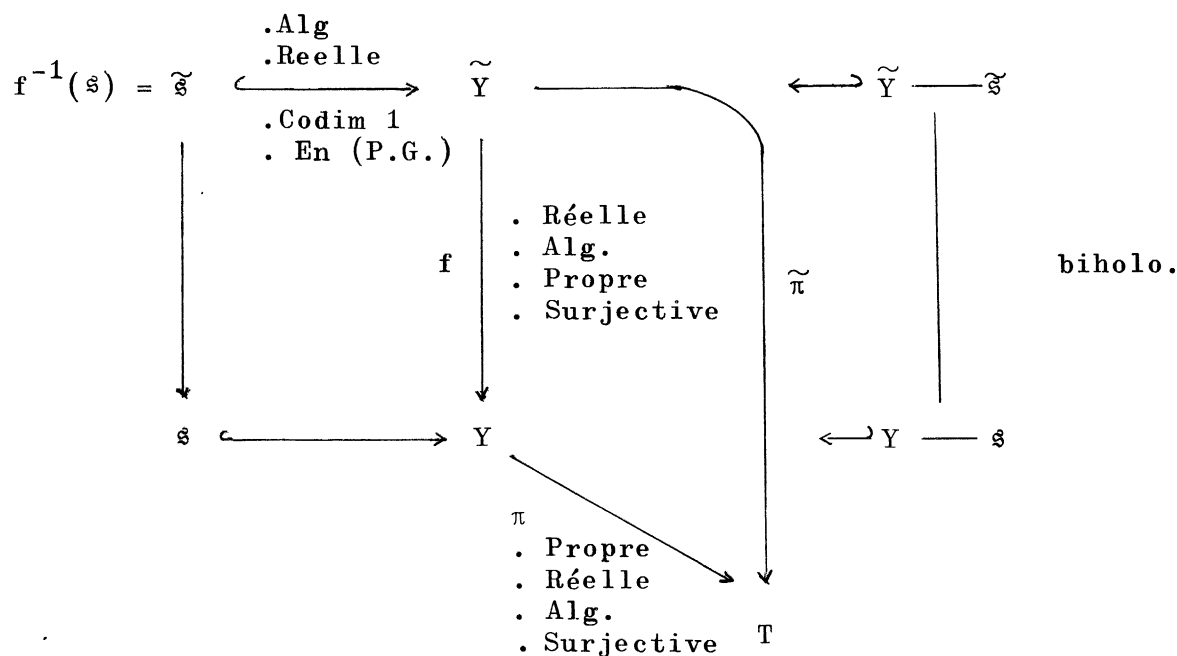
$$\left| \begin{array}{l} 0 < \alpha < 1, \\ \gamma \text{ quelconque} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(k) est en défaut en ce sens que} \\ \text{les coefficients de } \omega \text{ ne restent} \\ \text{pas finis sur } S(\mathbb{R}). \end{array}$$

]

DEMONSTRATION DU THEOREME

I - MISE EN POSITION GENERALE

Elle est assurée par H. Hironaka^[1] qui nous permet d'affirmer qu'il y a une désingularisation réelle $\tilde{s} \hookrightarrow \tilde{Y}$ du couple $s \hookrightarrow Y$ i.e. : il existe une application $f : \tilde{Y} \rightarrow Y$ telle que le diagramme suivant obtenu par image réciproque de s et $Y - s$, présente les particularités que voici



$\tilde{Y}$ est une variété algébrique, analytique, complexe, non singulière et est porteuse de partie réelle.

$f : \tilde{Y} \rightarrow Y$ est une application, propre, algébrique, réelle, surjective.

$\tilde{\pi} = \pi \circ f$ est donc encore propre, réelle, algébrique, surjective.

$\tilde{s} = f^{-1}(s)$ est algébrique, réelle, de codimension 1 dans $\tilde{Y}$, en P.G. dans $\tilde{Y}$.
 $Y - s = f^{-1}(Y - s)$ est biholomorphe à $Y - s$, ou, plus précisément, la restriction de f à $\tilde{Y} - \tilde{s}$ est un biholomorphisme sur $Y - s$; et c'est le biholomorphisme réel sur ouvert dense qui nous permettra de faire un transport de structure de $Y - s$ à $\tilde{Y} - \tilde{s}$.

Remarque : Il n'y a pas en général de désingularisation qui factorise toutes les autres et ce de façon unique.

1ère épuration $T - N_1$, pour retrouver la fibration que l'on a détruite ;
 $\tilde{\pi} : \tilde{Y} \rightarrow T$ n'est plus un fibré au sens différentiable, cependant $\tilde{\pi}$ est réelle et algébrique donc l'application dérivée $D\tilde{\pi}$ est réelle et algébrique, de plus $\tilde{\pi}$ est propre, donc son ensemble critique $N_1 \subset T$ est fermé, algébrique, de codimension plus grande que un, et d'expression réelle dans T .
 Donc, $\tilde{\pi} : \tilde{Y} \rightarrow T - N_1$, $\tilde{\pi}$ restreinte à la contre image de $T - N_1$, est différentiable, propre, et de rang maximum, donc d'après le théorème d'Ehresman c'est une fibration (au sens différentiable).

2ème épuration $T - N_2$, pour retrouver la famille algébrique sur T .

$\tilde{s} = \pi^{-1}(s)$ a chacune de ses composantes de codimension 1 et est en (P.G.) dans $\tilde{Y}$, mais n'est plus une famille algébrique sur T .

Mais il existe $N_2 \subset T$, sous ensemble algébrique fermé de codimension plus grande que un et d'expression réelle dans l'atlas réel de T tel que $\tilde{s} \rightarrow \tilde{Y}$ soit une famille algébrique, sur $T - N_1 \cup N_2$. Il suffit de prendre pour N_2 la projection (propre) par $\tilde{\pi}$ des composantes de $\tilde{s}$ qui ne s'envoient pas surjectivement sur T .

3ème épuration $T - N_3$, pour trouver la position générale dans la fibre.

Soit $N_3 \subset T$ l'ensemble des points $t \in T$ tels que la fibre $\tilde{s}_t = \tilde{\pi}^{-1}(t) \cap \tilde{s}$

ne soit pas une famille en (P.G.) dans $\tilde{Y}_t = \tilde{\pi}^{-1}(t)$.

N_3 est encore un ensemble algébrique fermé, de codimension plus grande que un et d'expression réelle dans l'atlas réel de T .

Posons $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$;

Proposition : hors de cet ensemble N algébrique, fermé, de codimension supérieure à un et d'expression réelle dans T , $\tilde{s} \hookrightarrow \tilde{Y}$ est une paire fibrée (différentiablement) sur $T - N$.

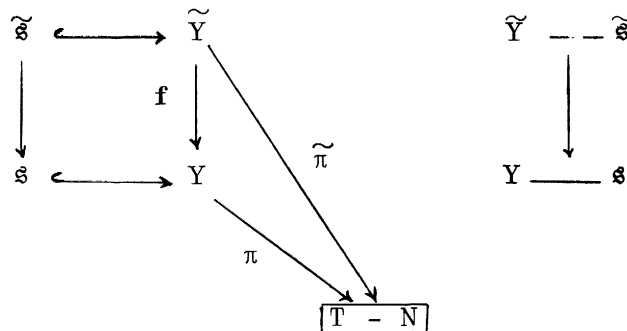
Autrement dit, localement en $t \in T - N$, il existe une trivialisation différentiable de $\tilde{\pi}$ qui est aussi une trivialisation de $\tilde{s}$. (ie de $\tilde{\pi}|_{\tilde{s}}$)

En effet, il est trivial (en se reportant à la définition 4 de la position générale) que ceci est vrai localement en $y \in \tilde{Y}$ pour $\tilde{s} \rightarrow \tilde{Y} \xrightarrow{\downarrow \tilde{\pi}} T-N$

Mais $\tilde{\pi}$ est propre et $\tilde{s}$ est fermé et il résulte de [6]

[par emploi d'une partition de l'unité dans la fibre et par superposition de champs de vecteurs] que ceci est vrai au voisinage de toute fibre globale de $\tilde{\pi}$.]]

Nous sommes ainsi ramenés à la situation suivante au-dessus de $T - N$ (qui est porteuse de partie réelle)



et $f|(\tilde{Y} - \tilde{s})$ est toujours un biholomorphisme qui donne un transport de structure.

Remarque : si $t \in (T - N)$, alors la restriction $f_t : \tilde{Y}_t \rightarrow Y_t$ donne une désingularisation $\tilde{s}_t \hookrightarrow \tilde{Y}_t$ du couple $s_t \hookrightarrow Y_t$.

II. - TRANSPORT DE L'INTEGRALE. DEGAGEMENT DU CYCLE.

CONTINUATION PAR ISOTOPIE

Transportons ω par image réciproque : $\tilde{\omega} = f^*\omega$, alors $\tilde{\omega}$ a vis-à-vis de $\tilde{s} \hookrightarrow \tilde{Y}$ les mêmes propriétés que l'énoncé du théorème confère à ω vis-à-vis de $s \hookrightarrow Y$. ($\tilde{\omega}$ est holomorphe uniforme dans $\tilde{Y} - \tilde{s}$ et les seules singularités de $\tilde{\omega}$ dans $\tilde{Y}$ sont polaires et portées par $\tilde{s}$).

Puisque $f: \tilde{Y} \rightarrow Y$ est réelle et biholomorphe sur l'ouvert dense $\tilde{Y} - \tilde{s}$, la partie réelle de la fibre de $\tilde{\pi}$ est la transformée stricte^{*} par f de la partie réelle de la fibre de π ; en effet on a pour $t_1 \in (T - N)(\mathbb{R})$, $\tilde{Y}(\mathbb{R})_{t_1} = \tilde{Y}(\mathbb{R}) \cap \tilde{\pi}^{-1}(t_1) = \overline{(\tilde{Y}(\mathbb{R})_{t_1} - \tilde{s})} = \overline{f^{-1}(Y(\mathbb{R})_{t_1} - s)}$. (Cf. définition 2, remarque d).

De plus, pour tout $t_1 \in V(t_0) \cap (T - N)(\mathbb{R})$ (qui est non vide), il y a convergence absolue de l'intégrale de $\tilde{\omega}$ le long de $\tilde{Y}(\mathbb{R})_{t_1}$; en effet, toujours par transport, on a conservation de l'intégrale :

$$\tilde{Y}(\mathbb{R})_{t_1} \int \tilde{\omega} = Y(\mathbb{R})_{t_1} \int \omega = I(t_1)$$

[car si K_i est une suite de compacts réguliers de réunion $(Y(\mathbb{R})_{t_1} - s)$ alors $f^{-1}(K_i)$ est une suite de compacts de réunion $(\tilde{Y}(\mathbb{R})_{t_1} - \tilde{s})$ et les deux intégrales sont les limites de la suite :

$$f^{-1}(K_i) \int \tilde{\omega} = K_i \int \omega \quad]$$

^{*}La transformée stricte par f d'un fermé G de Y est la fermeture de l'intersection de l'image réciproque de G par F avec le domaine (dense) de biholomorphie de f .

Dégagement du cycle :

Notons : $\tilde{\omega}|_t = \tilde{\omega}|_{\tilde{Y}_t}$ la restriction de $\tilde{\omega}$ à la fibre $\tilde{Y}_t = \pi^{-1}(t)$

Proposition

Soit $t_1 \in v(t_0) \cap (T - N)(\mathbb{R})$, alors $\tilde{Y}_{t_1}(\mathbb{R})$ ne rencontre aucune composante de $\tilde{s}$ qui soit effectivement polaire pour un $\tilde{\omega}|_t$ tel que $t \in (T - N)$

Preuve de la proposition

Les conditions du lemme fondamental sont satisfaites dans la fibre de t_1 i.e. pour $\tilde{\omega}|_{t_1}$, pour $X = \tilde{Y}_{t_1}$, pour $S = \tilde{s}_{t_1}$ et ce pour tout $t_1 \in v(t_0) \cap (T - N)(\mathbb{R})$.

Donc, fixons t_1 et supposons que la composante $j_{\tilde{s}_{t_1}}^{\tilde{s}}$ ait une partie réelle non vide, alors elle est non polaire pour $\tilde{\omega}|_{t_1}$.

Mais $j_{\tilde{s}}$ est non singulière (P.G.) et porteuse de partie réelle non vide et $\pi|_{j_{\tilde{s}}} \rightarrow (T - N)$ est une fibration et est réelle, donc $j_{\tilde{s}_{t_2}}^{\tilde{s}}$ a une partie réelle non vide pour tout $t_2 \in (T - N)(\mathbb{R})$, donc notamment pour tout $t_3 \in v(t_0) \cap (T - N)(\mathbb{R})$, donc $j_{\tilde{s}_{t_3}}^{\tilde{s}}$ est non polaire pour $\tilde{\omega}|_{t_3}$. Or ce lieu de t_3 est un ouvert non vide de la partie réelle de $(T - N)$. Ceci joint au cobord $j_{\tilde{s}} \xrightarrow{\delta} (Y - j_{\tilde{s}})$ permet d'appliquer le théorème du disque à l'application méromorphe $y \rightarrow \tilde{\omega}|_{t(y)}$ et de conclure que $j_{\tilde{s}}$ est non polaire pour $\tilde{\omega}|_t$ quelque soit $t \in T - N$.]]

Continuation par isotopie.

Puisque $\tilde{s} \hookrightarrow \tilde{Y}$ est une paire fibrée pour $\pi : \tilde{Y} \rightarrow (T - N)$, il existe une trivialisation (dite réalisation d'isotopie ambiante) de cette paire au-dessus de tout chemin $c(\widehat{t_1 t})$ de $(T - N)$ de source t_1 et de but t .

Une telle trivialisation donne une correspondance (dite isotopie ambiante)

entre $(\tilde{s} \hookrightarrow \tilde{Y})_{t_1}$ et $(\tilde{s} \hookrightarrow \tilde{Y})_t$, la chaîne $\tilde{Y}_{t_1}(\mathbb{R})$ est transformée en une chaîne $\Gamma(t, c)$.

Soit $P_{\tilde{s}} \subset \tilde{s}$ la réunion des composantes effectivement polaires pour au moins un $\tilde{\omega}|_t$, avec $t' \in (T - N)$; d'après la proposition $\tilde{Y}_{t_1}(\mathbb{R})$ ne rencontre pas $P_{\tilde{s}}$, donc $\Gamma(t, c)$ ne rencontre pas $P_{\tilde{s}}$, autrement dit $\Gamma(t, c)$ est dégagée des surfaces polaires de $\tilde{\omega}|_t$ et l'intégrale $\Gamma(t, c) \int^{\tilde{\omega}|_t}$ est bien définie et ne dépend que de la classe d'homologie de $\Gamma(t, c)$ dans $(\tilde{Y} - P_{\tilde{s}})$ (éventuellement suivant l'orientabilité modulo les autres parties de $\tilde{s}$), de plus (d'après [6]) cette classe ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin $c(t_1 t)$ dans $(T - N)$ et pas de la trivialisation choisie. On a donc notamment :

Corollaire : la formule $I(t) = \Gamma(t, c) \int^{\tilde{\omega}|_t}$ définit une fonction (multiforme)

$$I : (T - N) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui prolonge celle définie sur $v(t_0) \cap T(\mathbb{R})$ dans l'énoncé du théorème.

III - ANALYTICITE ET SUPPORT SINGULIER DE I

La difficulté provient de ce qu'une surface polaire pour $\tilde{\omega}$ peut ne pas l'être pour $\tilde{\omega}|_t$, de sorte que $\Gamma(t)$ peut parfaitement rencontrer une surface polaire de $\tilde{\omega}$ sans rencontrer celle d'aucun $\tilde{\omega}|_t$. Et ceci empêcherait de conclure à la dérivation sous le signe somme.

On s'en tire de la façon suivante :

Dans l'espace numérique $\mathbb{C}^r$, soit $Q(t')$ la réunion des hyperplans passant par $t' \in \mathbb{C}^r$ et parallèles aux hyperplans canoniques de coordonnées

d'après [2], on peut former :

le cobord r -itéré $\delta^r\{t'\}$ du point $t' : \delta^r : \{t'\} \rightarrow (\mathbb{C}^r - Q(t'))$,

ou plus précisément $\delta^r : H_0(\{t'\}) \rightarrow H_r^c(\mathbb{C}^r - Q(t'))$;

puis la r -forme canonique $\alpha_{t'}$, de $(\mathbb{C}^r - Q(t'))$ dont le résidu r -composé en $\{t'\}$ est 1.

$\text{res}^r : H^0(\{t'\}) \leftarrow H^r(\mathbb{C}^r - Q(t'))$ et on a $1 = \int_{\{t'\}} 1 = \int_{\delta^r(t')} \alpha_{t'}$.

[si $r = 1$, on a tout simplement $\alpha_{t'} = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z-t'}$ et $\delta\{0\} =$ cercle trigonométrique].

Remarque fondamentale : si on a choisi un représentant de $\delta^r\{t'\}$, c'est aussi un représentant de $\delta^r\{t''\}$ pour tout t'' pris dans un ouvert contenant t' .

Nous écrirons symboliquement $\alpha_{t'} = \frac{dt}{t-t'}$.

Choisissons une carte locale de l'atlas réel de T , contenant t' et construisons successivement $Q(t')$ et la r -forme $\alpha_{t'} = \frac{dt}{t-t'}$, puis son image inverse par $\tilde{\pi} : \tilde{Y} \rightarrow T$, i.e. la r -forme $\beta_{t'} = \tilde{\pi}^* \alpha_{t'}$, sur $\tilde{Y}$, puis enfin $\tilde{\Omega}_{t'} = \tilde{\omega} \wedge \beta_{t'}$, qui est une $(r+n)$ -forme sur $\tilde{Y}$.

Si de plus $t' \notin N$, on peut tenir compte de la structure fibrée de la paire $\tilde{s} \hookrightarrow \tilde{Y}$ pour $\tilde{\pi} : \tilde{Y} \rightarrow T - N$ pour former $\delta^r(\Gamma(t')) \simeq \Gamma(t') \times (\delta^r(t'))$.

Ces quantités ont les propriétés suivantes :

$\tilde{\Omega}_{t'} = \tilde{\omega} \wedge \beta_{t'}$, est une forme	<u>méromorphe</u> de $\tilde{Y}$
	<u>de degré maximum (donc fermée)</u>
	<u>d'expression réelle</u>
	<u>algébrique</u>
	dont les <u>pôles</u> sont portés par
	$\pi^*(Q(t'))$ et $P_{\tilde{s}}$

De plus on a la formule fondamentale r due à la construction même

$$\boxed{\operatorname{res}_{\tilde{\gamma}_t}^r (\tilde{\omega}_t) = \tilde{\omega}|_t}$$

Les deux dernières propriétés proviennent de l'égalité évidente

$$\tilde{\omega}_t(y) \equiv \tilde{\omega}_t(y, t) = \tilde{\omega}(y, t) \wedge \beta_t(t) = (\tilde{\omega}|_t(y, t)) \wedge \beta_t(t) .$$

(où y et t sont liés par $t = \tilde{\pi}(y) = t(y)$).

Maintenant il ne reste plus qu'à remarquer que puisque $\Gamma(t')$ ne rencontre pas les surfaces polaires de $\omega|_t$ pour aucun $t \in T - N$, alors le r -cobord composé $\delta^r(\Gamma(t'))$ ne rencontre pas les singularités polaires de $\tilde{\omega}_t$, pour tout t'' assez voisin de t' .

La formule du résidu est donc applicable et l'on a :

$$I(t'') = \int_{\Gamma(t'')} \tilde{\omega}|_{t''} = \int_{\delta^r(\Gamma(t'))} \tilde{\omega}_{t''}$$

I est donc analytique puisque l'on peut dériver (en t'' à droite) à cycle d'intégration fixe (indexé par t') dégagé de toute variété polaire.

En conclusion : la fonction $I : (T - N) \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique, multiforme et ramifiée autour de N et sa valeur en $t \in (T - N)$ est donnée par l'intégrale. Cette fonction analytique se prolonge en fonction analytique sur $T - L$ où $L \subset N$ est la plus grande hypersurface algébrique contenue dans la variété algébrique N .

Ce support singulier $L = \operatorname{ss}[\omega] \subset T$ est la variété de Landau pour ω .

J'ignore quand pour $t \in (N - L)$, $I(t)$ s'exprime par une intégrale.

EXTENSIONS DIVERSES CUMULATIVES DES HYPOTHESES DU THEOREME

(1) La chaîne initiale Γ n'est plus $Y_{t_1}(\mathbb{R})$ tout entier mais une partie (de même dimension) de $Y_{t_1}(\mathbb{R})$ qui borde dans $\mathfrak{s}_1$, sous variété algébrique fermée d'expression réelle de Y .

La même démonstration tient et les conclusions du théorème restent valables si, au lieu de désingulariser le couple $\mathfrak{s} \rightarrow Y$, on désingularise le couple $(\mathfrak{s} \cup \mathfrak{s}_1) \rightarrow Y$.

Evidemment, c'est l'homologie relative de $(\tilde{Y} - \tilde{\mathfrak{s}}, \tilde{\mathfrak{s}}_1 - \tilde{\mathfrak{s}})_t$ qui intervient.

(2) ω n'est plus uniforme mais reste analytique hors d'un support algébrique de ramification $Sr[\omega] = \mathfrak{s}_2$. On suppose de plus que $\Gamma \cap \mathfrak{s}_2 = \emptyset$, et que la détermination de ω dont on part est uniforme dans un voisinage de Γ .

Même démonstration, même conclusion. (A condition de remplacer $\mathfrak{s}$ par $\mathfrak{s} \cup \mathfrak{s}_1 \cup \mathfrak{s}_2$).

(2bis) ω est de ramification de type fini au sens N. Nilsson-J. Leray. Alors si chaque détermination d'une base de détermination sur Γ reste uniforme dans un voisinage de Γ , l'intégrale I sera de type fini.

(2ter) Nous n'avons pas examiné le cas de la croissance lente.

(3) ω est $(\mathfrak{s}_2 \cup \mathfrak{s}_3)$ -ramifiée. $\Gamma \cap \mathfrak{s}_2$ reste vide, mais $\Gamma \cap \mathfrak{s}_3$ est non vide, mais les coefficients de ω restent bornés (ou même tendent vers zéro) sur $\mathfrak{s}_3$ qui est encore supposée algébrique.

Même démonstration, même conclusion, à condition de remplacer $\mathfrak{s}$ par $\mathfrak{s} \cup \mathfrak{s}_1 \cup \mathfrak{s}_2 \cup \mathfrak{s}_3$ pour la désingularisation, et d'utiliser l'homologie relative de $(\tilde{Y} - \tilde{\mathfrak{s}} \cup \tilde{\mathfrak{s}}_2, \tilde{\mathfrak{s}}_1 \cup \tilde{\mathfrak{s}}_3 - \tilde{\mathfrak{s}} \cup \tilde{\mathfrak{s}}_2)_t$.

En effet, d'abord la propriété de finitude des coefficients de ω au voisinage de $\mathfrak{s}_3$, se conserve par le transport de structure lié à la désingularisation ; ensuite, après désingularisation, l'intégrale restreinte à l'intersection de $\tilde{\Gamma}$ avec un voisinage tubulaire de $\tilde{\mathfrak{s}}_3$, tend vers zéro avec le rayon du tube.]]

(4) La chaîne d'intégration γ^q est encore réelle, mais sa dimension est strictement inférieure à n .

On doit évidemment supposer que la forme ω^q est de degré q , est fermée dans la fibre Y_t de $\pi : Y \rightarrow T$, et que sa restriction à $\mathfrak{s}_1$, dans laquelle elle borde, existe et est nulle.

Si la chaîne initiale γ^q est dégagée des surfaces gênantes ($\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}_3$), c'est alors un cycle relatif à $\mathfrak{s}_1$ et le problème se résout trivialement par l'isotopie associée à la désingularisation.

Le cas devient beaucoup plus délicat si γ^q n'est pas dégagée des surfaces $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}_3$: l'intégrale initiale dépend de la chaîne elle-même et non seulement de sa classe dans une homologie simple.

Pour la même raison, il faut préciser quelle chaîne d'intégration on prend dans les fibres voisines de Y_t pour la fibration (différentiable seulement) $\pi : Y \rightarrow T$. Si π était une fibration analytique, on aurait un choix canonique.

On doit donc préciser la dépendance en $t \in T$ de $\gamma_{(t)}^q \subset Y_t$, et cette

dépendance doit être en quelque sorte analytique et même algébrique.

Voici un cas où les choses redeviennent simples :

Soit $\mathcal{R} \hookrightarrow Y$ une famille de $(n-q)$ hypersurfaces algébriques $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{n-q}$, d'équations réelles et en position générale dans Y ; soit

$\mathcal{R}^q = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \dots \cap \mathcal{R}_{n-q}$ l'intersection de cette famille ; on suppose que la chaîne initiale γ^q est (portée par) la partie réelle de $\mathcal{R}^q \cap Y_t$ (et borde éventuellement dans $\mathfrak{s}_1$). Alors en restreignant la situation à $\mathcal{R}^q$, on se ramène facilement au problème précédent.

17

II - ECLATEMENTS ET DESINGULARISATION

Dans ce chapitre, est rappelée la définition de l'éclatement que donne H. Hironaka pour les modules puis pour les objets plus structurés tels que les sous espaces et les idéaux; est indiqué le lien avec les transformations monofdales.

Ensuite viennent quelques exemples puis divers aspects de la construction pratique d'un même objet éclaté.

Enfin on énonce le théorème de désingularisation d'Hironaka.

1. Eclatements, notation et définition

- (1) Catégorie $\underline{M}(R)$ des (faisceaux[♦] de) modules sur des espaces annelés locaux^{♦♦}.

On note un objet $\begin{pmatrix} M \\ X \end{pmatrix}$ ou tout simplement M et

$$\begin{array}{ccc} \text{un } \underline{\text{morphisme}} & \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad} & M' \\ X & \longrightarrow & X' \end{array} & \text{ou tout simplement } M \xrightarrow{\quad} M' \end{array}$$

Dans cette catégorie, on a

la notion d'objet inversible (ie module localement libre de rang 1),

la notion de monomorphisme relatif (au foncteur espace annelé de base)

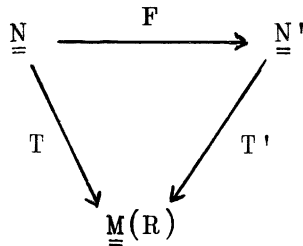
le lemme de Serre : $(g \circ f \text{ mono relatif}) \Rightarrow f \text{ mono relatif}$.

♦ On omet souvent le mot faisceau.

♦♦ Ce qui suit s'applique aussi aux modules sur anneaux variables grâce au contrafoncteur spectre qui est pleinement fidèle.

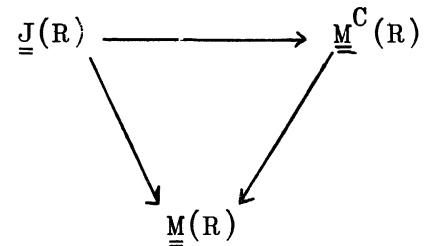
(2) Catégories au dessus [♦] de $\underline{\underline{M}}(R)$

un morphisme entre deux telles catégories se note :



parmi eux

citons :



qui va de la catégorie des idéaux cohérents, ou quasi cohérents à celle des modules cohérents ou quasi cohérents.

(3) Eclaté pour T (ou dans $\underline{\underline{N}}$ pour T) d'un objet $N \in \underline{\underline{N}}$

Définition : c'est un objet $P \xrightarrow{\emptyset} N$ de $\underline{\underline{N}}$ au dessus de N ,

universel pour : $\left| \begin{array}{l} T(P) \text{ est } \underline{\text{inversible}} \\ \text{et} \\ T(\emptyset) : T(P) \rightarrow T(N) \text{ est un } \underline{\text{monomorphisme relatif}}. \end{array} \right.$

Définition : T (ou $\underline{\underline{N}}$) admet des éclatements, si tout objet de $\underline{\underline{N}}$ a un éclaté (pour T).

(4) F est fermé pour les éclatements (ou $\underline{\underline{N}}$ est fermé pour les éclatements dans $\underline{\underline{N'}}$)

Si T et T' admettent des éclatements et

si F commute à ces éclatements.

♦ Ici $\underline{\underline{N}}$ et $\underline{\underline{N'}}$ sont deux catégories, T , T' , F trois foncteurs tels que $T = T' \circ F$, alors on dit que T (ou par abus $\underline{\underline{N}}$) est une catégorie au dessus de $\underline{\underline{M}}(R)$, et F est un foncteur de T à T' .

- (5) Théorème : T = identité de $\underline{\underline{M}}(R)$ (ie $\underline{\underline{M}}(R)$ admet des éclatements.)
- (6) Théorème : T' = foncteur oubli de la quasi cohérence d'un module sur un schéma.
 T' admet des éclatements et est fermé pour les éclatements.
- (7) Théorème : T = foncteur module sous-jacent à un idéal quasi cohérent sur un schéma.
 T admet des éclatements mais n'est pas fermé pour les éclatements.
- (8) Propriété fondamentale : dans $\underline{\underline{M}}(R)$, l'éclatement commute aux changements de base. [Faux dans $\underline{\underline{J}}(R)$]
[ie si $f:X \rightarrow X'$, alors l'éclaté de l'image réciproque par f d'un module sur X' est l'image réciproque par f de l'éclaté de ce module]

2. Relativisation et géométrie

Les définitions, notions et théorèmes précédents subsistent quand on remplace dans $\underline{\underline{M}}(R)$ la catégorie de base R par la catégorie relative R/S des flèches de R dont le but est un objet fixe S de R .

On se rapproche ainsi de la géométrie :

- algébrique plus classique si on prend pour S le corps des complexes $\mathbb{C}$ ou plus exactement l'espace annelé algébrique correspondant $\text{spec } \mathbb{C}$.

- analytique plus classique si on prend pour S le spectre analytique des complexes : $\text{spec au } \mathbb{C}$.
- moins classique si on prend pour S l'anneau (non intègre) $\mathbb{C}^n$ somme directe de n -anneaux identiques à $\mathbb{C}$.
- un peu plus classique si on prend pour S , l'anneau $\mathbb{C}^n$ considéré comme algèbre sur $\mathbb{C}$.
- un peu moins classique si on prend pour S , une compactification (à choisir) de l'espace affine $\mathbb{C}^n$ (algébrique ou analytique).

Ces relativisations ne deviennent vraiment géométriques au sens ordinaire du mot que moyennant certaines contraintes de finitude, ou de cohérence, ou de quasi cohérence que nous ne préciserons pas plus que la relativisation mais qui seront réalisées dans nos applications.

Dans la suite nous travaillerons surtout dans une catégorie d'idéaux $\underline{\underline{J}}(R)$ ou de sous variétés, et nous employerons le mot éclatement par abus au lieu de celui de transformation monofidale qui va être défini.

Dans $\underline{\underline{J}}(R)$ la propriété fondamentale (8) est fausse. (C'est ce qui fait que T du théorème (7) n'est pas fermé). Elle est à remplacer par une propriété dérivée qui est liée à la transformée stricte qui va être définie.

L'existence des éclatements dans $\underline{\underline{M}}(R)$ (ie le théorème (5)) est un cas particulier de l'existence des grassmanniennes d'un module

sur un anneau local, qui représentent certains foncteurs comme le montre le critère de Grothendieck. Pour les grassmanniennes la propriété (8) de changement de base est aisément démontrable.

3. Eclatements d'idéaux et transformation monofidale

Soit $\underline{\underline{J}}(R)$ la catégorie des faisceaux d'idéaux quasi-cohérents sur des espaces annelés locaux (resp schémas) on note un objet $\begin{pmatrix} J \\ | \\ X \end{pmatrix}$ ou simplement J .

Soit $\underline{\underline{SS}}$ la catégorie des couples d'un espace et d'un sous-espace annelé local (resp schéma, sous-schéma) on note un objet $D \hookrightarrow X$ ou simplement D .

Soit $\underline{\underline{An}}$ la catégorie des espaces annelés locaux (resp schémas)

Alors le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \underline{\underline{J}}(R) & \xrightarrow[\sim]{F} & \underline{\underline{SS}} \\ & \searrow A & \swarrow A \\ & \underline{\underline{An}} & \end{array}$$

$$F\left(\begin{pmatrix} J \\ | \\ X \end{pmatrix}\right) = (D \hookrightarrow X) \text{ où } (D, 0_D) = (\text{support } 0_{X/J}, 0_{X/J} | D)$$

est une équivalence de catégories au-dessus la base ie entre $\Lambda: \begin{pmatrix} J \\ | \\ X \end{pmatrix} \mapsto X$ et $A: (D \hookrightarrow X) \mapsto X$.

Soit $T: \underline{\underline{J}}(R) \rightarrow \underline{\underline{M}}(R)$ le foncteur module sous-jacent à l'idéal, on sait

$$\begin{array}{c} \searrow \\ \underline{\underline{M}}(R) \end{array}$$

que T admet des éclatements, mais T n'est pas fermé pour les éclatements.

3-1 Définition : l'image par A , et (par abus) l'image $f : P \dashrightarrow X$ par $A \circ F$, de l'éclaté de $\begin{array}{c} J \\ | \\ X \end{array}$ dans T est la :
Transformation MONOIDALE de X de centre D .

On notera que

$\mathbb{Z}$ | - $f : P \dashrightarrow X$ est universel pour : $[f^{-1}(J)$ est un idéal inversible].
- si $D \dashrightarrow X$ est réduit sur $\mathbb{C}$, alors
 $f : P \dashrightarrow X$ est universel pour : $[f^{-1}(D)$ est de codimension un dans P]

3-2 Eclatement d'un point d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ $a \in U \subset \mathbb{C}^n$

Pratiquement c'est l'opération de passage en coordonnées polaires centrées en ce point a . Un tel passage est biunivoque hors du point et transforme le point en l'ensemble des directions des droites passant par le point.

L'éclatement de $a \in U \subset \mathbb{C}^n$ est la fermeture au dessus de U de

$$\begin{array}{ccc} (U - a) & \hookrightarrow & U \times \mathbb{P}^{n-1} \\ & \searrow & \swarrow \\ & U & \end{array} \quad [x \mapsto (x) \times (x-a)]$$

3-3 Eclatement de sous variété linéaire projective $\overline{P}_r \hookrightarrow \overline{P}^n$

de codimension r , définie par $\overline{P}_r = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \overline{P}^n \mid x_0 = \dots = x_{r-1} = 0\}$

C'est la fermeture au dessus de $\overline{P}^n$ de

$$\begin{array}{ccc} \overline{P}^n - \overline{P}_r & \hookrightarrow & \overline{P}^n \times \mathbb{P}^{r-1} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \overline{P}^n & \end{array}$$

$$x = (x_0, \dots, x_n) \mapsto x \times (x_0, \dots, x_{r-1})$$

3-4 Propriétés

(a) Localité et recollement

L'éclatement est une propriété locale; il suffit de savoir éclater des sous affines d'ouverts affinés puis de recoller les morceaux.

(b) Eclatement non singulier

Il suit de (a), de 3-1, et de 3-2, que l'on sait éclater toute sous-variété (analytique ou algébrique) fermée non singulière d'une variété non singulière et que l'éclaté est non singulier .

(c) Eclatement singulier

Rappelons qu'on sait éclater une sous variété (fermée) d'une variété singulière (analytique ou algébrique) : c'est éclater l'idéal qu'elle définit.

[Plusieurs idéaux peuvent avoir même support et si l'on éclate un idéal qui n'est pas celui de définition de son support nous ne dirons pas que nous éclatons ce support].

(d) Unicité

L'éclatement est défini par une propriété universelle donc le résultat est unique à un isomorphisme près.

(e) Image réciproque et transformée stricte

Nous avons déjà insisté sur le fait que l'éclatement de modules commute aux changements de base mais qu'il n'en est pas de même pour les éclatements d'idéaux donc pour les transformations monoidales.

Soit $V_D \rightarrow V \leftarrow D$, l'éclaté d'une variété suivant une sous-variété D .

On sait que $V_D \rightarrow V$ est un isomorphisme au dessus de $(V-D)$ et que l'isomorphisme réciproque est une injection dense $(V-D) \hookrightarrow V_D$.

Soit $f : V' \rightarrow V$, un morphisme de variété.

Soit $W_D \rightarrow V' \hookrightarrow D'$ l'image réciproque[♦] par f du triplet précédent. Ce n'est pas l'éclaté de V' suivant D' .

Soit $V'_D \rightarrow V' \hookrightarrow D'$ l'éclaté de V' suivant D' , c'est la transformée stricte de V' dans W_D en ce sens que : c'est la fermeture de l'image

$$(V' - D') \hookrightarrow W_D \text{ donnée par}$$

$$V' \hookrightarrow (V' - D') \xrightarrow{f} (V - D) \hookrightarrow V_D,$$

et la propriété universelles du produit fibré :

$$V' \leftarrow W_D \rightarrow V_D \quad \text{de} \quad V' \rightarrow V \leftarrow V_D.$$

Récapitulant ceci sur un diagramme on a :

$$\begin{array}{ccc} (V' - D') & \longrightarrow & (V - D) \\ \swarrow & \searrow & \searrow \\ & W_D & \longrightarrow V_D \\ & \downarrow & \downarrow \\ & V' & \longrightarrow V \\ & \downarrow & \downarrow \\ & D' & \longrightarrow D \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{cartésien} \\ \text{cartésien} \end{array}$$

3-5 Diverses constructions pratiques d'un même éclaté

Soit $K \rightarrow X$ une sous-variété (fermée) à éclater dans X , on sait (par 3-4 (d)) que tous les résultats sont isomorphes; on sait (par 3-4 (a)) que l'on peut procéder par cartes puis recoller les morceaux. On sait (par 3-4 (e)) que l'on peut plonger X dans un plus grand ambiant Y , puis éclater Y suivant un centre D de Y tel que^{♦♦} $D \cap X = K$, puis prendre la transformée stricte de X dans cet éclaté $\tilde{Y}$; le choix

[♦] au sens des schémas

^{♦♦} en tant que schémas

de Y est arbitraire puis Y étant choisi, le choix de D tel que $D \cap X = K$ est arbitraire, les éclatés de Y suivant ces divers D ne seront certes pas isomorphes, mais les transformées strictes de X le seront.

Notons enfin que si X est singulier, deux sous-variétés différentes $K \rightarrow X$ et $K' \rightarrow X$ peuvent donner le même éclaté.

3-6 Exemple : éclatement du sommet d'un cône

Soyons précis pour notre exemple :

- (1) Pour cône, prenons un cône quadratique à deux dimensions dont la seule singularité est le sommet.
- (2) Plongeons le cône dans l'anneau ambiant $\mathbb{C}^3 \ni (x, y, z)$ de telle sorte que son équation soit $z^2 = x^2 + y^2$.

Pour éclater le sommet du cône dans le cône, on commence par éclater au choix dans l'anneau $\mathbb{C}^3$:

- (3) l'origine ie on forme la fermeture de $(\mathbb{C}^3 - \{0\}) \hookrightarrow \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2 \quad (x, y, z) \mapsto (x, y, z) \times (x, y, z)$.
- (4) L'axe du cône ie on forme la fermeture de $(\mathbb{C}^3 - \{x=y=0\}) \hookrightarrow \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^1 \quad (x, y, z) \mapsto (x, y, z) \times (x, y)$
- (5) Une génératrice ie on forme la fermeture de $(\mathbb{C}^3 - \{x=0, y=z\}) \hookrightarrow \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^1 \quad (x, y, z) \mapsto (x, y, z) \times (x, y-z)$
- (6) Puis on prend la transformée stricte du cône dans l'un quelconque de ces éclatements. ie on prend la fermeture de l'image de $\{(x, y, z) \mid z^2 = x^2 + y^2 \text{ et } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \text{ et } z \neq 0 \text{ et } y \neq z\}$ sous l'une quelconque des injections (3), (4) ou (5). Tous les

♦ en tant que schéma.

résultats sont isomorphes entre eux.

- (7) Remarque : le 2-plan $\{z=0\} \subset \mathbb{C}^3$ est une hyper surface non singulière de $\mathbb{C}^3$, donc l'éclatement de $\mathbb{C}^3$ ayant pour centre cet hyperplan est l'identité (cf la propriété universelle des transformations monoidales). La transformée stricte du cône sous cet éclatement est donc le cône lui-même. Cependant l'intersection du cône et de H est le sommet du cône. Mais il n'y a pas de paradoxe car en tant que schéma cette intersection a bien pour support le sommet du cône, mais l'idéal correspondant n'est pas celui de toutes les fonctions sur le cône qui s'annulent au sommet mais seulement celui de z , la fonction hauteur; cet idéal ne contient pas la fonction x sur le cône (ceci est une illustration de ce qui a été écrit en 3-4 (c)).

- (8) Remarque :

La droite $D : x = 0, y-z = 0$ de $\mathbb{C}^3$ correspond à l'idéal

$$I = (x, y-z) \text{ de } \mathbb{C}[x, y, z]$$

Le plan $P : y-z = 0$ de $\mathbb{C}^3$ correspond à l'idéal

$$J = (y-z) \text{ de } \mathbb{C}[x, y, z]$$

Le cône $K : z^2 - x^2 - y^2 = 0$ de $\mathbb{C}^3$ correspond à l'idéal

$$K = (z^2 - x^2 - y^2) \text{ de } \mathbb{C}[x, y, z]$$

En tant qu'ensembles, les intersections $D \cap K$ et $P \cap K$ sont les mêmes.

En tant que schémas, ces intersections correspondent respectivement aux idéaux :

$$I_K = (x, y-z, z^2 - x^2 - y^2) \text{ et } J_K = (y-z, z^2 - x^2 - y^2) \text{ de } \mathbb{C}[x, y, z].$$

Ces idéaux ont le même support;

Le deuxième idéal J_K est partout inversible sur K

et l'éclaté correspondant est K lui-même.

Le premier idéal I_K est inversible sur K sauf au sommet et l'éclaté est différent de K .]]

3-7 Exemple : éclatement d'un point d'un multiprojectif

Soit $\Omega_i \in \overline{P}^n$ le point dont les coordonnées homogenes $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ sont toutes nulles sauf la coordonnée x_i . Soit a éclater le point $\Omega_0 \times \Omega_0 \times \dots \times \Omega_0 \in \overline{P}^{A-1} \times \overline{P}^{B-1} \times \dots \times \overline{P}^{G-1}$ notons $(x, y, \dots, t)$ les coordonnées r -multihomogenes.

- (a) Une premiere méthode (la plus sage) est de procéder a l'éclatement dans une carte affine éventuellement dense contenant le point et de savoir que le résultat est compatible à l'identité de toute autre carte ne contenant pas le point, pour donner un recollement global.

[Si on choisit pour carte celle caractérisée par

$$x_0 = 1, y_0 = 1, \dots, t_0 = 1,$$

l'éclatement dans cette carte est la fermeture de

$$(C^{A-1} \times \dots \times C^{G-1} - \Omega_0 \times \dots \times \Omega_0) \rightarrow C^{A-1} \times \dots \times C^{G-1} \times \overline{P}^{A+B+\dots+G-r-1}$$

$$(\dot{x}, y, \dots, \dot{t}) \rightarrow (\dot{x}, \dot{y}, \dots, \dot{t}) \times (\dot{x}, \dot{y}, \dots, \dot{t})$$

$$\text{ou } x = (x_0, x_1, \dots, x_A) = (1, \dot{x}) \quad]$$

- (b) Une deuxième méthode, démentielle, consiste à

1. plonger le multiprojectif dans un monoprojectif comme variété

de Segré :

$$\overline{P}^{A-1} \times \overline{P}^{B-1} \times \dots \times \overline{P}^{G-1} \hookrightarrow \overline{P}^{A \times B \times \dots \times G-1}$$

$$(x, y, \dots, t) \rightarrow z = (z_{ij \dots p}) = (x_i y_j \dots t_p) \\ \text{!} \quad \quad \quad ij \dots p \in A \times B \times \dots \times G$$

2. Prendre l'image $\Omega_0 = \Omega_{000\dots 0}$ de $\Omega_0 \times \Omega_0 \times \dots \times \Omega_0$ dans $\overline{P}^{Ax Bx \dots x G-1}$

C'est le point $z = (z_{ij\dots p}) \in \overline{P}^{Ax Bx \dots x G-1}$
 $ij\dots p \in Ax Bx \dots x G$

tel que $z_{ij\dots p} = 0$ si $i+j+\dots+p \neq 0$.

3. Eclater Ω_0 dans $\overline{P}^{Ax Bx \dots x G-1}$, c'est-à-dire prendre la fermeture de

$$(\overline{P}^{Ax Bx \dots x G-1} - \Omega_0) \hookrightarrow \overline{P}^{Ax Bx \dots x G-1} \times \overline{P}^{Ax Bx \dots x G-2}$$

$$z = (z_{ij\dots p})_{i+j+\dots \geq 0} \longmapsto z \times z' = ((z_{ij\dots p})_{i+j+\dots \geq 0}, (z_{ij\dots p})_{i+j+\dots > 0})$$

4. Prendre la transformée stricte de $\overline{P}^{A-1} \times \overline{P}^{B-1} \times \dots \times \overline{P}^{G-1}$ sous
cet éclatement.]]

5. On peut évidemment faire toutes ces opérations en une seule fois
en prenant la fermeture de $(\overline{P}^{A-1} \times \overline{P}^{B-1} - \Omega_0 \times \Omega_0 \dots) \hookrightarrow \overline{P}^{Ax B-1} \times \overline{P}^{Ax B-2}$
 $(x, y, \dots, t) \mapsto (z \times z')$

6. On a un résultat encore isomorphe à 4 et 5 en prenant la fermeture
de

$$(\overline{P}^{A-1} \times \overline{P}^{B-1} \times \dots - \Omega_0 \times \Omega_0) \hookrightarrow \overline{P}^{A-1} \times \overline{P}^{B-1} \times \dots \times \overline{P}^{Ax Bx \dots x G-2}$$

$$(x, y, \dots) \mapsto (x, y, \dots) \times z'$$

$$[\text{où } z' = (z_{ij\dots}) \quad \text{et} \quad z_{ij\dots} = x_i y_j \dots \quad \forall i, j, \dots$$

$$i \in \{0, \dots, A-1\}$$

$$j \in \{0, \dots, B-1\}$$

$$\vdots$$

$$i+j+\dots > 0$$

].

4. Relation entre l'éclatement et le théorème de désingularisation d'Hironaka.

1. Lorsque le couple (Y, M) est formé d'une variété non singulière et d'une sous-variété non singulière fermée, alors l'éclatement de Y centré en M fournit une solution au problème de désingularisation d'Hironaka.
2. La relation générale entre la désingularisation d'un couple (Y, M) et l'éclatement est donnée par le théorème suivant d'Hironaka.

Théorème 2 d'Hironaka

Soit (Y, M) un couple formé

- d'une variété algébrique non singulière Y et
- d'un sous-ensemble algébrique M ;

alors il existe une désingularisation

$\tilde{Y} \xrightarrow{f} Y$ de ce couple qui peut se factoriser en une suite finie d'éclatements intermédiaires :

$$Y_{i+1} \xrightarrow{f_i} Y_i \quad ; \quad f = f_s \circ f_{s-1} \circ \dots \circ f_i \circ \dots \circ f_0 \quad ;$$

$$Y_{s+1} = \tilde{Y}$$

$$Y_0 = Y$$

tels que

- (i) chaque f_i est un éclatement de Y_i ;
- (ii) Y_i est non singulier $\forall i$;
- (iii) le centre D_i de f_i est une sous-variété algébrique fermée sans singularité de Y_i ;
- (iv) $D_i \subset (f_{i-1} \circ f_{i-2} \circ \dots \circ f_0)^{-1} M$; $D_0 \subset M$]].

III - GRAPHE ET FONCTIONS DE FEYNMAN

I - GRAPHE ♦

Définition 1 : un GRAPHE est une DOUBLE FLECHE d'ensembles finis pointés.

$$G : (L, 0) \xrightleftharpoons[B]{\$} (V, \infty) .$$

$L = L(G)$ est l'ensemble des LIGNES du graphe G

$V = V(G)$ est l'ensemble des VERTEX du graphe G

∞ est le vertex distingué dit vertex à l'infini, qui sert à pointer la réunion disjointe $V \cup \{\infty\} = (V, \infty)$

0 est un point supplémentaire qui sert à pointer la réunion disjointe $L \cup \{0\} = (L, 0)$.

$\$(1) \in V$ est la source ou vertex initial de la ligne $1 \in L$

$\mathbb{B}(1) \in V$ est le but ou vertex final de la ligne $1 \in L$

$$\$(0) = \mathbb{B}(0) = \infty$$

L admet une partition canonique $L = E \cup J$ définie par :

$E = E(G) = L \cap (\$^{-1}(\infty) \cup \mathbb{B}^{-1}(\infty))$ est l'ensemble des LIGNES EXTERNES

$J = J(G) = L \cap (\$^{-1}(V) \cap \mathbb{B}^{-1}(V))$ est l'ensemble des LIGNES INTERNES

♦ Ici ne sont introduites que les notions strictement nécessaires à la définition et à la manipulation des fonctions de Feynman. D'autres considérations peuvent être trouvées en annexe.

Remarque 1 : Notons que $(L,0) = (J,0) + (E,0)$ comme somme directe d'ensembles pointés.

Définition 2 : un MORPHISME entre deux graphes,

$$f = (f_1, f_2) : G \rightarrow G'$$

est un morphisme intérieur[♦] de doubles flèches d'ensembles pointés, ie c'est un couple d'applications pointées rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} G & & (L,0) & \xrightleftharpoons[B]{S} & (V,\infty) \\ f \downarrow & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ G' & & (L',0) & \xrightleftharpoons[B]{S} & (V',\infty) \end{array}$$

$\mathbb{Z}$ et tels que f_1 et f_2 n'envoient que le point distingué sur le point distingué ie $f_1^{-1}(0) = \{0\}$ et $f_2^{-1}(\infty) = \{\infty\}$.

Un SOUS-GRAPHE est un monomorphisme, (ie un f tel que f_1 et f_2 soient des inclusions).

Définition 3 : par exemple, par suppression des lignes externes de G , ie par restriction de $\mathbb{S}$ et $\mathbb{B}$ à $(J(G),0)$, on obtient un sous^{♦♦}-graphe qui est le plus grand parmi ceux qui n'ont

[♦]Cette restriction sur les morphismes a été introduite pour que l'assertion (a) de la proposition soit vraie. Il n'est pas sûr qu'il soit bon d'imposer que f_2 soit intérieur.

^{♦♦}Ici f_2 est l'identité de (V,∞) , f_1 est l'inclusion $(J,0) \hookrightarrow (E,0)$.

pas de lignes externes, on le nomme le

$$\boxed{\text{GRAPHE INTERIEUR } \overset{0}{G} \text{ de } G : (J, 0) \xrightarrow[\mathbb{B}]{\mathbb{S}} (V, \infty)}$$

On peut aussi le dépointer[♦] et l'écrire $\overset{0}{G} : J \rightrightarrows V$.

- un sous-graphe est PLEIN si chaque fois qu'il contient deux vertex il contient toute ligne dont la source est l'un et le but est l'autre.
- on note $\overline{G'}$ le sous graphe plein de G engendré par un sous graphe $G' \hookrightarrow G$.

Remarque 2 : nous venons de définir la catégorie des graphes comme sous catégorie de celle des doubles flèches d'ensembles pointés finis. Elle hérite de cette dernière les opérations connues, notamment celles de somme amalgamée^{♦♦} et de produit fibré.

Proposition 1 : (a) Les morphismes de graphes sont compatibles à la partition canonique en lignes internes et lignes externes.

(b) Les limites inductives et projectives finies existent dans la catégorie des graphes.

- ♦ Une caractérisation des graphes sans lignes externes est qu'ils sont dépointables, ie qu'ils proviennent de double flèche d'ensembles non pointés par adjonction d'un 0 et d'un ∞ .
- ♦♦ C'est ainsi que G apparaît comme la somme de son graphe intérieur et de son sous graphe des lignes externes amalgamées le long du graphe commun obtenu en les vidant de toutes leurs lignes.

Preuve:

Pour (a), il suffit de se rappeler que les morphismes de graphes n'envoient que les points distingués sur les points distingués.

Pour (b), il suffit de remarquer que les produits fibrés et les sommes amalgamées sont celles des doubles flèches d'ensembles pointés.]].

Graphe relatif associé à un sous graphe sans lignes internes

Soit $G' \hookrightarrow G$ un sous graphe sans lignes externes de G . Nous lui associons le graphe relatif G/G' (encore appelé contracté de G suivant G') par les constructions que voici

$$\begin{array}{ccc}
 & G' & \\
 & \downarrow & \\
 G'' & \nearrow & G \\
 & \searrow & \\
 & G/G' &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 (L', 0) & \rightrightarrows & (V', \infty) & & \\
 \downarrow & \searrow \sigma & \downarrow & & \\
 (L, 0) & \rightrightarrows & (V, \infty) & & \\
 \uparrow & \swarrow \beta & \downarrow \text{Id} & \searrow \tau_2 & \\
 (L', 0) & \rightrightarrows & (V, \infty) & & (\dot{V}, \infty) \\
 \downarrow \text{Id} & & \downarrow \tau_2 & & \\
 (L'', 0) & \rightrightarrows & (\dot{V}, \infty) & &
 \end{array}$$

où $(L, 0) = (L', 0) + (L'', 0)$ somme directe

où τ_2 est le conoyau de la double flèche (σ, β)

où le grand diagramme est commutatif.

• On peut lever cette restriction si l'on admet que dans un morphisme $f = (f_1, f_2)$, f_2 ne soit pas intérieur.

Remarques

- 1- cette construction ne marche que^{*} si τ_2 n'envoie sur le point distingué que le point distingué, ie que si G' n'a pas de lignes externes.
- 2- G'' est le graphe G auquel on a effacé les lignes de G' .
- 3- si G' est le diagramme composé : $(L,0) \xrightarrow[\tau_2 \circ B]{\tau_2 \circ S} (\dot{V},0)$ alors G''' est la somme amalgamée selon G'' de G et G/G' , et G'' est leur produit fibré au dessus de G''' .

Définition 4 : GRAPHE EXTERIEUR DE G c'est $G/\overset{o}{G}$, contracté de G suivant son graphe intérieur $\overset{o}{G}$.

La relation d'équivalence sur $V(G)$ donnée par le conoyau τ (de la double flèche) du graphe intérieur s'appelle V-connexité intérieure de G

$$\begin{array}{ccccc}
 \overset{o}{G} & (J,0) \rightrightarrows (V,\infty) & \xrightarrow{\tau} & (\dot{V},\infty) & \text{graphe intérieur de } G \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 G & (L,0) \rightrightarrows (V,\infty) & & & \text{graphe } G \\
 & \uparrow & & \downarrow \tau & \\
 G/\overset{o}{G} & (E,0) \rightrightarrows (\dot{V},\infty) & & & \text{graphe extérieur de } G
 \end{array}$$

$$(L,0) = (J,0) + (E,0)$$

Le graphe extérieur de G est donc déduit de celui des lignes externes en identifiant les vertex d'une même classe de V-connexité intérieure.

Graphe contracté par une surjection $V \xrightarrow{\tau} \dot{V}$ des vertex de G : $L \rightrightarrows V$

C'est l'adjoint^{**} au noyau^{**} de $(\tau \circ G) : L \xrightarrow[\tau \circ E]{\tau \circ S} \dot{V}$, ou le note $G(\tau)$ ou $G(\dot{V})$.

^{*}Ce qui donne alors certaines constructions intéressantes: on pourra examiner le contracté " $(G/\tilde{E})$ " de G suivant le sous graphe plein $\tilde{E}$ engendré par celui des lignes externes.

^{**}Voir annexe.

II - ESPACES ASSOCIES A UN GRAPHE

La succession des trois foncteurs :

$\mathbb{Z}$	GROUPE ABELIEN LIBRE
$\mathbb{N}$	NOYAU DE DOUBLE FLECHE DE GROUPES ABELIENS
$\mathbb{C}^4$	PRODUIT TENSORIEL PAR $\mathbb{C}^4$ (SUR $\mathbb{Z}$)

est appliquée aux GRAPHS pour donner les ESPACES dont nous aurons besoin.

Soit donc un graphe $G : (L, 0) \Rightarrow (V, \infty)$

de graphe intérieur $\overset{o}{G} : (J, 0) \Rightarrow (V, \infty)$

de graphe extérieur $G/\overset{o}{G} : (E, 0) \Rightarrow (V, \infty)$

On associe à G :

par $\mathbb{Z}$, la double flèche de groupes abéliens libres $\diamond$

$$\mathbb{Z}(L, 0) \Rightarrow \mathbb{Z}(V, \infty)$$

puis, par $\mathbb{N}$, le noyau $\diamond\diamond$ de cette double flèches de groupes,

$$0 \rightarrow \mathbb{N}(G, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}(L, 0) \rightrightarrows \mathbb{Z}(V, \infty)$$

puis, par $\mathbb{C}^4$, la suite exacte (de $\mathbb{C}^4$ -modules) du NOYAU TOTAL de G $\diamond\diamond\diamond$

$$x \triangle 1 \quad 0 \rightarrow \mathbb{N}(G, \mathbb{C}^4) \rightarrow \mathbb{C}^4(L, 0) \rightrightarrows \mathbb{C}^4(V, \infty)$$

$\diamond$ Rappelons que le groupe libre sur l'ensemble pointé $(L, 0)$ n'est autre que le groupe libre sur l'ensemble non pointé L .

Le foncteur $\mathbb{Z}$ identifie L à la base canonique de $\mathbb{Z}(L, 0)$ et l'on a $1 = 1 \times 1 \in \mathbb{Z}(L, 0)$.

Un élément de l'anneau $\mathbb{C}^4$ s'écrit $\underline{r} = (r_1, r_2, r_3, r_n) \in \mathbb{C}^4$ avec $r_i \in \mathbb{C}$, alors l'unité de l'anneau $\mathbb{C}^4$ s'écrit $\mathbb{1} = (1, 1, 1, 1)$; et le foncteur $\mathbb{C}^4$ identifie L à la base canonique de $\mathbb{C}^4(L, 0)$ et l'on a

$$1 = \mathbb{1} \times 1 \in \mathbb{C}^4(L, 0) \quad \text{et} \quad \underline{r} \times 1 \quad \text{s'écrit} \quad \underline{r}_1$$

$\diamond\diamond$ Ce noyau est le noyau ordinaire de la flèche différence $\mathbb{Z}(\$) - \mathbb{Z}(\mathbb{B})$

$\diamond\diamond\diamond$ La prise de ce noyau traduit la "loi de conservation des moments."

De même, à partir des graphes intérieurs et extérieurs de G , on forme la suite exacte (Δ) du NOYAU INTERIEUR de G et la suite exacte (x) du NOYAU EXTERIEUR de G et

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Delta & 0 & \longrightarrow & N_B(G, \mathbb{C}^4) & \longrightarrow & \mathbb{C}^4(J, 0) & \longrightarrow & \mathbb{C}^4(V, 0) \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \Lambda & 0 & \longrightarrow & N(G, \mathbb{C}^4) & \longrightarrow & \mathbb{C}^4(L, 0) & \longrightarrow & \mathbb{C}^4(V, 0) \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 x & 0 & \longrightarrow & N_x(G, \mathbb{C}^4) & \longrightarrow & \mathbb{C}^4(E, 0) & \longrightarrow & \mathbb{C}^4(\dot{V}, 0) \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Lemme $\diamond$ 2

- (1) Le diagramme commutatif ci-dessus est exact $\diamond\diamond$.
- (2) Les NOYAUX intérieur, total, et extérieur sont libres.
- (3) Les relations dont $N_B(G)$, $N(G)$, $N_x(G)$ sont les noyaux, sont à coefficients dans $\{-1, 0, +1\}$
- (4) $N_B(G) = N(G) \cap \mathbb{C}^4(J, 0)$, $0 \rightarrow N_B \hookrightarrow N \rightarrow N_x \rightarrow 0$ est exacte. ie le noyau extérieur est le quotient $\diamond$ du noyau total par le noyau intérieur.

Preuve

- (2) est évident; un sous-groupe abélien d'un abélien libre est libre.
- (3) Les doubles flèches de $\mathbb{C}^4$ -modules proviennent des doubles flèches d'ensembles pointés; pour chacune des suites il y a une relation de base par vertex et pour ce vertex chaque ligne a pour coefficient +1 ou -1 suivant que S seul ou B seul l'envoie sur ce vertex, et le

$\diamond$ Remarque: On a le même lemme relativement à un sous graphe interne quelconque G' et à son quotient G/G' .

$\diamond\diamond$ de $\mathbb{C}^4$ -module ou de $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, et aussi si ces objets sont considérés comme des variétés, $N(G)$ est alors aussi isomorphe au produit $N_B(G) \times N_x(G)$.

coefficient est 0 dans les autres cas.

[ie $\forall v \in (V, \infty)$ on a $\sum_{l \in L} (\delta_v^{\mathcal{A}(l)} - \delta_v^{\mathcal{B}(l)}) \cdot l = 0$.

(4) et (1) découlent de la construction et justifient la notation G/G' .

Remarque - Le foncteur module-libre commute aux limites inductives (ici aux sommes amalgamées).

- Dans les groupes abéliens, (les $\mathbb{C}^4$ -modules etc...), les limites projectives finies (ici prises du noyau) commutent aux limites inductives filtrantes; or la somme amalgamée n'est pas filtrante. $\square$

Définition 5 et notation

La coutume est de donner des noms aux espaces[♦] que l'on vient d'associer à un graphe, et d'adopter des notations pour leur point courant :

Le noyau extérieur $N_x(G, \mathbb{C}^4) \ni t$ est l'espace des PARAMETRES^{♦♦}.

Le noyau intérieur $N_B(G, \mathbb{C}^4) \ni z$ est l'espace d'INTEGRATION.

Le noyau total $N(G, \mathbb{C}^4) \ni (z, t)$ est l'espace TOTAL.

$(\underline{r}_e) \in \mathbb{C}^4(E, 0)$ est l'espace des moments externes $\underline{r}_e \in \mathbb{C}^4$, $e \in E$

$(\underline{r}_j) \in \mathbb{C}^4(J, 0)$ est l'espace des moments internes $\underline{r}_j \in \mathbb{C}^4$, $j \in J$.

$(\underline{r}_j, \underline{r}_e) \in \mathbb{C}^4(L, 0)$ est l'espace des moments de G .

♦ Ces espaces ont encore à la fois toutes les structures (sur $\mathbb{C}^4$ ou $\mathbb{C}$) de module, de variété analytique, de variété algébrique, d'ensembles analytiques, d'ensembles algébriques, mais ils pourront être modifiés en des espaces n'ayant plus qu'une partie de ces structures; notamment ils pourront perdre leur nature linéaire, puis leur nature non singulière

♦♦ Nous aurons à l'étendre quand nous introduirons les masses.

Remarque : c'est surtout la suite Δ , ie le noyau intérieur et sa position dans l'espace des moments internes qui retiendra notre attention.

Remarque FONDAMENTALE sur la (P.G.) dans le noyau intérieur.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & H_j & \hookrightarrow & C^4(J - \{i\}, 0) & \Longrightarrow & C^4(V, \infty) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \Delta \quad 0 \longrightarrow & N_B(G) & \hookrightarrow & C^4(J, 0) & \Longrightarrow & C^4(V, \infty) & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & C^4(\{i\}, 0) & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & 0 & & &
 \end{array}$$

Le diagramme exact ci-dessus, correspond à divers aspects de la fonction $\underline{r}_i$, c'est-à-dire à la projection sur $C^4(\{i\}, 0)$.

Son noyau, défini encore par la nullité du moment interne $\underline{r}_i$, est l'hyperplan $C^4(J - \{i\}, 0)$ de $C^4(J, 0)$. Son noyau dans $N_B(G)$ est H_j intersection de $N_B(G)$ et $C^4(J - \{i\}, 0)$. H_j est donc soit $N_B(G)$ tout entier soit un véritable hyperplan de $N_B(G)$.

ORDRE SUR J

Soit $|B| = \dim N_B(G)$ on peut toujours trouver un nombre $|\Gamma| \geq |B|$ et numéroté les points de J en $\diamond\diamond$

$$J = \{1, 2, \dots, |B|, \dots, |\Gamma|, \dots, |J|\},$$

$\diamond$ L'anneau de base est C^4 elle-même algèbre sur C par $C \rightarrow C^4 \quad x \mapsto (x, x, x, x)$

$\diamond\diamond$ Ceci donne une fibration croissante $B \subset \Gamma \subset J$.

- (1) Les $|B|$ premiers H_j : $H_1, H_2, H_b \dots H_{|B|}$ soient des hyperplans en $(P.G)$ de $N_B(G)$.
- (2) Les $|\Gamma|$ premiers H_j : $H_1, H_2, \dots, H_{|B|}, \dots H_\gamma, H_{|\Gamma|}$ soient des hyperplans tous distincts de $N_B(G)$.
- (3) Quant aux autres, $\forall j' > |\Gamma|$, $H_{j'}$ est confondu avec un des précédents ou est $N_B(G)$ tout entier.

Dans la suite nous supposons que J est toujours ainsi ordonné.]]

Ces hyperplans, puisque distincts, sont deux à deux en $(P.G)$ mais leur famille ne l'est pas si $|\Gamma| > |B|$ ie si $\Gamma \neq B$.

Or la fonction $\underline{r}_j$ (à valeur dans $\mathbb{C}^4$) est la dérivée de la fonction $\underline{r}_j^2$ (à valeur dans $\mathbb{C}$) qui jouera un rôle fondamental dans la suite puisque l'intégrand de Feynman l'aura pour pôle.

Nous aurons donc sous une forme ou sous une autre à les mettre en position générale dans $N_B(G)$.

III - RELATIONS D'INCIDENCE

Les espaces $N(G)$, $N_B(G)$, $N_X(G)$ sont en biais dans l'espace $\mathbb{C}^4(L,0)$, on préfère les paramétrer fidèlement comme suit :

Cas du noyau intérieur $N_B(G)$

On choisit un sous-ensemble $B \subset J$ de celui des lignes internes tel que dans :

$$\Delta \quad \begin{array}{ccccc} & & & \mathbb{C}^4(B,0) & \\ & q \nearrow & \sim & \uparrow & \\ 0 \longrightarrow & N_B(G) & \hookrightarrow & \mathbb{C}^4(J,0) & \longrightarrow \mathbb{C}^4(V,\infty) \end{array}$$

le diagramme commutatif ci-dessus, la projection q soit un ISOMORPHISME de $N_B(G)$ sur $\mathbb{C}^4(B,0) (\simeq \mathbb{C}^{4B})$.

Définition 6

- Choisir $B \subset J$, c'est choisir une base de BOUCLES^{♦♦} dans le graphe.
- La matrice $\underline{\varepsilon}(B)$ sur $J \times B$ qui représente l'application $j \circ q^{-1} : \mathbb{C}^4(B,0) \rightarrow \mathbb{C}^4(J,0)$ est la MATRICE d'INCIDENCE INTERIEURE de G (relative à B).
- On note $z = (q_b) \in \mathbb{C}^4(B,0) = Z(G)$ et on appelle $Z(G) = \mathbb{C}^{4B}$ cette paramétrisation de l'espace d'intégration.
- La fonction coordonnée $\underline{r}_j$, vaut sur le noyau intérieur $N_B(G)$:

$$\underline{r}_j = \varepsilon_j^b q_b, \text{ et de plus } \varepsilon_b^{b'} = \delta_{bb'}, \text{ pour } b \text{ et } b' \in B.$$

♦ L'inclusion $(B,0) \hookrightarrow (J,0)$ d'un ensemble pointé dans un autre admet une rétraction canonique et $\mathbb{C}^4$ transforme la somme directe $B \hookrightarrow \cdot \hookrightarrow B - J$ en la somme directe $\mathbb{C}^4(B,0) \hookrightarrow \mathbb{C}^4(J,0) \hookrightarrow \mathbb{C}^4(B - J,0)$ et associe aux rétractions canoniques, les projections du produit

$$\mathbb{C}^4(B,0) \leftarrow \mathbb{C}^4(J,0) \rightarrow \mathbb{C}^4(J - B,0).$$

♦♦ ie une base de l'homologie (sur $\mathbb{Z}$) du graphe intérieur G de G .

Cas du noyau extérieur $N_x(G) = N(G/\overset{0}{G})$

On choisit de même une base de lignes externes^{*} indépendantes

$(E - C) \subset E$ telle que dans

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{C}^4(E - C, 0) & & \\ & \nearrow p & \uparrow & & \\ 0 \longrightarrow N_x(G) & \xleftarrow{e} & \mathbb{C}^4(E, 0) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^4(V, \infty) \\ & \nwarrow & & & \end{array}$$

le diagramme commutatif ci-dessus, la projection p soit un isomorphisme de $N_x(G)$ sur $\mathbb{C}^4(E - C, 0) (\simeq \mathbb{C}^4(E - C))$.

On note $t = p_e \in \mathbb{C}^4(E - C, 0) = T(G)$ et on appelle $T(G) = \mathbb{C}^4(E - C)$ cette représentation de l'espace des paramètres.

La matrice $\underline{\phi}(C)$ sur $E \times (E - C)$ qui représente l'injection $e \circ p^{-1} : \mathbb{C}^4(E - C, 0) \hookrightarrow \mathbb{C}^4(E, 0)$ est la matrice d'incidence extérieure de G (relative à C).

Les matrices $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{\phi}$ ne suffisent pas à décrire la situation du graphe total.

Cas du noyau total $N(G)$

Proposition 3 :

(1) Les choix précédents de $B \subset J$ et de $(E - C) \subset E$ étant faits,

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{C}^4(B \cup E - C, 0) & & \\ & \nearrow y & \uparrow & & \\ 0 \longrightarrow N(G) & \xleftarrow{1} & \mathbb{C}^4(L, 0) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^4(V, \infty) \\ & \searrow \varphi & \downarrow & & \\ & & \mathbb{C}^4(J, 0) & & \end{array}$$

^{*}On devrait dire une base de boucles du graphe intérieur.

alors la projection y (dans le diagramme commutatif ci-dessus) est un isomorphisme.

(2) La matrice $\underline{\underline{\theta}}(B, C)$ sur $J \times (B \cup E - C)$ qui représente l'application $\varphi \circ y^{-1} : \mathbb{C}^4(B \cup E - C, 0) \rightarrow \mathbb{C}^4(J, 0)$ s'appelle matrice d'incidence TOTALE de G (relative à B et C).

(3) $\underline{\underline{\theta}}$ restreinte à $J \times B$ n'est autre que $\underline{\underline{\varepsilon}}(B)$.

(4) $\underline{\underline{\theta}}$ restreinte à $(J \times (E - C))$ est une nouvelle matrice nommée $\underline{\underline{\eta}}(C)$ (indépendante de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\phi}}$)

(5) Pour être complet disons que la matrice représentant $l \circ y^{-1}$ est : nulle sur $E \times B$, et $B \times (E - C)$, $\underline{\underline{\theta}}$ sur $J \times (B \cup E - C)$, $\underline{\underline{\phi}}$ sur $E \times (E - C)$.

(6) Toutes ces matrices sont à coefficients dans $\{-1, 0, +1\}$.

(7) J étant ordonné comme il a été dit, alors :

- les $|\Gamma|$ premières colonnes de $\underline{\underline{\varepsilon}}(B)$ sont 2 à 2 indépendantes.
- les $|B|$ premières colonnes de $\underline{\underline{\varepsilon}}(B)$ sont indépendantes.
- chacune des colonnes au-delà de $|\Gamma|$ est proportionnelle à l'une des $|\Gamma|$ premières.

(8) Sur le noyau TOTAL $N(G)$, la fonction coordonnée $\underline{r}_j$ $j \in J$ vaut donc :

$$\underline{r}_j = \varepsilon_j^b \underline{q}_b + \eta_j^e \quad \text{où} \quad (j, b, e) \in J \times B \times E - C$$

Preuve de la proposition

Compte tenu du choix $(B \cup E - C)$ de la base totale,

- (1) est corollaire du (1) du lemme
- (3) est corollaire du (4) du lemme
- (6) est corollaire du (3) du lemme
- (8) traduit le (3)
- (7) traduit la numérotation particulière de J et la filtration $B \subset \Gamma \subset J$ associée.
- (5) (nullité sur $E \times B$) car le graphe extérieur est sans lignes internes]

Remarque $y = (z, t) = (q_b, p_e) \in \mathbb{C}^4(B \cup E - C, 0) = Z(G) \times T(G)$ est (une représentation paramétrique de) l'espace total.

Remarque

Pour que $(E - C) \hookrightarrow E$ soit une base de lignes externes, il faut et suffit qu'il ait un et un seul élément de C qui aboutisse dans chaque classe de connexité V -intérieure[♦] de G .

[♦]déjà définie comme le conoyau du graphe intérieur.

IV - DEFINITION DE L'INTEGRALE DE FEYNMAN ASSOCIEE A UN GRAPHE

Soient :

$G : (L, 0) \Rightarrow (V, \infty)$ un GRAPHE

$E \subset E'$ une BASE E de lignes EXTERNES

$0 \rightarrow N(G) \rightarrow \mathbb{C}^4(L, 0) \Rightarrow \mathbb{C}^4(V, \infty)$ Le noyau ou ESPACE TOTAL

$J = \{1, 2, \dots, b, \dots, |B|, \dots, \Gamma, |J|\}$ ses lignes INTERNES NUMEROTEES $\diamond$

$B = \{1, 2, \dots, b, \dots, |B|\} \subset J$ la base de BOUCLES

$\underline{\underline{\theta}}$ sur $J \times (B \cup E)$ la matrice totale d'INCIDENCE

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ (= restriction de $\underline{\underline{\theta}}$ à $J \times B$) la matrice d'incidence intérieure

$\underline{\underline{\eta}}$ la restriction de $\underline{\underline{\theta}}$ à $J \times E$

Rappel : Sur $B \times E$, $\underline{\underline{\theta}}|_{B \times E} = \underline{\underline{\eta}}|_{B \times E} = 0$; sur $B \times B$ $\underline{\underline{\theta}}|_{B \times B} = \underline{\underline{\varepsilon}}|_{B \times B} = \underline{\underline{\Gamma}}$

Soit :

$(\underline{r}_j) \in \mathbb{C}^4(J)$ les coordonnées canoniques des moments internes ;

$z = (\underline{q}_b) \in \mathbb{C}^4(B) = Z(G)$ les coordonnées (de cette représentation) de l'ESPACE D'INTEGRATION ;

$t = (\underline{p}_e) \in \mathbb{C}^4(E) = T(G)$ les coordonnées (de cette représentation) de l'ESPACE DES PARAMETRES.

Alors :

(1) $\underline{\underline{\theta}} : \mathbb{C}^4(B \cup E) \rightarrow \mathbb{C}^4(J)$, $(\underline{q}_b, \underline{p}_e) \rightarrow (\underline{r}_j = \varepsilon_j^b \underline{q}_b + \eta_j^e \underline{p}_e)$ représente la fonction "moments internes" $N(G) \simeq Z(G) \times T(G) \rightarrow \mathbb{C}^4(J)$ (définie sur l'espace total).

$\diamond$ Cf. §§ précédent

$\diamond\diamond$ plus généralement, tout nombre quantique particulière v (spin, spin isotopiques, charge, etc...) donne une extension de l'espace des paramètres $v = (v_j, v_e) \in v(L) = A(L)$ où $A(L)$ est un A-truc libre sur L .

- (2) la MASSE $m = (m_j, m_e) \in M(L) = \mathbb{C}(L) = \mathbb{C}^{|L|}$ étend l'espace des paramètres.
- (3) $\forall j \in J$, le PROPAGATEUR Q_j est la fonction polynomiale définie sur $N(G)$ par $Q_j \equiv \underline{r}_j^2 + m_j^2 + i\varepsilon$
où $\underline{r}^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2$ est le carré euclidien de $\underline{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{C}^4$
- (4) $\forall j \in J$, $s^j \subset N(G) = Z(G) \times T(G)$ est la quadrique (cylindrique ou dégénérée) fournie par les zéros de Q_j ,
i.e. $s^j = \{(z, t) \mid (\varepsilon_j^b q_b + \eta_j^e p_e)^2 + m_j^2 = 0\}$
- (5) L'intégrand $\omega(G)$ est la (4B)-forme méromorphe sur $N(G) = Z(G) \times T(G)$ définie par

$$\omega(G) = \frac{d^4 \underline{q}_1 \wedge \dots \wedge d^4 \underline{q}_b \wedge \dots \wedge d^4 \underline{q}_B}{Q_1 \dots Q_{|B|} \dots Q_\gamma \dots Q_{|J|}} = \frac{d^{4B}(\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots, \underline{q}_B)}{(J)^Q}$$

on note que ses surfaces polaires sont précisément les s^j

- (6) L'intégrale de FEYNMAN est l'intégrale

- sur la partie réelle $Z(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4(B)$ de l'espace d'intégration $Z(G) = \mathbb{C}^4(B)$
- lorsque le paramètre reste réel, ie lorsque $(t, m) \in T(\mathbb{R})$ et $m \neq 0$
- lorsque la convergente absolue (et localement uniforme) est assurée en un point
- de la forme méromorphe de degré 4B de FEYNMAN $\omega(G)$

♦ On devrait introduire la fonction $Q : \mathbb{C}^4(J) \times_{(J)} M(J) \rightarrow \mathbb{C}(J)$
 $(\underline{r}_j, m_j) \rightarrow \underline{r}_j^2 + m_j^2 + i\varepsilon \in \mathbb{C}$ puis $\forall I \subset J$, ses composées ${}^{(I)}Q$ et ${}_{(I)}Q$ avec $\mathbb{C}(J) \rightarrow \mathbb{C}(I) \rightarrow \mathbb{C}$ (projection sur $\mathbb{C}(I)$, puis produit π_I)

♦ Pour une théorie scalaire où tous les nombres quantiques autres que la masse sont zéro.

$$[G, R] \quad \dot{I}(G)(t) = \int_{\mathbb{R}^4(B)} \omega(G) = \int_{\mathbb{R}^4(B)} \frac{d^4(q_1, q_2, \dots, q_b, \dots, q_B)}{(J)^Q}$$

Remarque : Il est bon de remarquer que pour $(t, m) \in T(R)$ et $m \neq 0$, l'intersection $\mathbb{R}^4(B) \cap \{(J)^Q = 0\}$ est vide.

Théorème

L'intégrale de FEYNMAN est à support singulier algébrique

Preuve

L'objet $\omega(G)$; $\bar{s} \leftarrow N(G) \xrightarrow{\pi} T(G)$; $t_0 \in T(R)$ satisfait toutes les hypothèses que le théorème du support singulier algébrique forme sur l'objet :

$$\omega \quad ; \quad \bar{s} \leftarrow Y \rightarrow T \quad ; \quad t_0 \in T(R)$$

hormis la propriété de π .

En effet, π est la projection $\pi : Z(G) \times T(G) \rightarrow T(G)$ du produit $N(G) = Z(G) \times T(G)$; or l'espace $Z(G) = \mathbb{C}^4(B) \cong \mathbb{C}^{4B}$ est affine donc non compact (si $B \neq 0$), donc π n'est pas propre.

Il suffit de trouver une variété algébrique, analytique, complexe, non-singulière, et compacte $X(G)$, porteuse de partie réelle, et une inclusion $Z(G) \supset X(G)$ qui soit une carte dense de l'atlas réel de X .

(Ce que nous abrègerons en disant : il suffit de trouver une compactification algébrique non singulière X de Z).

Alors la situation se prolonge à l'objet :

$$\omega(G) \quad ; \quad \bar{s} \leftarrow \bar{N}(G) \xrightarrow{\pi} T(G) \quad ; \quad t_0 \in T(R)$$

tout en respectant les hypothèses déjà acquises.

[ici $\bar{N} = X \times T$ et $\bar{s}$ est la fermeture de s dans $\bar{N}$, plus éventuellement certaines des composantes irréductibles de $\bar{N} - N$].

L'intégrale $I(G)(t)$, $t \in T(\mathbb{R})$ est la même pour ces deux objets : le théorème du support singulier s'applique au deuxième donc au premier :

La fonction sur $T(\mathbb{R})$ définie par $I(G)(t)$ $t \in T(\mathbb{R})$, est le germe d'une fonction analytique multiforme, ramifiée autour d'un support singulier algébrique dans T .]]

CHOIX DE LA COMPACTIFICATION

La détermination du support singulier $L \subset T$, la détermination de la ramification, ie le calcul du $\pi_1(T - L)$ et son action sur le groupe d'homologie $H_c^{4B}(X(t_o) - \bar{S}(t_o))$, sont autant de problèmes qu'il sera plus aisé de résoudre que le couple $\bar{s} \subset \bar{N}(G)$ sera plus près de la Position Générale ; ie que la compactification $X(G)$ de $Z(G)$ aura été mieux choisie, c'est à ce choix que nous devons nous employer.

IV - GRAPHS A UNE SEULE BOUCLE
COMPACTIFICATION EN POSITION GENERALE

I - EXAMEN DE LA SITUATION AFFINE. PARABOLISATION. P.G.

QUESTION : Avant toute compactification, les composantes s^j de la variété polaire de l'intégrale de FEYNMAN $\omega(G)$ sont elles en Position Générale de l'espace AFFINE total $Z(G) \times T(G) = \mathbb{C}^4(B) \times \mathbb{C}^4(E) \ni (q_b, p_e)$?

Autrement dit ici, existe-t-il une valeur du paramètre $t_o = (p_e, m) \in \mathbb{C}^4(E) \times \mathbb{C}^4(L)$ telle que les hypersurfaces $s^j(t_o) \subset Z(G) = \mathbb{C}^4(B)$ soient en Position Générale dans $\mathbb{C}^4(B)$?

Proposition : Si $B = \Gamma$, donc notamment si le graphe n'a qu'une seule boucle $\diamond\diamond\diamond$, la réponse à la question précédente est OUI : les s^j sont en P.G. dans l'AFFINE $Z(G) \times T(G)$.

Preuve : Pour valeur spéciale $t_o = (p_e, m)$ du paramètre, on prend $p_e = 0 \forall e \in E$, m réel, $m_j \neq 0$, $m_j \neq m_i \forall i = j$. Alors $s^j(t_o)$ est d'équation réelle $q_b^2 + m_j^2 = 0$, où $q_b \in \mathbb{C}^4$. C'est la sphère affine centrée à l'origine de $\mathbb{C}^4\{b\}$ dont le rayon est imaginaire pur et vaut $\sqrt{-1} m_j$. Les $s^j(t_o)$ sont non singulières et leur intersection deux à deux est vide dans $\mathbb{C}^4\{b\} = \mathbb{C}^4$, elles sont donc en P.G. dans $\mathbb{C}^4\{b\}$. Les s^j sont donc en P.G. dans $Z(G) \times T(G)$.]]

- $\diamond$ rappelons que $m \in \mathbb{C}(L)$ est la masse.
- $\diamond\diamond$ sections de s^j par $Z(G) \times \{t_o\} \subset Z(G) \times T(G)$.
- $\diamond\diamond\diamond$ alors $B = \Gamma = \{b\}$ n'a qu'un seul élément.

La preuve de la proposition a mis l'accent sur le fait suivant : les variétés polaires $s^j(t) \subset Z(G)$ sont des quadriques en général non dégénérées, dépendant du paramètre $t = (p_e, m)$ et indexées par $j \in J$. Ces quadriques ont entre elles (lorsque t et j varient) des relations bien particulières que met en évidence la parabolisation (ou l'inversion) de l'ambient $\mathbb{C}^4$:

Au lieu de manipuler des quadriques variables dans un affine fixe, nous préférons manipuler des variétés planes variables dans un plus gros affine ambient et considérer une variété analytique fixe dont la famille des sections par ces variétés planes soit précisément isomorphe^{♦♦} à la famille des quadriques précédentes.

La parabolisation $\mathbb{C}^4 \rightarrow \Sigma^4 \subset \mathbb{C}^5$ de $\mathbb{C}^4$.

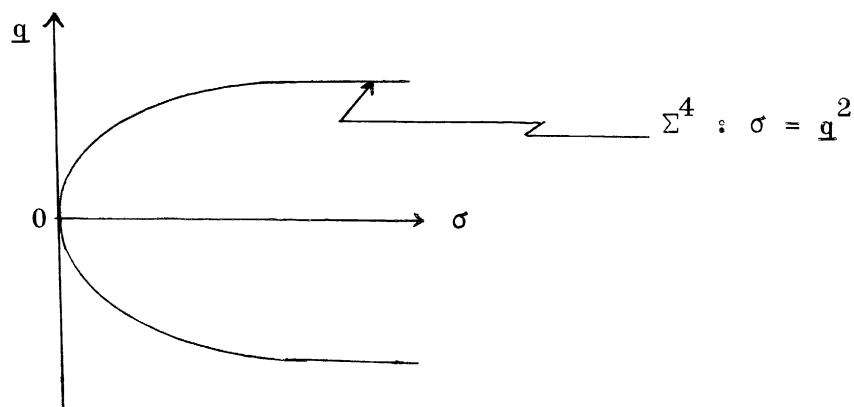
Elle consiste à transporter $\mathbb{C}^4$ (et tout ce qui nous intéresse de $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^4\{b\}$) sur son image biholomorphe Σ^4 dans $\mathbb{C}^5$, donnée par l'injection "réelle"

$$\boxed{\mathbb{C}^4 \hookrightarrow \Sigma^4 \subset \mathbb{C}^5} \quad q \mapsto (q, \sigma = q^2)$$

Cette image est le paraboloïde Σ^4 d'équation $\sigma = q^2$; le biholomorphisme "réel" réciproque $\mathbb{C}^4 \leftarrow \Sigma^4$ est la restriction à $\Sigma^{4♦♦♦}$ de la projection $\mathbb{C}^4 \leftarrow \mathbb{C}^5 \quad (q, \sigma) \mapsto (q)$.

- ♦ On devrait dire linéaires affines.
- ♦♦ analytiquement, ou au moins différentiablement.
- ♦♦♦ $\Sigma^4 = \Sigma^4(\mathbb{C})$ est ainsi munie d'une partie réelle $\Sigma^4(\mathbb{R})$

La représentation graphique est



- (1) Le grand affine ambiant est $\mathbb{C}^5 = \mathbb{C}^5\{b\} \ni (q, \sigma)$
- (2) La variété fixe est ce parabolofide $\Sigma^4\{b\} \subset \mathbb{C}^5\{b\}$
- (3) Les variétés polaires $\mathfrak{s}^j(t)$ dont nous avons à examiner la position relative dans $\mathbb{C}^4\{b\}$ étaient les quadriques :

$$Q_j \equiv (q + p_j)^2 + m_j^2 \quad \text{où} \quad \begin{cases} j \in J \\ q \in \mathbb{C}^4\{b\} \\ p_j = \eta_j^1 p_e \end{cases}$$

Elles deviennent, sous l'injection

$$\mathbb{C}^4\{b\} \hookrightarrow \mathbb{C}^5\{b\} \quad q \mapsto (q, \sigma = q^2),$$

les SECTIONS de la variété fixe $\Sigma^4 = \Sigma^4\{b\}$ par les $\mathbb{C}$ -hyperplans variables de $\mathbb{C}^5$ d'équation :

$$\boxed{K_j(t) \equiv \sigma + 2p_j \cdot q + (p_j^2 + m_j^2) = 0}, \quad \text{où } t = (\underline{a}_j, m_j)$$

♦ par abus, nous considérons souvent que les $p_j = \eta_j^1 p_e \in C(J)$ sont indépendants et nous notons $t = (p_j, m_j)$ le paramètre.

(4) L'intégrale garde la même valeur mais son expression devient :

$$i(G)(t) = \int_{\Sigma^4(\mathbb{R})} \frac{d^4 \underline{q}}{\prod_{j \in J} K_j(t)}$$

où $\Sigma^4(\mathbb{R})$ est la partie réelle dont est munie $\Sigma^4 = \Sigma^4(\mathbb{C})$.

$\Sigma^4(\mathbb{R})$ est l'image biholomorphe de $\mathbb{R}^4 \subset \mathbb{C}^4\{b\}$.

Remarque : Comme nous l'avions annoncé, les variétés polaires sont remplacées toutes à la fois par des sections hyperplanes, d'une variété non singulière fixe (ici une hypersurface) Σ^4 d'un affine ambiant fixe.

L'hyperplan variable $K_j(t)$ a pour coordonnées homogènes

$$(2 \underline{a}_j, 1, \underline{p}_j^2 + \underline{m}_j^2) \in P^5$$

donc balaye un ouvert dense $\mathbb{C}^5$ de ce projectif P^5 lorsque $(\underline{p}_j, \underline{m}_j) \in \mathbb{C}^5$ balayent $\mathbb{C}^5$.

Les hyperplans $(K_j(t))_{j \in J}$ varient donc indépendamment les uns des autres, ce qui montre que les hypersurfaces de $\mathbb{C}^5 \times T(G)$

$$(J)^K = \bigcup_{j \in J} K_j ; \quad \Sigma^4 \times T(G)$$

sont en P.G. dans $\mathbb{C}^5 \times T(G)$.

II - LA COMPACTIFICATION EN POSITION GENERALE

L'analyse de la situation affine nous a montré qu'avant toute compactification il y avait P.G.

Alors la démonstration du théorème du support singulier algébrique[♦] montre qu'il existe une compactification (réelle, algébrique, etc...) de la projection $\pi : Z \times T \rightarrow T$ [ie une compactification $Z \rightarrow X$ qui dépend avec une certaine régularité du paramètre $t \in T$] telle que dans l'objet ainsi obtenu :

$$\omega(G) \quad ; \quad \bar{s} \hookleftarrow \bar{N}(G) \xrightarrow{T} T(G) \quad ;$$

$\bar{s}$ soit à croisements normaux^{♦♦} dans $\bar{N}$ (non singulier lui-même) et donc aussi (en raison de la convergence supposée) $\bar{s}$ soit de partie réelle vide.

Nous allons exhiber une telle compactification en (P.G.) pour le cas de graphes suffisamment convergents. Elle est liée à l'aspect Σ^4 de la situation affine. Nous aurons à la modifier par éclatement pour donner une autre compactification aussi en (P.G.) valable aussi dans le cas des graphes moins convergents. Elle est liée à l'aspect $\Sigma^4 \times \mathbb{C}^4$ de la situation affine. Par ces compactifications, $\bar{N}(G)$ sera encore un produit $\bar{N} = X \times T$.

Nous comparerons les diverses compactifications.

[♦] jointe au fait que $\mathbb{R}^4(B) \cap \{ \bigcap_{(j)} Q = 0 \}$ est vide pour une intégrale de Feynman si t est réel et $m_j \neq 0 \forall j$.

^{♦♦} ie en P.G.

1. La compactification en SPHERE PROJECTIVE $\mathbb{C}^4 \hookrightarrow \bar{\Sigma}^4 \subset \bar{\mathbb{P}}^5$

Dans cette compactification, la chaîne d'intégration, ie la partie réelle de $\mathbb{C}^4$ ou de Σ^4 , se trouve compactifiée par un seul point supplémentaire, et devient donc une sphère réelle de dimension 4 qui est une variété orientable.

Cette compactification est la fermeture dans le projectif $\bar{\mathbb{P}}^5$ de la situation affine sous son aspect de paraboloïde $\Sigma^4 \hookrightarrow \mathbb{C}^5$.

Autrement dit nous considérons la situation affine $\mathbb{C}^4$ (ou Σ^4) comme une carte dense d'une variété analytique complexe compacte $\bar{X}_G = \bar{\Sigma}^4$.

(1) L'image bijective bi-réelle de la carte dense est le paraboloïde
 $\mathbf{q}^2 = \sigma$ plongé dans $\mathbb{C}^5 \ni (\mathbf{q}, \sigma)$,
la carte est donc $\mathbb{C}^4 \hookrightarrow \mathbb{C}^5$
 $\mathbf{q} \mapsto (\mathbf{q}, \sigma = \mathbf{q}^2)$

(2) La variété analytique complexe compacte est la quatre-sphère
complexe compacte $\bar{\Sigma}^4 = \bar{X}_G$ fermeture de la carte dans la compacti-
 fication naturelle de $\mathbb{C}^5$ en le plan projectif complexe $\bar{\mathbb{P}}^5$ de
 dimension 5 :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^4 &\rightarrow \bar{\Sigma}^4 \subset \bar{\mathbb{P}}^5 \ni (\mathbf{q}, \sigma, \tau) \\ \mathbf{q} &\rightarrow (\mathbf{q}, \sigma = \mathbf{q}^2, \tau = 1) \end{aligned}$$

où $(\mathbf{q}, \sigma, \tau)$ sont les coordonnées homogènes de $\bar{\mathbb{P}}^5$.

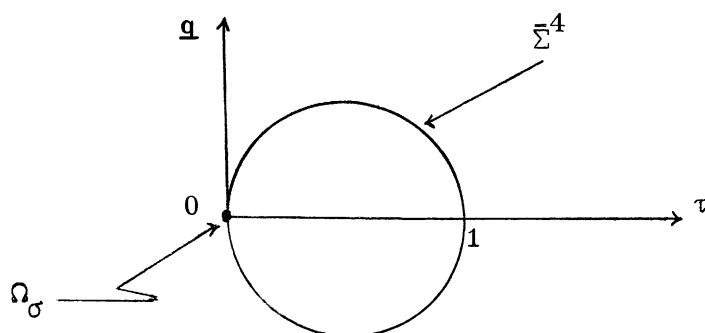
$$\begin{aligned} \bullet B = 1, \mathbb{C}^4 &= \mathbb{C}^4\{b\} = \mathbb{C}^4(B) = Z(G) \ni \mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3) \\ (\mathbf{q}^2 &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

On remarque que cette fermeture est non singulière, que sa partie réelle est bien le $\mathbb{R}^4$ d'origine compactifié par un point supplémentaire seulement :

$$\Omega_\sigma = (\underline{q} = 0, \sigma \neq 0, \tau = 0) \in R_e \bar{\Sigma}^4 \subset \bar{P}^5$$

(3) Commentaire

- dans la carte $\sigma + \tau = 1$, la représentation de la partie réelle de $\bar{\Sigma}^4$ est



<u>Carte</u> $\sigma + \tau = 1$ $\Downarrow$ $\underline{q}^2 = \tau(1 - \tau)$

- la fermeture S^4 de $\mathbb{R}^4$ est une sphère réelle affine, il suffit de deux cartes affines de $\bar{\Sigma}^4$ (ou de $\bar{P}^5$) pour la recouvrir, on prendra la carte $\sigma = 1$ qui contient Ω_σ

et la carte $\tau = 1$ qui contient Ω_τ

- la variété à l'infini $(\bar{\Sigma}^4 - \Sigma^4)$ est l'intersection de $\bar{\Sigma}^4$ par son plan tangent en Ω_σ , c'est le cône $\Delta_\sigma^3 = \{(\underline{q}, \sigma, \tau) \mid \tau = 0, \underline{q}^2 = 0\}$

• Ω_σ est caractérisé par le fait que à part σ toutes ses coordonnées homogènes dans $\bar{P}^5$ sont nulles.

2. Transformation de l'intégrale sous cette compactification

$B = 1$, le graphe à une boucle est décrit suit (pour simplifier) :

$$J = \{1, 2, \dots, j, |J|\} ; E = \{1, 2, \dots, e, |E|\} ; |E| = |J|$$

$$\underline{\varepsilon} \text{ sur } J \times B \text{ telle que } \varepsilon_j^1 = 1 \quad \forall j$$

$$\underline{\eta} \text{ sur } J \times E \text{ telle que } \eta_j^e = \delta_{je}$$

$$z = \underline{q} \in \mathbb{C}^4(B) = \mathbb{C}^4 = Z(B)$$

$$v = \underline{p}_e \in \mathbb{C}^4(E) = T(G)$$

$$(\underline{r}_j) \in \mathbb{C}^4(J) \quad \text{donc} \quad \boxed{\underline{r}_j = \underline{q} + \underline{p}_j} \quad \text{et donc}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_j &= (\underline{q} + \underline{p}_j)^2 + m_j^2 \\ \omega(G) &= d^4 \underline{q} / \prod_{j=1}^J Q_j \end{aligned}}$$

$$\text{Sous l'injection } \mathbb{C}^4 \hookrightarrow \bar{\Sigma}^4 \subset \bar{P}^5 ; \underline{q} \mapsto \frac{1}{\tau}(\underline{q}, \sigma = \underline{q}^2, 1)$$

- la forme numérateur devient (sur $\bar{\Sigma}^4$) :

$$d^4 \underline{q} \mapsto d^4(\underline{q}/\tau) = \frac{1}{\tau^4} \frac{\bar{\omega}'(\underline{q}, \tau)}{\tau} = - \frac{1}{\tau^4} \frac{\bar{\omega}'(\underline{q}, \sigma)}{\sigma}$$

- le polynôme Q_j devient :

$$Q_j = (\underline{q} + \underline{p}_j)^2 + m_j^2 \mapsto \underline{q}^2/\tau^2 + 2\underline{p}_j \cdot \underline{q}/\tau + \underline{p}_j^2 + m_j^2$$

$$\text{ie } (1/\tau) [\sigma + 2\underline{p}_j \cdot \underline{q} + (\underline{p}_j^2 + m_j^2)\tau]$$

- l'intégrale devient donc :

$$\text{Re } \bar{\Sigma}^4 \int \frac{\bar{\omega}'(\underline{q}, \sigma)/\sigma}{M_o^\alpha M_1 M_2 \dots M_J} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{aligned} M_j &= \sigma + 2\underline{p}_j \cdot \underline{q} + \tau(\underline{p}_j^2 + m_j^2) \\ M_o &= \tau \\ \alpha &= 4 - |J| \\ \bar{\Sigma}^4 &= \{(\underline{q}, \sigma, \tau) \in \bar{P}^5 \mid \underline{q}^2 = \sigma\tau\} \end{aligned} \right.$$

♦ Cf. le rappel différentiel : $\bar{\omega}'(h_o, h_1, \dots, h_p) = \sum_i \frac{h_i}{\bar{d}h_i} dh_o \wedge \dots \wedge dh_p$

3. Graphes suffisamment convergents

$$\sum_j |\varepsilon_j^4| \geq 4$$

Proposition 1 : Si le graphe à une boucle est suffisamment convergent, ie, si avec nos conventions $|J| \geq 4$, alors la compactification $\mathbb{C}^4 \hookrightarrow \bar{\Sigma}^4$ de $Z(G)$ est en (P.G.) en ce sens que dans l'objet obtenu

$$\omega(G) ; \quad \bar{s} \hookrightarrow \bar{\Sigma}^4 \times T(G) \rightarrow T(G)$$

$\bar{s}$ est à croisements normaux dans $\bar{\Sigma}^4 \times T(G)$ et la chaîne d'intégration $\text{Re } \bar{\Sigma}^4$ ne rencontre plus les surfaces polaires $M_j(t_o) = 0$ et est donc un cycle absolu et orientable de $\bar{\Sigma}^4 - (J)^{M(t)}$

L'intégrale ne dépend que de sa classe d'homologie dans $H_c^4(\bar{\Sigma}^4 - (J)^{M(T)})$.

Le support singulier est compris dans $\{(t) \in T(G) \mid (J)^{M(t)} \subset \bar{\Sigma}^4 \text{ n'est pas en P.G.}\}$.

Preuve : Il suffit de remarquer successivement que

0°/ M_o n'est pas polaire puisque $\alpha = (4 - |J|) \leq 0$

1°/ L'égalité $\bar{\omega}'(\underline{q}, \sigma)/\sigma \Big|_{\bar{\Sigma}^4} = \bar{\omega}'(\underline{q}, \tau)/\tau \Big|_{\bar{\Sigma}^4}$ entraîne que cette 4-forme est holomorphe sur tout $\text{Re}(\bar{\Sigma}^4)$ puisque $\sigma = 1$ ou $\tau = 1$ suffisent à recouvrir la partie réelle. En fait, l'emploi d'égalité, analogue pour les couples d'autres cartes montre que cette 4-forme est holomorphe sur tout $\bar{\Sigma}^4$

Cette 4-forme est donc fermée sur $\bar{\Sigma}^4$

2°/ Les variétés M_1, M_2, M_3, M_4, M_J sont des hypersurfaces qui, lorsque le paramètre $t = (\underline{p}_j, m_j)$ est fixé, sont les sections de $\bar{\Sigma}^4$ par les hyperplans :

$$M_j \equiv \sigma + 2\underline{p}_j \cdot \underline{q} + \tau(\underline{p}_j^2 + m_j^2) = 0.$$

3°/ Si $m_j \neq 0$ est réel $\forall j$ si $p_j = 0 \forall j$, alors aucun de ces hyperplans n'a de point réel sur $\bar{\Sigma}^4$.

[En effet, $M_j(p_j = 0, m_j \neq 0 \text{ réel}) \equiv \sigma + \tau m_j^2 = 0$ or $m_j^2 > 0$ et $\sigma\tau = \underline{q}^2$ est positif si $\underline{q}$ est réel donc on devrait avoir $\sigma = \tau = 0$ et $\underline{q}^2 = 0$ et $\underline{q}$ réel donc $\underline{q} = 0$ qui n'est pas un point de $\bar{\Sigma}^4$] donc si $t_o = (p_j, m_j)$ est réel et $|p_j| \ll |m_j|$, $\forall j$ $M_j(t_o)$ n'a pas de point réel, donc ne rencontre pas la chaîne d'intégration.

4°/ En choisissant $t_o = (p_j, m_j)$ tel que, de surcroît, les directions des p_j soient 4 à 4 indépendantes, alors les $M_j(t)$ sont en Position Générale en t_o .

5°/ $\omega(G)$ est une forme fermée hors de $(J)^M = \bigcup_{j \in J} M_j$.

6°/ Enfin $\text{Re } \bar{\Sigma}^4 = S^4$ est une 4-sphère réelle donc est une variété non singulière orientable, et, comme elle ne rencontre pas les M_j , la valeur de l'intégrale ne dépend que de la classe de

$$S^4 = \text{Re } \bar{\Sigma}^4 \text{ dans } H_c^4(\bar{\Sigma}^4 - (J)^M(t)) \quad]]$$

4. Graphes convergents mais insuffisamment $\sum_j |\varepsilon_j^1| = 3$
ie Graphe triangulaire Δ .

La compactification précédente $\mathbb{C}^4 \hookrightarrow \bar{\Sigma}^4 \subset \bar{P}^5$ n'est pas assez bonne :

Les conclusions précédentes restent valables pour les trois surfaces M_1, M_2, M_3 , mais pas pour la surface polaire supplémentaire $M_o \equiv \tau = 0$. Celle-ci a un point réel dans $\bar{\Sigma}^4$: $\Omega_o = (\underline{q} = 0, \sigma \neq 0, \tau = 0)$ qui est unique donc singulier puisque $\dim(M_o \cap \Sigma^4) = 3$.

Les M_1, M_2, M_3 sont en P.G. entre eux et avec M_0 , mais M_0 a une singularité : Ω_σ .

En fait M_0 est le cône (d'équation réelle) $\Delta_\sigma^3 = \{(\underline{q}, \sigma, \tau) \mid \underline{q}^2 = 0, \tau = 0\}$ intersection de $\bar{\Sigma}^4$ par son plan tangent en Ω_σ .

Pour détacher ce cône de $\text{Re } \bar{\Sigma}^4 = S^4$, tout en le désingularisant, il suffit d'éclater dans $\bar{\Sigma}^4$ son origine $\Omega_\sigma \in \bar{\Sigma}^4$.

On notera que ceci dégage bien M_0 de $\bar{\Sigma}^4$

[car, $\Omega_\sigma \in \bar{\Sigma}^4$ étant un point, son éclatement transforme $\bar{\Sigma}^4$ en $\bar{\bar{\Sigma}}^4$ non singulière ; transforme $\text{Re } \bar{\Sigma}^4$ en $\text{Re } \bar{\bar{\Sigma}}^4$, que l'on peut décrire comme formée des couples d'un point de S^4 et d'une direction toujours réelle associée ; transforme Δ^3 en $\bar{\Delta}^3$ transformée stricte, que l'on peut décrire comme formée des couples d'un point de Δ^3 et d'une direction toujours non réelle associée]

De plus, la transformée stricte $\bar{M}_0$ de M_0 est non singulière : les points situés au-dessus de Ω_σ forment la quadrique projective non dégénérée de dimension deux dont l'équation est celle des directions des génératrices du cône Δ_σ^3 .

Enfin nous aurons à vérifier que dans cette transformation, la transformation de la différentielle elle-même n'introduit pas de surface gênante.

Passons à la réalisation : éclatement de $\Omega_\sigma \in \bar{\Sigma}^4$. $\bar{\Sigma}^4 \xrightarrow{f_0} \bar{\bar{\Sigma}}^4$

Toutes les transformations monoïdales de $\bar{\Sigma}^4$ de centre Ω_σ sont équivalentes. Mais il y a plusieurs façons de la réaliser qui sont différentes dans l'ambient $\bar{P}^5$ qui contient $\bar{\Sigma}^4$;

Prenons celle qui évite de prendre des cartes locales de $\bar{\Sigma}^4$, parce qu'elle permet de tout traiter dans un même système de coordonnées homogènes.

Le point $\Omega_\sigma = (\underline{q} = 0, \sigma \neq 0, \tau = 0) \in \bar{\Sigma}^4 \subset \bar{P}^5$ est caractérisé dans $\bar{P}^5$ par l'idéal homogène à cinq générateurs $(\underline{q}, \tau) = (q_0, q_1, q_2, q_3, \tau)$. Pour l'éclater dans $\bar{P}^5$ on prend la fermeture $\bar{P}_5$ de l'injection $(\bar{P}^5 - \Omega_\sigma) \rightarrow \bar{P}^4 \times \bar{P}^5$ définie par $(\underline{q}, \sigma, \tau) \rightarrow (\underline{k}, \rho) \cdot (\underline{q}, \sigma, \tau)$ avec $(\underline{k}, \rho) = (\underline{q}, \tau)$. Pour éclater Ω_σ dans $\bar{\Sigma}^4$, il suffit de prendre la restriction à $\bar{\Sigma}^4 - \Omega_\sigma$ de cette injection et de prendre la fermeture de l'image

$$(\bar{\Sigma}^4 - \Omega_\sigma) \hookrightarrow \bar{P}^4 \times \bar{P}^5$$

$$\{(\underline{q}, \sigma, \tau) \mid \underline{q}^2 = \sigma\tau\} \quad (\underline{q}, \sigma, \tau) \mapsto (\underline{q}, \tau) \cdot (\underline{q}, \sigma, \tau)$$

En paraphrasant ce qui vient d'être dit, l'éclatement

$$f_o : \bar{\Sigma}^4 \rightarrow \bar{\Sigma}^4$$

s'obtient en restreignant la deuxième projection g

$$f : \bar{P}^4 \times \bar{P}^5 \rightarrow \bar{P}^5 \quad \text{successivement à :}$$

$$\bar{P}^5 = \{(\underline{k}, \rho) \wedge (\underline{q}, \tau) = 0\} \rightarrow \bar{P}^5, \quad \text{puis à son sous-ensemble}$$

$$\bar{\Sigma}^4 = \{\underline{k} \cdot \underline{q} = \sigma\rho\} \xrightarrow{f_o} \bar{\Sigma}^4$$

Par cet éclatement f_o , les M_1, M_2, M_3 restent isomorphes à elles-mêmes et peuvent garder leurs anciennes équations ; par contre M_o , ie Δ_σ^3 , est modifiée, elle devient non singulière et sa transformée stricte est d'équation $\underline{k}^2 = 0$ (à joindre à celles de $\bar{P}^5$ et de $\bar{\Sigma}^4$) et coupe $f_o^{-1}(\Omega_\sigma)$ en $\underline{q} = \tau = 0, \underline{k}^2 = 0$ qui n'a pas de point réel car ce serait $\underline{k} = 0$, mais l'équation de $\bar{\Sigma}^4, \underline{k} \cdot \underline{q} = \sigma\rho$, entraînerait alors $\sigma\rho = 0$, ce qui est impossible car $\sigma = 0$ est incompatible à $\underline{q} = \tau = 0$ dans $\bar{P}^5$,

$$\text{et } \rho = 0 \text{ est incompatible à } \underline{k} = 0 \quad \text{dans } \bar{P}^4.$$

Finalement, il ne reste plus qu'à transformer la forme en se servant du rappel différentiel. On trouve pour nouvelle forme de l'intégrale :

$$\text{Re } \bar{\Sigma}^4 \int \frac{\bar{\omega}}{\underline{k}^2 M_1 M_2 M_3} ,$$

où $\bar{\omega}$ est la restriction à $\bar{\Sigma}^4$ de la 4-forme

$$\bar{\omega} = [(\underline{q}^2/\underline{k}^2) \bar{\omega}'(\underline{k}, \sigma) + \frac{1}{2} \sigma d(\underline{q}^2/\underline{k}^2) \wedge \bar{\omega}'(\underline{k})]$$

$\bar{\omega}$ est régulière excepté précisément sur $\underline{k}^2 = 0$, ie sur la transformée stricte (non singulière) de $\Delta_{\sigma^0}^3$. Toutes les vérifications sont donc achevées et on peut énoncer :

Proposition 2

Si le graphe est triangulaire, la compactification $\mathbb{C}^4 \hookrightarrow \bar{\Sigma}^4$ de $Z(G)$, donnée par la fermeture de l'injection $\mathbb{C}^4 \hookrightarrow \bar{P}^4 \times \bar{P}^5$

$$\underline{q} \rightarrow (\underline{q}, 1) \times (\underline{q}, \sigma = \underline{q}^2, 1)$$

est en (P.G.) en ce sens que, dans l'objet obtenu :

$$\omega(G) ; \quad \bar{\Sigma} \hookrightarrow \bar{\Sigma}^4 \times T(G) \rightarrow T(G)$$

- $\bar{\Sigma}$ est à croisements normaux dans $\bar{\Sigma}^4 \times T(G)$,
- et donc la chaîne d'intégration $\text{Re } \bar{\Sigma}^4$ ne rencontre plus les surfaces polaires $\bar{S}(t_0)$ de l'intégrale transformée et est un cycle relatif qui borde dans $f_0^{-1}(\Omega_\sigma) = \bar{P}_k^3$ ($\rho = 0$).
- L'intégrale ne dépend que de sa classe d'homologie dans $H_c^4(\bar{\Sigma}^4 - \bar{S}(t), \bar{P}_k^3 \bar{S}(t))$.
- Le support singulier est compris dans $\{t \in T(G) \mid \bar{S}(t) \subset \bar{\Sigma}^4 \text{ n'est pas en P.G.}\}$

]]

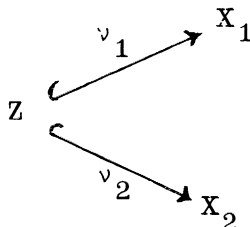
$\bar{P}^4$ x $\bar{P}^5$ admet deux projections intéressantes

$$\bar{p}^4 \xrightarrow{g} \bar{p}^4 \times \bar{p}^5 \xrightarrow{f} \bar{p}^5$$

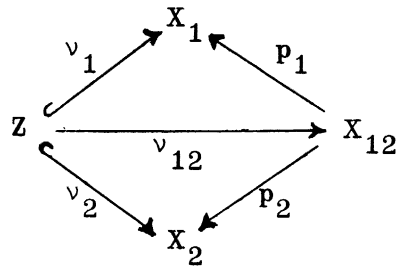
Elle compactifie $\mathbb{R}^4 \subset \mathbb{C}^4$ en une variété, non orientable il est vrai, qui ne rencontre pas les nouvelles variétés polaires (même pour $G = \Delta$).

$$V = \{(\underline{k}, \rho) \mid \rho = 0, \quad \underline{k}^2 = 0\} \subset \bar{P}_\infty^3$$

On retiendra de ceci que si on a deux compactifications v_1 et v_2 ayant chacune un avantage :



On en déduit une troisième par la diagonale v_{12}



par fermeture de $z \mapsto (v_{12}(z) = v_1(z) \times v_2(z)) \in X_{12} \subset X_1 \times X_2$ qui peut présenter les avantages de chacune des deux premières.

V - GRAPHS A PLUSIEURS BOUCLES

I - EXAMEN DE LA SITUATION AFFINE, PARABOLISATION

Question : Avant toute compactification, les composantes irréductibles $\mathfrak{g}^j$ de la variété polaire de l'intégrale de Feynman $\omega(G)$ sont-elles en (P.G.) dans l'AFFINE TOTAL $Z(G) \times T(G) = \mathcal{O}^4(B) \times \mathcal{O}^4(E) \ni (\underline{q}_b, \underline{p}_e)$?

Cette question a déjà été formulée au chapitre précédent; nous connaissons la réponse si le graphe n'a qu'une boucle et plus généralement si $\Gamma = B$.

Ces hypersurfaces sont des quadriques dégénérées et particulières. Comme dans le cas d'une seule boucle, nous préférons manipuler des variétés planes variables dans un plus gros affine ambiant et considérer une variété analytique fixe dont la famille des sections par ces variétés planes soit précisément isomorphe à la famille des quadriques précédents.

C'est l'objet de la parabolisation qui suit.

1. La parabolisation par ε

Nous rappelons la filtration croissante $\mathcal{O}^4 \hookrightarrow \Sigma^4 \hookrightarrow \mathcal{O}^5 \hookrightarrow \overline{P}^5$ définie par $(\underline{r}) \mapsto (\underline{r}, \sigma = \underline{r}^2) \mapsto (\underline{r}, \sigma, 1)$.

Nous avons considéré $\mathcal{O}^4$ comme un foncteur sur les ensembles finis à valeur variété (sous-jacente au $\mathcal{O}^4$ -module libre sur cet ensemble).

On peut procéder de même avec ϕ^5 , puis grâce à la filtration qui précède, on peut procéder de même avec Σ^4 qui apparaît comme un foncteur.

Soit $\gamma \in \Gamma = \{1, 2, \dots b, \dots B, \dots \Gamma\} \subset J$ et pour tout $\gamma_0 \in \Gamma$ soit

$$J(\gamma_0) = \{j \in J \mid \varepsilon_j = \pm \varepsilon_{\gamma_0}\}.$$

$[J(\gamma_0)]$ est donc l'ensemble des lignes internes qui ont des colonnes égales à celle de γ_0 dans la matrice d'incidence intérieure $\underline{\varepsilon}$.

On forme donc $\phi^4(\Gamma) \xrightarrow{\sim} \Sigma^4(\Gamma) \hookrightarrow \phi^5(\Gamma)$.

(1) Le Grand affine ambiant est $\phi^5(\Gamma)$

(2) La variété fixe cherchée se note $\varepsilon \Sigma^4(B)$, elle est située dans $\Sigma^4(\Gamma)$,

elle est isomorphe comme variété à $\Sigma^4(B)$, elle est obtenue en prenant l'image de $\phi^4(B)$ (ou $\Sigma^4(B)$) partiellement diagonalisée sous la matrice d'incidence intérieure $\underline{\varepsilon}$:

$\varepsilon \Sigma^4(B)$ est la sous variété de $\Sigma^4(\Gamma)$ image de :

$$\phi^4(B) \xrightarrow{\varepsilon(B)} \Sigma^4(\Gamma) \xleftarrow{\phi^5(\Gamma)} \phi^5(\Gamma)$$

, $(\underline{a}_b)_{b \in B} \mapsto (\underline{r}_\gamma = \varepsilon_\gamma^b \underline{a}_b, \sigma_\gamma = \underline{r}_\gamma^2)_{\gamma \in \Gamma}$

A tout $I \subset \Gamma$ est associée une projection $\pi(I)$:

$$\begin{array}{ccc} \phi^5(\Gamma) & \xrightarrow{\pi(I)} & \phi^5(I) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Sigma^4(\Gamma) & \xrightarrow{\pi(I)} & \Sigma^4(I) \\ \nwarrow \varepsilon(B) & & \uparrow \\ \phi^4(B) & \xrightarrow{\sim} & \varepsilon \Sigma^4(B) \end{array}$$

Notamment si $I = B$, alors $\pi(B) \circ \varepsilon(B)$ n'est autre que l'isomorphisme canonique $\phi^4(B) \hookrightarrow \Sigma^4(B)$ de notre construction fonctorielle, et donc, la mise en place ε de $\Sigma^4(B)$ dans $\Sigma^4(\Gamma)$ sous la forme $\varepsilon \Sigma^4(B)$, apparaît ainsi comme une section régulière de la projection $\pi(B) : \Sigma^4(\Gamma) \xrightarrow[\varepsilon]{\pi(B)} \Sigma^4(B)$

Comme dans le cas d'une seule boucle on montre que $\varepsilon(B)$ est un isomorphisme de variété non singulière sur son image.

(3) Les variétés polaires $\mathfrak{a}(t)$ dont nous avons à examiner la position relative dans $\phi^4(B)$ étaient les quadriques

$$Q_j \equiv (\underline{r}_\gamma + \underline{p}_j)^2 + m_j^2 \quad \text{où } j \in J(\gamma)$$

$$\underline{r}_\gamma = \varepsilon_\gamma^b \underline{q}_b$$

$$\underline{p}_j = \eta_j^e \underline{p}_e$$

ie

$$Q_j \equiv \underline{r}_j^2 + 2\underline{p}_j \cdot \underline{r}_\gamma + \underline{p}_j^2 + m_j^2 \quad \text{où } \gamma \in J(\gamma)$$

Elles deviennent, sous l'injection

$$\varepsilon(B) : \phi^4(B) \hookrightarrow \phi^5(\Gamma)$$

les sections de la variété fixe $\varepsilon \Sigma^4(B) \subset \Sigma^4(\Gamma)$ par les ϕ -hyperplans variables de $\phi^5(\Gamma)$ d'équation :

$$K_j \equiv \sigma_\gamma + 2\underline{p}_j \cdot \underline{r}_\gamma + (\underline{p}_j^2 + m_j^2) = 0$$

♦ Rappelons que par abus nous considérons souvent que les $\underline{p}_j = \eta_j^e \underline{p}_e \in \phi(J)$ sont indépendants et nous notons $t = (\underline{p}_j, m_j)$ le paramètre.

2. La parabolisation par $\underline{\theta}$ [où $\theta \Sigma^4(B \cup E)$ remplace $\varepsilon \Sigma^4(B)$].

Au lieu d'examiner la situation dans l'espace d'intégration $\phi^4(B)$ à valeur fixée du paramètre $t \in T = \phi^4(E)$ (ie fibre par fibre).

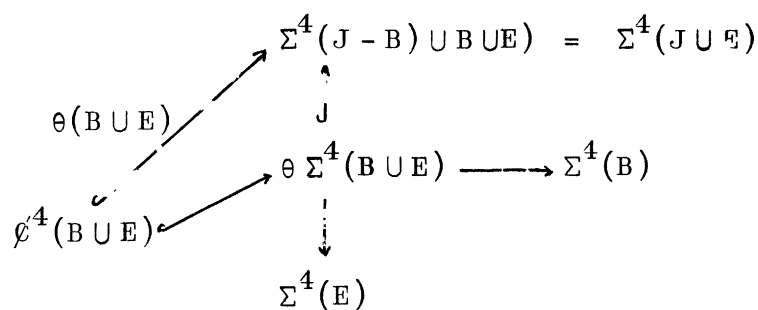
Il est équivalent de la regarder tout de suite dans l'espace total $\phi^4(B) \times \phi^4(E) \rightarrow \phi^4(E) = T$ au-dessus de T .

[Par exemple la (P.G.) dans l'espace total $\Rightarrow \forall t \in T-L \quad \exists (P.G.)$ dans l'espace d'intégration].

La parabolisation utilise alors la matrice d'incidence totale $\underline{\theta}$ (déjà rencontrée), au lieu de la matrice d'incidence intérieure $\underline{\varepsilon}$:

Le grand affine ambiant devient $\phi^5(J \cup E) = \phi^5(J-B) \cup B \cup E$. Il contient la variété non singulière $\Sigma^4((J-B) \cup B \cup E)$; qui contient lui-même la variété totale $\theta \Sigma^4(B \cup E)$ laquelle se projette sur les paramètres $\Sigma^4(E)$ et sur l'espace d'intégration $\Sigma^4(B)$, et contient les surfaces polaires totales Q_j dont on aura à examiner la (P.G.) dans $\theta \Sigma^4(B \cup E)$

La situation totale s'illustre par la diagramme suivant :



où $\theta(B \cup E) : \phi^4(B \cup E) \hookrightarrow \Sigma^4(J \cup E)$ est l'injection

$$\left(\underset{\substack{b \in B \\ e \in E}}{q_b, p_e} \right) \mapsto \left(\underline{r}_j, \sigma_j = \underline{r}_j^2 \right) \times \left(p_e, \sigma_e = p_e^2 \right)$$

[où $\underline{r}_j = \varepsilon_\gamma^b \underline{q}_b + \eta_j^e \underline{p}_e = \theta_j^b \underline{q}_b = \theta_j^e \underline{p}_e$.]

et où $\theta \Sigma^4(\text{BUE})$ est l'image de $\theta(\text{BUE})$.

Proposition d'équivalence entre $\underline{\theta}$ et $\underline{\varepsilon}$

On remarque que l'équation de Q_j dans $\theta \Sigma^4(\text{BUE})$ est simplement $\sigma_j + m_j^2 = 0$.

Par conséquent l'examen [de la (P.G.)] des $(Q_j)_{j \in J}$ dans l'espace total $\theta \Sigma^4(\text{BUE})$ est équivalent à l'examen[♦] [de la (P.G.)] des $(Q_\gamma(t_o))_{\gamma \in \Gamma}$ [pour la valeur spéciale (du paramètre) $t_o = (0, m_j) \quad m_j^2 \neq 0$ ie $\underline{p}_j = 0 \quad \forall j$] dans l'espace d'intégration $\varepsilon \Sigma^4(B)$.

[Il n'est pas étonnant qu'il en soit ainsi car faire $\underline{p}_j = 0 \quad \forall j$ c'est faire comme si le graphe n'avait pas de lignes externes; ce qui est équivalent à considérer comme un vertex ordinaire le vertex à l'infini ∞].

Nous ferons un abondant usage implicite de cette proposition.

3. Examen de la (P.G.) en affine

(1) Le $\emptyset$ -hyperplan $K_j \subset \emptyset^5(\Gamma)$ a pour $\emptyset$ -normale le vecteur^{♦♦}

$$(2\underline{p}_j, 1) \times \gamma \in \emptyset^5(\Gamma)$$

Les divers^{♦♦♦} $K_j(t)$, $j \in J$, formeront donc une famille^{♦♦♦♦} $(J)K(t) \subset \emptyset^5(\Gamma)$

en Position Générale dans $\emptyset^5(\Gamma)$ dès que pour tout $\gamma_o \in \Gamma$ les $\emptyset$ -hyperplans de $\emptyset^5(\{\gamma_o\})$ définis par les équations

[♦]Eventuellement pour un autre graphe.

^{♦♦}Voir le rappel de $\emptyset^n$ -géométrie

^{♦♦♦}Nous assimilons ici $T(G)$ à $\emptyset^4(J) \times \emptyset(J) \ni (\underline{p}_j, m_j) = t$

^{♦♦♦♦}Si $j \in J$ alors la famille K_j , se note encore $(J)K$, qui désigne aussi la réunion des K_j , (tandis que $\bigcap_{j \in J} K_j$ est l'intersection).

$K_j(t) \equiv \sigma_{\gamma_0} + 2\underline{p}_j \cdot \underline{r}_{\gamma_0} + (\underline{p}_j^2 + m_j^2) = 0 \quad \forall j \in J(\gamma_0)$
 seront en P.G. dans $\mathcal{C}^5(\{\gamma_0\})$.

Il en est ainsi pour $t_0 = (0, m_j)$ tel que $\underline{p}_j = 0 \quad \forall j$, et m_j tous différents réels et non nuls (superflu) et plus généralement pour $t = (p_j, m_j)$ dans un certain ouvert dense de $T(G)$ que nous ne précisons pas.

Il est immédiat, d'après toujours l'étude faite pour une boucle, que la trace sur $\Sigma^4(\Gamma)$ de la famille $(J)K(t)$ est encore en P.G. (dans $\Sigma^4(\Gamma)$).

(2) En d'autres termes $(J)K$ est une famille en P.G. dans $\mathcal{C}^5(\Gamma) \times T(G)$ et sa trace sur $\Sigma^4(\Gamma) \times T(G)$ est encore en P.G.

(3) Par contre il reste la question plus délicate, de la position générale des Q_j eux-mêmes, ie reste la question de la P.G. de la trace de la famille $(J)K$ sur la variété non singulière ${}_\varepsilon \Sigma^4(B)$.

En effet, nous pouvons en examiner la projection isomorphe par $\pi(B)$ sur $\Sigma^4(B)$, qui est

$$Q_j \equiv (\underline{r}_\gamma + \underline{p}_j)^2 + m_j^2 \quad \text{où} \quad \gamma = \gamma(j), \quad \underline{r}_\gamma = \varepsilon_\gamma^b \underline{q}_b$$

La $\mathcal{C}$ -normale à $Q_j(t)$ dans $\mathcal{C}^4(B)$, au point $(\underline{q}_b)_{b \in B} \in Q_j$ est*

$$(\underline{r}_\gamma + \underline{p}_j) \times \varepsilon_\gamma \in \mathcal{C}^4(B) \approx \Sigma^4(B)$$

où

$$\varepsilon_\gamma = (\varepsilon_\gamma^b)_{b \in B} = \sum_b (\varepsilon_\gamma^b \times b) \in \mathcal{C}^4(B)$$

et

$$\underline{r}_\gamma = \varepsilon_\gamma^b \underline{q}_b \in \mathcal{C}^4, \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma(j).$$

* Voir le rappel de $\mathcal{C}^n$ -géométrie.

Les divers vecteurs $\varepsilon_\gamma \in \mathcal{C}^4(B)$ ne sont certes pas $\mathcal{C}^4$ -indépendants dans $\mathcal{C}^4(B)$ lorsque γ parcourt Γ . Nous laissons comme exercice à résoudre que pour presque tout $t = (p_j, m_j)$ bien choisi, les divers $Q_j(t)$ passant par le même point $(q_b)_{b \in B} \in \mathcal{C}^4(B)$ sont en P.G. en ce point quel qu'il soit. La proposition d'équivalence entre $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{\theta}$ qui suit montre qu'il suffit de vérifier le (P.G.) pour notre $t_0 = (0, m_j)$ particulier.

Il est facile de le faire dans le cas où $B=2$ quel que soit Γ , où dans le cas des monovecteurs quelque soit le graphe.

[Si au lieu d'avoir $n=4$, on avait $n=1$, ie si les quadrivecteurs $\underline{r}$, $\underline{q}$, $\underline{p}$ étaient remplacés par des monovecteurs, alors les Q_j seraient des cylindres ayant pour base des sphères de dimension zéro non dégénérées (ie deux points distincts) et les $Q_\gamma(t_0)$ formeraient des réseaux d'hyperplans en (P.G.) dans $\Sigma^4(B)$:

en effet

$$Q_\gamma(t_0) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_\gamma^b q_b = \pm i m_\gamma, \quad q_b \in \mathcal{C}$$

or les vecteurs $\varepsilon_\gamma = (\varepsilon_\gamma^b) \in \mathcal{C}(B)$ ont leur extrémité dans le réseau $\mathbb{Z}(B)$. La distance à l'origine des plans $Q_\gamma(t_0)$ normaux à ces vecteurs est mesurée par $\pm i m_\gamma$; hors d'un choix particulier des valeurs des m_γ , les plans $Q_\gamma(t_0)$ sont en P.G.]].

Remarque : sur la filtration $B \subset \Gamma \subset J$ et la matrice $\underline{\varepsilon}$ sur $J \times B$.

Une base B de boucles du graphe étant choisie, on rappelle que l'ensemble des lignes internes J a été numéroté en sorte que

$$B \subset \Gamma \subset J = \{1, 2, \dots, b, \dots, B, \dots, \Gamma, \dots, J\},$$

$\varepsilon_b^{b'} = \delta_{bb'}$, $(\forall b, b' \in B)$ et $\forall \gamma \in \Gamma$ les $\varepsilon_\gamma = (\varepsilon_\gamma^b)_{b \in B} \in \mathcal{C}^4(B)$ sont deux

à deux $\mathcal{C}^4$ -indépendants et $\forall j \in J, (\exists |) \gamma \in \Gamma \text{ tg } \varepsilon_j = \varepsilon_\gamma$. Comme $\underline{\varepsilon}$ est à coefficients dans $\{-1, 0, +1\}$, la $\mathcal{C}^4$ -indépendance deux à deux donne une borne sur $|\Gamma|$ qui augmente très rapidement avec B.

Cette borne est $|\Gamma| \leq \frac{[\text{Hom}(B, \{1, 2, 3\}) - 1]}{2} = \frac{3^B - 1}{2}$ ceci donne :

B = 1,	2,	3,	4,	5,	6
$ \Gamma \leq 1,$	4,	13,	40,	121,	364

Cette limite pour $|\Gamma|$ n'est pas atteinte, car il y a des contraintes sur $\underline{\varepsilon}$ pour être la matrice d'incidence intérieure. C'est ainsi par exemple que dans le cas de deux boucles, le tableau ci-dessus permet, pour B = 2 :

j = 1,	2,	3,	4
$\varepsilon_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Mais si dans un graphe, tous ces ε_γ sont présents, alors le grphe possède au moins trois boucles indépendantes (ie B > 2)

]]

[[Rappel de $\mathcal{C}^n$ -géométrie

$\mathcal{C}^n$ est une $\mathcal{C}$ -algèbre;

Le produit de deux éléments $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{C}^n$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathcal{C}^n$ est $(\alpha_1 \beta_1, \dots, \alpha_n \beta_n) \in \mathcal{C}^n$ et se note $\alpha \times \beta$;

L'unité de $\mathcal{C}^n$ est donc $\mathbb{1} = (1, 1, \dots, 1)$;

L'inversion $\alpha \mapsto \dot{\alpha}$ pour le produit scalaire dans $\mathcal{C}^n$, est la colinéation

définie sur $\mathcal{C}^n - \Delta$ telle que $\alpha.\dot{\alpha} = 1 \in \mathcal{C}$. C'est un automorphisme de $\mathcal{C}^n - \Delta$.

Le produit scalaire dans $\mathcal{C}^n$ est $\alpha.\beta = \sum \alpha_i \beta_i$; le carré scalaire s'annule sur $\Delta \subset \mathcal{C}^n$, $\Delta = \{\alpha \mid \alpha^2 = 0\}$.

Le foncteur $\mathcal{C}^n$ identifie Γ à la base du $\mathcal{C}^n$ -module libre $\mathcal{C}^n(\Gamma)$ et si $\gamma \in \Gamma$, on a par cette identification : $\gamma = 1 \times \gamma \in \mathcal{C}^n(\Gamma)$ et si $\alpha \in \mathcal{C}^n$, $\alpha \times \gamma$ s'écrit α_γ .

$\mathcal{C}^n$ est une $\mathcal{C}$ -algèbre par le morphisme diagonal $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^n$, $x \mapsto (x, x, \dots, x)$; un $\mathcal{C}^n$ -hyperplan est, lorsqu'il est considéré comme un $\mathcal{C}$ -objet, de codimension n sur $\mathcal{C}$.

Par exemple le $\mathcal{C}^n$ -hyperplan de $\mathcal{C}^n(\Gamma)$ ayant pour normale $\gamma \in \mathcal{C}^n(\Gamma)$ est l'intersection des n $\mathcal{C}$ -hyperplans de $\mathcal{C}^n(\Gamma)$ ayant chacun pour normale $\alpha_i \times \gamma \in \mathcal{C}^n(\Gamma)$ où $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et où $\alpha_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{in}) \in \mathcal{C}^n$.

On peut encore dire que le $\mathcal{C}^n$ -hyperplan de $\mathcal{C}^n(\Gamma)$ ayant $\gamma \in \mathcal{C}^n(\Gamma)$ pour $\mathcal{C}^n$ -normale, aura une $\mathcal{C}$ -normale de dimension n qui est $\mathcal{C}^n \times \gamma \in \mathcal{C}^n(\Gamma)$.

Lorsque $\gamma \in \Gamma$ varie, les $\mathcal{C}^n$ -hyperplans correspondants de $\mathcal{C}^n(\Gamma)$ sont en $\mathcal{C}^n$ -Position Générale, donc des $\mathcal{C}$ -hyperplans qui les contiennent sont en P.G. si et seulement si pour tout γ , ceux relatifs à ce γ sont en P.G. entre eux.]].

II - $\underline{\varepsilon}$ -COMPACTIFICATIONS SINGULIERES MAIS A CHAINE

D'INTEGRATION DEGAGEE

Nous ne voulons pas perdre les résultats acquis pour une boucle seule, par une compactification arbitraire de l'espace d'intégration de plusieurs boucles.

Revenons à la filtration $B \subset \Gamma \subset J$ des lignes internes et à la matrice d'incidence intérieure associée^{*} $\underline{\varepsilon}$ sur $J \times B$

et $\forall \gamma \in \Gamma$ posons $J(\gamma) = \{j \in J \mid \varepsilon_j = \varepsilon_\gamma\}$

et $\forall I \subset \Gamma$ posons $I' = J(I) = \bigcup_{i \in I} J(i) \subset J$

Nous voulons que $\forall I \subset \Gamma$ telle que les $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ sont indépendants, alors les $(I')^Q$ se trouvent compactifiés en (P.G.).

Nous savons qu'il en sera ainsi pour $B \subset B'$ si nous compactifions $\Sigma^4(B)$ en $\bar{\Sigma}^4(B) = \pi_{b \in B} \bar{\Sigma}^4(\{b\})$.

C'est une compactification non singulière.

Mais par cette compactification, $\forall \gamma \in \Gamma - B$, Q_γ est singulière; de plus si t est réel $Q_\gamma(t)$ a des points réels donc coupe la chaîne d'intégration; et a fortiori en sera-t-il ainsi pour les $(I)^Q$ et $(I')^Q$ dont nous venons de parler.

* telle que $\varepsilon_{\substack{b' \\ b}} = \delta_{bb'}$; $\forall j \in J$ ($\exists$ 1 et 1 seul) $\gamma \in \Gamma$ tq $\varepsilon_j = \varepsilon_\gamma$

1. La compactification $\varepsilon \overline{\Sigma}^4(B)$

Pour ces deux raisons, il est préférable d'opérer comme le laissait présager le travail sur la parabolisation en employant

- la filtration $\varphi^4 \hookrightarrow \overline{\Sigma}^4 \hookrightarrow \overline{P}^5$ définie par $(\underline{r}) \mapsto (\underline{r}, \sigma = \underline{r}^2, 1)$
- et le foncteur $\overline{\Sigma}^4$ sphère projective en sandwich entre φ^4 et $\overline{P}^5$ ie on forme

$$\varphi^4(\Gamma) \hookrightarrow \overline{\Sigma}^4(\Gamma) \hookrightarrow \overline{P}^5(\Gamma) \quad \bullet$$

(1) Le grand ambient est le multiprojectif $\overline{P}^5(\Gamma)$ (Non singulier)

(2) Le petit ambient est le tore ou multisphère $\overline{\Sigma}^4(\Gamma)$ (Non singulier)

(3) La variété fixe est $\overline{\varepsilon \overline{\Sigma}^4(B)}$ (singulière en général)

C'est la fermeture de l'image de $\varphi^4(B)$ par

$$\begin{array}{ccc} & & \overline{P}^5(\Gamma) \\ & & \uparrow \\ \varphi^4(B) & \xrightarrow{\varepsilon(B)} & \overline{\Sigma}^4(\Gamma) \end{array}$$

$$\mathbb{Z} \mid \quad (\underline{a}_b)_{b \in B} \longmapsto (\underline{r}_\gamma = \varepsilon_\gamma^b \underline{a}_b, \sigma_b = \underline{r}_\gamma^2, 1)$$

$\bullet \overline{P}^5(\Gamma)$ est le produit des projectifs $\overline{P}^5(\{\gamma\})$ où $\gamma \in \Gamma$.

Comme précédemment, on obtient pour $I \subset \Gamma$, un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \overline{P}^5(\Gamma) & \xrightarrow{\quad \tilde{\pi}(\Gamma) \quad} & \overline{P}^5(I) \\
 \uparrow d & & \uparrow j \\
 \overline{\Sigma}^4(\Gamma) & \xrightarrow{\quad \tilde{\pi}(I) \quad} & \overline{\Sigma}^4(I) \\
 \uparrow j & & \uparrow j \\
 \varepsilon \Sigma^4(B) & \xrightarrow{\quad \varepsilon \quad} & \varepsilon \overline{\Sigma}^4(B) \\
 \nwarrow \varepsilon(B) & & \nwarrow \varepsilon(B) \\
 \emptyset^4(B) & & \emptyset^4(B)
 \end{array}$$

Mais la restriction de $\tilde{\pi}$ à $\overline{\Sigma}^4(B) \rightarrow \overline{\Sigma}^4(I)$ présente de l'éclatement, et notamment pour $I = B$, on a :

Proposition

La projection $\tilde{\pi}(B) : \overline{\Sigma}^4(B) \rightarrow \overline{\Sigma}^4(B)$ n'est plus en général un isomorphisme mais un éclatement singulier.

Preuve

(1) On sait déjà que $(\varepsilon \Sigma^4)(B) \hookrightarrow \overline{\Sigma}^4(B)$ est un ouvert, affine, non singulier, dense, "réel", irréductible.

(2) On sait déjà que la restriction de la projection à cet ouvert est un isomorphisme sur son image :

$$\pi(B) : \varepsilon \Sigma^4(B) \xrightarrow{\sim} \Sigma^4(B) \text{ est un isomorphisme.}$$

(3) Par construction $\overline{\Sigma}^4(B)$ est une variété compacte, irréductible, de même dimension que $\varepsilon \Sigma^4(B)$, éventuellement singulière.

(4) De (3) résulte que $\overline{\Sigma}^4(B) - \varepsilon \Sigma^4(B)$ est de codimension au moins un dans $\overline{\Sigma}^4(B)$.

(5) En fait cette codimension est un, en raison de (2) et du fait que c'est l'image réciproque de $(\bar{\Sigma}^4(B) - \Sigma^4(B))$ qui est de codimension un dans $\bar{\Sigma}^4(B)$.

(6) De plus $\bar{\pi}$ étant propre, $\bar{\pi}(B)|_{\bar{\Sigma}^4(B)}$ est bien l'éclatement (singulier d'un idéal) d'une variété (singulière) de $\bar{\Sigma}^4(B)$ qui dépend de la matrice $\underline{\varepsilon}$ et (dont le support) se trouve dans $(\bar{\Sigma}^4(B) - \Sigma(B))$.

(7) On note que si $\Gamma=B$ ie si $\underline{\varepsilon} = \underline{1}$ est trivial, alors $\bar{\varepsilon}\bar{\Sigma}^4(B) = \bar{\Sigma}^4(B)$ et $\bar{\pi}$ est l'identité.

]].

2. La compactification $\bar{\varepsilon}\bar{\Sigma}^4(B)$

Nous avons déjà associé à la fermeture

$$\mathcal{C}^4 \hookrightarrow \bar{\Sigma}^4 \hookrightarrow \bar{P}^4 \times \bar{P}^5 \quad \text{de} \quad q \mapsto (q, 1) \times (q, \sigma = q^2, 1),$$

le foncteur $\bar{\Sigma}^4$ en sphère projective éclaté en sandwich entre $\mathcal{C}^4$ et $\bar{P}^4 \times \bar{P}^5$. On forme

$$\mathcal{C}^4(\Gamma) \hookrightarrow \bar{\Sigma}^4(\Gamma) \hookrightarrow \bar{P}^4(\Gamma) \times \bar{P}^5(\Gamma)^\bullet$$

(1) Le grand ambiant est le multiprojectif $\bar{P}^4(\Gamma) \times \bar{P}^5(\Gamma)^\bullet$

(2) Le petit ambiant est la multisphère éclatée $\bar{\Sigma}^4(\Gamma)$

(3) La variété fixe $\diamond\diamond$ est $\boxed{\bar{\varepsilon}\bar{\Sigma}^4(B)}$ c'est la fermeture de l'image

$\bar{P}^4(\Gamma) \times \bar{P}^5(\Gamma)$ est le produit des $\bar{P}^4(\{\gamma\}) \times \bar{P}^5(\{\gamma\})$ où $\gamma \in \Gamma$

$\diamond\diamond$ En général singulière.

de $\phi^4(B)$ par

$$\begin{array}{ccc} & & \bar{P}^4(\Gamma) \times \bar{P}^5(\Gamma) \\ & & \uparrow \\ \phi^4(B) & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}(B)} & \bar{\Sigma}^4(\Gamma) \end{array}$$

$$\mathbb{Z} \mid (\underline{q}_b)_{b \in B} \mapsto (\underline{r}_\gamma = \varepsilon_\gamma^b \underline{q}_b, 1) \times (\underline{r}_\gamma, \sigma_\gamma = \underline{r}_\gamma^2, 1)$$

Comme précédemment, on obtient pour $I \subset \Gamma$, un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \bar{P}^4 \times \bar{P}^5(\Gamma) & \xrightarrow{\bar{\pi}(I)} & \bar{P}^4 \times \bar{P}^5(I) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \bar{\Sigma}^4(\Gamma) & \xrightarrow{\bar{\pi}(I)} & \bar{\Sigma}^4(I) \\ & \nearrow \bar{\varepsilon}(B) & \downarrow & & \\ \phi^4(B) & \xrightarrow{\quad} & \bar{\varepsilon}\bar{\Sigma}^4(B) & & \end{array}$$

et la restriction de $\bar{\pi}$ à $\bar{\varepsilon}\bar{\Sigma}^4(B) \rightarrow \bar{\Sigma}^4(I)$ présente de l'éclatement, notamment pour $I = B$.

Proposition

La projection $\bar{\pi}(B) \mid \bar{\varepsilon}\bar{\Sigma}^4(B) : \bar{\varepsilon}\bar{\Sigma}^4(B) \rightarrow \bar{\Sigma}^4(B)$ n'est pas en général un isomorphisme mais un éclatement singulier.]].

Théorème 1

Soient $G, B \subset \Gamma \subset J$, $\underline{\varepsilon}$ sur $J \times B$, un graphe, une filtration admissible des lignes internes, et la matrice d'incidence associée $\diamond$

$$\diamond \quad \underline{\varepsilon} = \varepsilon_j^b, \quad \varepsilon_b^{b'} = \delta_{bb'}, \quad \forall j \in J, \quad (\exists \underline{1}) : \text{tg } \varepsilon_\gamma^b = \varepsilon_j^b \quad \forall b.$$

(1) Si $\forall b \in B$, $J(b)^\diamond$ a quatre ^{$\diamond\diamond$} éléments au moins, alors la compactification $\varnothing^4(B) \hookrightarrow \overline{\varepsilon\Sigma}^4(B) \hookrightarrow \overline{\Sigma}^4(\Gamma)$ laisse libre la chaîne d'intégration : ie sous cette compactification, la chaîne d'intégration $\text{Re } \overline{\varepsilon\Sigma}^4(B)$ de l'intégrale transformée ne rencontre pas les surfaces polaires $_{(J)}K(t_o)$ de son intégrand. C'est un cycle, réel, absolu, orientable et singulier de la variété non singulière $\overline{\Sigma}^4(\Gamma) - _{(J)}K(t_o)$, il est porté par la variété (singulière) $\overline{\varepsilon\Sigma}^4(B)$. L'intégrale ne dépend que de sa classe d'homologie dans $H_C^{4B}(\overline{\varepsilon\Sigma}^4(B) - _{(J)}K(t_o))$.

(2) Si $\forall b \in B$, $J(b)$ a au moins trois ^{$\diamond\diamond\diamond$} éléments, alors la compactification : $\varnothing^4(B) \hookrightarrow \overline{\varepsilon\Sigma}^4(B) \hookrightarrow \overline{\Sigma}^4(\Gamma) \hookrightarrow (\overline{P}^4 \times \overline{P}^5)(\Gamma)$ laisse libre la chaîne d'intégration.

L'intégrale ne dépend que de la classe de $(\text{Re}(\overline{\varepsilon\Sigma}^4(B)))$ dans le groupe d'homologie ^{$\diamond\diamond\diamond$} relative :

$$H_C^{4B}(\overline{\varepsilon\Sigma}^4(B) - S(t) , (\overline{P}^3 \times \Omega_\sigma)(\Gamma)).$$

^{$\diamond$} Déjà définie par $J(\gamma) = \{j \in J \mid \varepsilon_j = \varepsilon_\gamma\}$

^{$\diamond\diamond$} ie si le contracté de G suivant les lignes $J(\Gamma - B)$ est suffisamment convergent.

^{$\diamond\diamond\diamond$} ie si le contracté de G suivant les lignes $J(\Gamma - B)$ converge mais insuffisamment.

^{$\diamond\diamond\diamond\diamond$} $S(t)$ est l'union des fermetures dans $\overline{\varepsilon\Sigma}^4(B)$ de $_{(J)}K(t)$ et dans $\{\tau_b = 0, \underline{q}_b \neq 0\}_{b \in B}$

$$\overline{P}^4 \times \overline{P}^5 \supset \overline{P}^3 \times \Omega_\sigma = \{(\underline{K}, \rho)(\underline{q}, \sigma, \tau) \mid \rho = \underline{q} = \tau = 0\}$$

Preuve du théorème

Il suffit de regarder ce que devient l'intégrale de Feynman

$$\operatorname{Re} \mathcal{C}^4(B) \int^{\omega(G)}$$

(1) Dans le premier cas, le rappel différentiel[•] et le calcul déjà fait pour une seule boucle montrent qu'elle devient

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\varepsilon \Sigma}^4(B) \int \frac{\prod_{b \in B} \bar{\omega}'(\underline{q}_b, \sigma_b) / \sigma_b}{\prod_{\gamma \in J(\gamma)} K_j(t)} \times \prod_{b \in B} \tau_b^{|J(b)|-4} \times \prod_{\gamma \in \Gamma-B} \tau_\gamma^{|J(\gamma)|}.$$

Mais $J(b) > 4$

$$\text{et } K_j(t) \equiv \sigma_\gamma + 2 \underline{p}_j \cdot \underline{r}_\gamma + \tau_\gamma (\underline{p}_j^2 + m_j^2) \quad , \quad j \in J(\gamma)$$

K_j est d'équation réelle, montrons que $K_j(t) = 0$ n'a pas de point réel si t est notre $t_0 = (\underline{p}_j = 0, m_j > 0)$ (par compacité, il n'en aura pas pour les t voisins de t_0), un point réel dans $\overline{\varepsilon \Sigma}^4(B) \subset \overline{\Sigma}^4(\Gamma) \subset \overline{P}^5(\Gamma) \ni (\underline{r}_\gamma, \sigma_\gamma, \tau_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$

doit avoir toutes ses coordonnées réelles.

or s'il est dans $\overline{\Sigma}^4(\Gamma)$, l'équation $\underline{r}_\gamma^2 = \sigma_\gamma \tau_\gamma$ entraîne que s'il est réel

$$\sigma_\gamma \tau_\gamma \geq 0.$$

$$\text{donc } \left\{ \begin{array}{l} K_j(t_0) = 0 \\ j \in J(\gamma) \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_\gamma = \tau_\gamma = 0 \text{ en un point réel.}$$

[•] Cf appendice A.

Mais alors $(\underline{r}_\gamma^2 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{r}_\gamma \text{ réel}) \Rightarrow \underline{r}_\gamma = 0$, mais il y a contradiction car on ne peut avoir à la fois dans la composante $\bar{\Sigma}^4(\gamma) \subset \bar{P}^5(\gamma)$,
 $(\underline{r}_\gamma = \sigma_\gamma = \tau_\gamma = 0)$.

(2) Dans le deuxième cas, le rappel différentiel et le calcul déjà effectué pour le graphe triangulaire montrent que l'intégrale devient :

$$\text{Re } \bar{\varepsilon} \bar{\Sigma}^4(B) \cdot \frac{\prod_{b \in B}^{\pi, \tau_b} |J(b)|^{-3}}{\prod_{\gamma \in \Gamma-B}^{\pi, \tau_\gamma} |J(\gamma)|} \times \frac{\prod_{b \in B}^{\pi} \bar{\omega}(\underline{q}_b, \underline{k}_b, \sigma_b)}{\prod_b^2}$$

$$\bar{\omega}(\underline{q}, \underline{k}, \sigma) = (\underline{q}^2 / \underline{k}^2) \bar{\omega}'(\underline{k}, \sigma) + \frac{1}{2} \sigma d(\underline{q}^2 / \underline{k}^2) \wedge \bar{\omega}'(\underline{k})$$

a déjà été définie et est régulière sur $\text{Re } \bar{\Sigma}^4(\Gamma)$ donc sur $\text{Re } \bar{\varepsilon} \bar{\Sigma}^4(\Gamma)$;
 $\underline{k}_b^2 = 0$ est sans point réel dans $\bar{\Sigma}^4(\Gamma)$ donc dans $\bar{\varepsilon} \bar{\Sigma}^4(\Gamma)$; et est la transformée stricte du plan tangent en $\cap_\sigma$ à $\bar{\Sigma}^4(b) \rightarrow \bar{\Sigma}^4(b)$.

Enfin $J(b) \geq 3$ par hypothèse.

L'assertion est donc vérifiée.

]].

Remarque

Le remplacement de $\underline{\varepsilon}$ par $\underline{\theta}$, donne une $\underline{\theta}$ -compactification et un éclatement $\bar{\theta} \bar{\Sigma}^4(B \cup E) \xrightarrow{\bar{\pi}(B \cup E)} \bar{\Sigma}^4(B) \times \bar{\Sigma}^4(E)$ mais l'image réciproque de $\bar{\Sigma}^4(B) \times \bar{\Sigma}^4(E)$ n'est autre que le produit $\bar{\varepsilon} \bar{\Sigma}^4(B) \times \bar{\Sigma}^4(E)$.

III - DESINGULARISATION DE $\overline{\varepsilon\Sigma^n(B)} \rightarrow \overline{\Sigma^n(\Gamma)}$

Le théorème 1 la proposition d'équivalence du chapitre précédent montrent que le seul problème de désingularisation qui subsiste est celui du couple $\overline{\varepsilon\Sigma^n(B)} \hookrightarrow \overline{\Sigma^n(B)}$.

Westwater en donne une solution partielle : il trouve un couple $\overline{\varepsilon\Sigma^n(B)} \hookrightarrow \overline{\Sigma^n(\Gamma)}$ dont un voisinage de la partie réelle est non singulier et dont la partie réelle est une désingularisation de la partie réelle du couple précédent.

De plus, si la dimension n des n -vecteurs tombe à $n = 1$, cette désingularisation devient valable dans tout le domaine complexe.

Nous n'avons pas encore réussi à mieux faire, c'est pourquoi nous reportons en appendice E notre étude qui aboutit au même résultat que Westwater.

Ici nous exposons, dépouillé au maximum, le cœur du problème.

NOTATION

$B \subset \Gamma$ ensembles finis.

$\underline{\varepsilon}$ matrice sur $(\Gamma - B) \times \Gamma$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

$\underline{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ espace numérique complexe de dimension n .

$\underline{z}^2 = z_1^2 + \dots + z_n^2 \in \mathbb{C}$ carré euclidien sur $\mathbb{C}^n$.

$$\Delta_{\sigma} = \{\underline{z} \in \wp^n \mid \underline{z}^2 = 0\} \subset \wp^n \quad \text{c\^one isotope de } \wp^n.$$

$$\left. \begin{array}{l} (\wp^n - \Delta_{\sigma}) \xrightarrow{\sim} (\wp^n - \Delta_{\sigma}) \\ \underline{z} \mapsto \underline{\dot{z}} = \underline{z}/\underline{z}^2 \end{array} \right\} \quad \text{inversion euclidienne.}$$

$$\forall j \in \Gamma, \wp^n(j) \quad \text{copie de } \wp^n \text{ index\^ee par } j.$$

$$\underline{z}_{\Gamma} = (\underline{z}_j)_{j \in \Gamma} \in \wp^n(\Gamma) = \prod_{j \in \Gamma} \wp^n(j) \quad \text{produit des } \wp^n(j).$$

$$\Omega_{\sigma}(j) = \{\underline{z}_{\Gamma} \in \wp^n(\Gamma) \mid \underline{z}_j = 0\} \subset \wp^n(\Gamma), \quad \wp^n\text{-plan de la coordonn\^ee } j.$$

$$\Delta_{\sigma}(j) = \{\underline{z}_{\Gamma} \in \wp^n(\Gamma) \mid \underline{z}_j^2 = 0\} \subset \wp^n(\Gamma), \quad \text{c\^one de la coordonn\^ee } j.$$

$$\Gamma^{\Delta_{\sigma}} = \bigcup_{j \in \Gamma} \Delta_{\sigma}(j) \subset \wp^n(\Gamma) \quad \text{union des c\^ones de coordonn\^ees.}$$

$$\Gamma^{\Omega_{\sigma}} = \bigcup_{j \in \Gamma} \Omega_{\sigma}(j) \subset \wp^n(\Gamma) \quad \text{union des plans de coordonn\^ees.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma^n : (\wp^n(\Gamma) - \Gamma^{\Delta_{\sigma}}) \rightarrow \wp^n(\Gamma) \\ \underline{z}_{\Gamma} = (\underline{z}_j)_{j \in \Gamma} \mapsto \underline{\dot{z}}_{\Gamma} = (\underline{\dot{z}}_j)_{j \in \Gamma} \end{array} \right\} \quad \text{Inversion des } \wp^n\text{-coordonn\^ees.}$$

$$\varepsilon : \wp^n(\Gamma) \rightarrow \wp^n(\Gamma - B) \quad \text{lin\^eaire associ\^ee \^a la matrice } \underline{\varepsilon}.$$

$$\varepsilon \Sigma^n(B) \subset (\wp^n(\Gamma) - \Gamma^{\Delta_{\sigma}}) \quad \text{contre image de } 0 \text{ par } \varepsilon \circ \Sigma^n, \text{ ie}$$

$$\varepsilon \Sigma^n(B) = \{\underline{z}_{\Gamma} \in \wp^n(\Gamma) - \Gamma^{\Delta_{\sigma}} \mid \underline{\varepsilon}(\underline{\dot{z}}_{\Gamma}) = 0\} \subset \wp^n(\Gamma) - \Gamma^{\Delta_{\sigma}}.$$

$$\overline{\varepsilon \Sigma^n(B)} \subset \wp^n(\Gamma) \quad \text{fermeture naturelle dans } \wp^n(\Gamma) \text{ de } \varepsilon \Sigma^n(B).$$

C\^oeur du probl\^eme : d\^ésingulariser le couple $\overline{\varepsilon \Sigma^n(B)} \subset \wp^n(\Gamma)$.

Remarques

1. Le couple $\overline{\varepsilon \Sigma^n(B)} \subset \wp^n(\Gamma)$ est tout simplement le transform\^e d'un $\wp^n$ -sous plan oblique de $\wp^n(\Gamma)$ par l'inversion des $\wp^n$ -coordonn\^ees.

2. Le fait que $\underline{\varepsilon}$ soit à coefficient dans $\mathbb{Z}$ et non dans $\mathcal{O}$ est irrélévant.
3. Le fait que $\underline{\varepsilon}$ soit de rang maximum est irrélévant.
4. Le fait que $\underline{\varepsilon}$ ne soit pas carrée est irrélévant.

Solution partielle (cl. l'appendice E)

- (1) - Les singularités de ce couple sont dans $\Gamma^{\Delta_{\sigma}}$ et portées par les intersections trois à trois des cônes de coordonnées.
- (2) - L'éclatement de Westwater est l'éclatement du drapeau des intersections des $\mathcal{O}^n$ -hyperplans de coordonnées.
 - De façon plus précise, l'éclatement trois ie l'éclatement successif des transformées strictes des intersections p à p des $\mathcal{O}^n$ -hyperplans de coordonnées de $\mathcal{O}^n(\Gamma)$ lorsque p décroît de $|\Gamma|$ à trois, désingularise déjà la partie réelle de $\overline{\varepsilon}^n(B)$.
- (3) - Dans le résultat $\overline{\varepsilon}^n(B) \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}}^n(\Gamma)$ de cet éclatement, $\overline{\mathcal{O}}^n(\Gamma)$ est évidemment non singulier et les singularités sont portées par les intersections trois à trois des transformées strictes des cônes de coordonnées.
 - Ces "cônes" sont sans point réel (dans $\overline{\varepsilon}^n(\Gamma)$), ils ne sont pas en (P.G.) après l'éclatement trois, mais après l'éclatement de Westwater^{*}, ils sont chacun non singuliers et en (P.G.) entre ie l'éclatement total où p décroît de $|\Gamma|$ à zéro.

eux dans $\bar{\mathcal{C}}^n(\Gamma)$.

- (4) - C'est là que s'arrête la résolution que nous savons faire : on peut songer à éclater dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ le drapeau des intersections des "cônes" de coordonnées. Le résultat $\bar{\mathcal{C}}^n(\Gamma) \rightarrow \bar{\mathcal{C}}^n(\Gamma)$ de cet éclatement est bien sûr non singulier, mais la transformée stricte $\bar{\varepsilon}\Sigma^n(B)$ de $\varepsilon\Sigma^n(B)$ reste très singulière.
- (5) - Une autre porte de sortie non encore explorée consisterait à bâtir la désingularisation cherchée, autour d'un voisinage non singulier de $\text{Re } \bar{\varepsilon}\Sigma^n(B)$ dans $\bar{\varepsilon}\Sigma^n(B)$.

D. Fotiadi. Désingularisation et graphes de Feynman.

APPENDICE A

Rappel de calcul différentiel

Soit W une variété différentiable et

$$\left. \begin{array}{l} h = (h_0, h_1, \dots, h_p) : W \rightarrow \mathbb{C}^{p+1} \\ \lambda : W \rightarrow \mathbb{C} \end{array} \right\} \text{ deux morphismes différentiables}$$

On pose

$$\mathbb{Z} \left\{ \begin{array}{l} d\lambda = \text{différentielle de } \lambda \\ d^{p+1}h = dh_0 \wedge dh_1 \wedge \dots \wedge dh_p \\ \bar{\omega}'(h) = \bar{\omega}'(h_0, \dots, h_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i h_i dh_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dh_i} \wedge \dots \wedge dh_p = \sum_{i=0}^p \frac{h_i}{dh_i} d^{p+1}h \\ dh = (dh_0, dh_1, \dots, dh_p) \end{array} \right.$$

On a alors les formules suivantes :

$$(1) \quad \bar{\omega}'(\lambda h) = \lambda^{p+1} \bar{\omega}'(h)$$

$$(1') \quad \frac{1}{h_0^{p+1}} \bar{\omega}'(h) = \bar{\omega}'\left(\frac{h}{h_0}\right) = d\left(\frac{h_1}{h_0}\right) \wedge \dots \wedge d\left(\frac{h_p}{h_0}\right) \quad [\text{si } h_0 \neq 0]$$

$$(2) \quad \bar{\omega}'(h_0, \dots, h_p, K_0, \dots, K_r) = \bar{\omega}'(h) \wedge d^{r+1}K + (-1)^{p+1} d^{p+1}h \wedge \bar{\omega}'(K)$$

$$(2') \quad \bar{\omega}'(h, \lambda) = \bar{\omega}'(h) \wedge d\lambda + (-1)^{p+1} \lambda d^{p+1}h$$

$$(2'') \quad \bar{\omega}'(h, 1) = (-1)^{p+1} d^{p+1}h$$

$$(3) \quad d^{p+1}(\lambda h) = \lambda^p [\lambda d^{p+1}h + d\lambda \wedge \bar{\omega}'(h)]$$

$$(4) \quad (h \cdot dh) \wedge \bar{\omega}'(h) = h^2 d^{p+1}h \quad (\text{où } h^2 = (h \cdot h) = \sum_{i=0}^p h_i^2)$$

Application à $W = \bar{\Sigma}^4 =$ fermeture de $\mathbb{C}^4 \hookrightarrow \bar{P}^5$ $\underline{q} \mapsto (\underline{q}, \sigma = \underline{q}^2, 1)$

(*) $\underline{q}^2 = \sigma\tau$ est donc l'équation de $\bar{\Sigma}^4$ si $(\underline{q}, \sigma, \tau) \in \mathbb{C}^6$ sont les coordonnées homogènes de $\bar{P}^5$.

Alors :

$$(5) \quad \frac{1}{\tau} \bar{\omega}'(\underline{q}, \tau) + \frac{1}{\sigma} \bar{\omega}'(\underline{q}, \sigma) \Big|_{\bar{\Sigma}^4} = 0$$

[Ceci provient de (2'), de la différentielle de (*) :

$$2\underline{q} \cdot d\underline{q} = d(\sigma\tau), \text{ et de (4)}].$$

Application à $W = \bar{\Sigma}^4 =$ fermeture de $\mathbb{C}^4 \hookrightarrow \bar{P}^4 \times \bar{P}^5$, $\underline{q} \mapsto (\underline{q}, 1) \times (\underline{q}, \sigma = \underline{q}^2, 1)$

(**) $\underline{K} \cdot \underline{q} = \rho\sigma$ est donc l'équation de $\bar{\Sigma}^4$ si $(\underline{K}, \rho) \times (\underline{q}, \sigma, \tau) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^6$ sont des coordonnées homogènes de $\bar{P}^4 \times \bar{P}^5$.

Alors

$$(6) \quad \frac{\bar{\omega}'(\underline{q}, \sigma)}{\sigma\tau} \Big|_{\bar{\Sigma}^4} = \frac{\bar{\omega}'(\underline{q}, \sigma)}{\underline{q}^2} \Big|_{\bar{\Sigma}^4} = \frac{\bar{\omega}(\underline{q}, \underline{K}, \sigma)}{\underline{K}^2} \Big|_{\bar{\Sigma}^4}$$

où l'on a posé :

$$\bar{\omega}(\underline{q}, \underline{K}, \sigma) = [(\underline{q}^2/\underline{K}^2) \bar{\omega}'(\underline{K}, \sigma) + \frac{1}{2} \sigma d(\underline{q}^2/\underline{K}^2) \wedge \bar{\omega}'(\underline{K})]$$

Preuve : Dans la carte de $\bar{\Sigma}^4$ donnée par l'image diagonale $\mathbb{C}^4 \hookrightarrow \bar{P}^4 \times \bar{P}^5$

il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\underline{q} = \lambda \underline{K}$, de plus $\underline{q}^2 = \sigma\tau$,

d'où déjà $\lambda^2 = (\underline{q}^2/\underline{K}^2)$,

mais (3) $\Rightarrow d^4 \underline{q} = \lambda^2 [\lambda^2 d^4 \underline{K} + \frac{1}{2} d(\lambda^2) \wedge \bar{\omega}'(\underline{K})]$

• avec $(\underline{K}, \rho) \wedge (\underline{q}, \tau) = 0$ (Equation de $\bar{P}^5$).

maintenant

$$\frac{\bar{\omega}'(\underline{q}, \sigma)}{\sigma \tau} = \frac{\bar{\omega}'(\underline{q}, \sigma)}{\underline{q}^2} = \frac{1}{\underline{K}^2} \frac{\bar{\omega}'(\underline{q}, \sigma)}{\lambda^2}$$

mais (2) $\Rightarrow$

$$\bar{\omega}'(\underline{q}, \sigma) = \bar{\omega}'(\underline{q}) \wedge d\sigma + \sigma d^4 \underline{q} = \bar{\omega}'(\lambda \underline{K}) \wedge d\sigma + \sigma d^4 \underline{q}$$

$$\text{et pas (1)} \Rightarrow = \lambda^4 (\bar{\omega}'(\underline{K}) \wedge d\sigma + \sigma d^4 \underline{K}) + \lambda^3 \sigma d\lambda \wedge \bar{\omega}'(\underline{K})$$

$$= \lambda^2 [\lambda^2 \bar{\omega}'(\underline{K}, \sigma) + \frac{1}{2} \sigma d(\lambda^2) \wedge \bar{\omega}'(\underline{K})]$$

$$= \lambda^2 \bar{\omega}(\underline{q}, \underline{K}, \sigma)$$

D. Fotiadi. Désingularisation et graphes de Feynman.

APPENDICE B : SPHERES COMPLEXES

SPHERE COMPLEXE AFFINE $\Sigma^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$

C'est la sous-variété algébrique non singulière Σ^n de codimension un de l'espace numérique complexe $\mathbb{C}^{n+1}$ dont l'équation polynomiale

$$\Sigma^n \quad z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 1$$

$$\text{où } z = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$$

Proposition 1

La sphère complexe Σ^n de dimension complexe n est difféomorphe au fibré tangent $\tau(S^n)$ à la sphère réelle S^n de dimension complexe n .

En effet, si $z_j = (x_j + iy_j) \in \mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$, alors les équations dans $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ de la variété différentiable réelle sous-jacente à Σ^n sont

$$x^2 - y^2 = 1 \quad (\text{ie } x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - y_1^2 - \dots - y_{n+1}^2 = 1)$$

Σ^n : et

$$x \cdot y = 0 \quad (\text{ie } x_1 y_1 + \dots + x_{n+1} y_{n+1} = 0)$$

D'autre part, les équations du fibré tangent à S^n dans $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ sont

$$\tau(S^n) : \{(x', y') \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x'^2 = 1 \text{ et } x' \cdot y' = 0\}$$

et un difféomorphisme : $\Sigma^n \rightarrow \tau(S^n)$ est défini par

$$(x, y) \mapsto (x' = x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}, y' = y)$$

dont l'inverse $\Sigma^n \leftarrow \tau(S^n)$ est défini par

- B2 -

$$(x = x' \sqrt{1 + \frac{y'^2}{x'^2}}, y = y') \mapsto (x', y') \quad]]$$

Représentation vectorielle

Il est commode de représenter un point $z = (x + iy) \in \mathbb{C}^P$ de l'espace numérique complexe $\mathbb{C}^P$, comme un vecteur de l'espace affine réel $\mathbb{R}^P$:

l'origine du vecteur étant : $x =$ partie réelle de $z \in \mathbb{R}^P$

le vecteur étant équipollent à : $y =$ partie imaginaire de $z \in \mathbb{R}^P$

SPHERE PROJECTIVE COMPLEXE $\bar{\Sigma}^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$

Si $\bar{z} = (z_0, \dots, z_{n+1})$ sont les coordonnées homogènes de l'espace projectif complexe $\bar{\mathbb{P}}^{n+1}$, alors l'équation de la sphère projective complexe $\bar{\Sigma}^n$ est :

$$\bar{\Sigma}^n : z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 0$$

La section d'une sphère projective complexe de dimension n par un hyperplan projectif complexe en position générale est une sphère projective complexe $\bar{\Sigma}^{n-1}$ de dimension $(n-1)$. Le complément de cette section est la sphère affine complexe Σ^n de dimension n .

$$\Sigma^n = \bar{\Sigma}^n - \bar{\Sigma}^{n-1}$$

HOMOLOGIES ET COHOMOLOGIES DIVERSES

DE LA SPHERE REELLE S^n

DE LA SPHERE COMPLEXE AFFINE Σ^n

DE LA SPHERE COMPLEXE PROJECTIVE $\bar{\Sigma}^n$

SPHERE REELLE

La sphère réelle S^n est compacte, son homologie compacte H_*^c coïncide donc avec son homologie fermée H_*^F ; de même sa cohomologie compacte H_c^* coïncide avec sa cohomologie fermée H_F^* .

En fait on a :

$$H_p^F(S^n) = H_p^c(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 0 \text{ et } p \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \text{ ou } p = n \end{cases}$$

et

$$H_F^q(S^n) = H_c^q(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq 0 \text{ et } q \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \text{ ou } q = n \end{cases}.$$

La caractéristique d'Euler-Poincaré de la sphère réelle S^n est donc

$$\chi(S^n) = \sum_p (-1)^p \dim H_p^c(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ pair \\ 2 & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

SPHERE COMPLEXE AFFINE Σ^n

D'après la proposition 1, la sphère complexe affine Σ^n se rétracte par déformation sur la sphère réelle S^n . Leurs homologies compactes sont donc les mêmes et leurs cohomologies fermées sont donc les mêmes, ie

$$\text{Homologie } H_p^c(\Sigma^n) = H_p^c(S^n) \text{ pour tout } p$$

$$\text{Cohomologie } H_F^q(\Sigma^n) = H_F^q(S^n) \text{ pour tout } q$$

La dualité de Poincaré-Cartan permet alors le calcul de l'homologie fermée H_p^F et de la cohomologie compacte H_c^q

$$\text{Homologie } H_p^F(\Sigma^n) = H_F^{2n-p}(\Sigma^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } p = 2n \text{ ou } p = n \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\text{Cohomologie } H_c^q(\Sigma^n) = H_{2n-q}^c(\Sigma^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } q = n \text{ ou } q = 2n \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Parité

Le générateur de l'homologie de Σ^n est essentiellement la sphère réelle de gorge S^n canoniquement orientée.

La self intersection de la sphère de gorge est :

- nulle pour les sphères complexes de dimension impaire
- différente de zéro pour celles de dimension paire.

En effet puisque $\chi(S^n)$ n'est nul que si n est impair, le fibré tangent $\tau(S^n)$ à la variété S^n n'admet de section non triviale que si n est impair, autrement dit la self intersection de la sphère

de gorge de Σ^n n'est nulle que si n est impair.

SPHERE COMPLEXE PROJECTIVE $\bar{\Sigma}^n$

- De la suite exacte d'un fermé pour la cohomologie, et de l'égalité $\Sigma^n = \bar{\Sigma}^n - \bar{\Sigma}^{n-1}$, on déduit les triangles exacts de cohomologie compacte :

$$\begin{array}{ccc} H_c^*(\bar{\Sigma}^n) & \longrightarrow & H_c^*(\bar{\Sigma}^{n-1}) \\ \uparrow & \swarrow \text{---} & \\ H_c^*(\Sigma^n) & & \end{array}$$

que l'on symbolisera en :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Sigma}^n & \longrightarrow & \bar{\Sigma}^{n-1} \\ \uparrow & \swarrow \text{---} & \\ \Sigma^n & & \end{array}$$

où la flèche barrée est le cobord qui augmente le degré d'une unité.

- De plus, comme $\bar{\Sigma}^n$ est une variété compacte, de dimension réelle $2n$, on a, si les coefficients sont dans un corps,

$$H_c^p(\bar{\Sigma}^n) = H_c^{2n-p}(\bar{\Sigma}^n).$$

- Notons $(0^\alpha, 1^\beta, \dots, q^\varepsilon, \dots)$ un groupe libre gradué ayant

- α générateurs de base en dimension zero
- β générateurs de base en dimension un
- ε générateurs de base en dimension q

- B6 -

- Tenons compte du fait que $H_c^*(\Sigma^n) = (n, 2n)$ et du fait que $\bar{\Sigma}^0 = \Sigma^0 = \text{deux points}$.

Alors la suite de triangles exacts :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bar{\Sigma}^{2p} & \longrightarrow & \bar{\Sigma}^{2p-1} & \longrightarrow & \bar{\Sigma}^{2p-2} & \dots & \bar{\Sigma}^3 & \longrightarrow & \bar{\Sigma}^2 & \longrightarrow & \bar{\Sigma}^1 & \longrightarrow & \Sigma^0 \\
 \uparrow & \swarrow \times & \uparrow & \swarrow \times & & & \uparrow & \swarrow \times & \uparrow & \swarrow \times & \uparrow & \swarrow \times & \\
 \Sigma^{2p} & & \Sigma^{2p-1} & & & & \Sigma^3 & & \Sigma^2 & & \Sigma^1 & &
 \end{array}$$

permet le calcul par récurrence de $H_c^*(\bar{\Sigma}^n)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 (2p) \oplus (0, 2, \dots, 4p) & \longrightarrow & (0, 2, 4, \dots, 4p-2) & \dots & (0, 2, 4, 6) & \longrightarrow & (0, 2^2, 4) & \longrightarrow & (0, 2) & \longrightarrow & 0^2 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & (2p, 4p) & & (2p-1, 4p-2) & & (3, 6) & & (2, 4) & & (1, 2) & &
 \end{array}$$

En conclusion :

$$H_c^*(\bar{\Sigma}^{2p-1}) = (0, 2, 4, \dots, 4p-2)$$

et

$$\begin{aligned}
 H_c^*(\bar{\Sigma}^{2p}) &= (2p) \oplus (0, 2, 4, \dots, 4p) \\
 &= (0, 2, \dots, 2p-2, (2p)^2, 2p+2, \dots, 4p)
 \end{aligned}$$

Remarque : L'inclusion fermée canonique $\bar{\Sigma}^q \hookrightarrow \bar{P}^{q+1}$ donne les triangles exactes de cohomologie compacte :

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{P}^{q+1} & \longrightarrow & \bar{\Sigma}^q \\
 \uparrow & \swarrow \times & \\
 \bar{P}^{q+1} & \longleftarrow & \bar{\Sigma}^q
 \end{array}$$

- B7 -

et, de ce qui précède et du fait que

$$H_c^*(\bar{P}^q) = (0, 2, \dots, 2q) ,$$

on déduit facilement,

$$H_c^*(\bar{P}^{2p} - \bar{\Sigma}^{2p-1}) = (4p)$$

$$H_c^*(\bar{P}^{2p+1} - \bar{\Sigma}^{2p}) = (2p+1, 4p+2)$$

d'où, pour l'homologie :

$$H_*^c(\bar{P}^{2p} - \bar{\Sigma}^{2p-1}) = (0)$$

et

$$H_*^c(\bar{P}^{2p+1} - \bar{\Sigma}^{2p}) = (0, 2p+1)$$

ANTIPODIE ET ISOTOPIE

Proposition (Y. Fary)

La transformation antipodaire $z \mapsto -z$ de la sphère complexe affine Σ^n sur elle-même, est isotope à un difféomorphisme qui est l'identité hors d'un compact et qui est la transformation antipodaire au voisinage de la sphère réelle de gorge.

Preuve

Pour $n = 0$ ie pour $\Sigma^0 = S^0$ c'est évident

Pour $n = 1$ ie pour Σ^1

si $(x, y) \in \Sigma^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, l'isotopie est $(x, y) \mapsto (x e^{i\theta_t(|y|)}, y e^{i\theta_t(|y|)})$, où $\theta_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ , monotone constamment égale à π quand l'argument est inférieur à $\eta_0 \geq 0$, et constamment égale à $(1-t)\pi$ quand l'argument est supérieur à $\eta_1 > \eta_0$.

Pour n quelconque,

on vérifie qu'il existe bien une telle isotopie qui induise l'isotopie précédemment décrite sur la sous sphère complexe canonique de dimension 1 $\Sigma^1_{(x,y)} \subset \Sigma^n$ passant par l'origine et par le point $(x,y) \in \Sigma^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ lorsque ce point varie dans Σ^n et que $y \neq 0$.

UN ATLAS REEL POUR $\bar{\Sigma}^n(\mathbb{C})$

[L'atlas réel que nous choisissons pour $\bar{\Sigma}^n$ est l'atlas induit par l'atlas réel de $\bar{P}^{n+1}$ après que ce dernier ait subi l'automorphisme "non réel" $\bar{P}^{n+1} \rightarrow \bar{P}^{n+1}$

$$z = (z_0, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \rightarrow \bar{z} = (\underline{z}, \sigma, \tau) = (z_1, \dots, z_n, \sigma, \tau)$$

$$\text{où} \quad \sigma = z_0 + iz_{n+1} \quad \text{et} \quad \tau = -z_0 + iz_{n+1} \quad (i^2 = 1)]$$

Autrement dit, nous considérons que $\bar{\Sigma}^n(\mathbb{C}) \subset \bar{P}^{n+1} \ni \bar{z} = (\underline{z}, \sigma, \tau)$ est défini par l'équation homogène :

$$\bar{\Sigma}^n(\mathbb{C}) : \underline{z}^2 = \sigma\tau \quad (\text{ie } z_1^2 + \dots + z_n^2 = \sigma\tau)$$

et prenons alors pour atlas réel de $\bar{\Sigma}^n(\mathbb{C})$, celui induit dans ce plongement par l'atlas réel ordinaire de $\bar{P}^{n+1} \ni \bar{z}$.

Alors la partie réelle de $\bar{\Sigma}^n$ est $\bar{\Sigma}^n(\mathbb{R}) = \text{Re } \bar{\Sigma}^n =$

$$S^n = \{\bar{z} | \underline{z}^2 = \sigma\tau, \bar{z} \text{ réel}\} \subset \bar{P}^{n+1}(\mathbb{R}) \subset \bar{P}^{n+1}(\mathbb{C}).$$

C'est une sphère affine réelle de dimension n sur $\mathbb{R}$.

Elle porte les deux points particuliers

$$\Omega_\sigma = \{\bar{z} \text{ dont seule la coordonnée } \sigma \text{ est non nulle}\}$$

$$\Omega_\tau = \{\bar{z} \text{ dont seule la coordonnée } \tau \text{ est non nulle}\}$$

que nous prenons comme pôles antipodaux de cette partie réelle. Il suffit de deux cartes de l'atlas réel de $\bar{\Sigma}^n(\mathbb{C})$ pour couvrir $\bar{\Sigma}^N(\mathbb{R})$. En voici un couple intéressant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{La carte } \mathbb{C}_\sigma^n \text{ centrée en } \Omega_\sigma \text{ et la carte } \mathbb{C}_\tau^n \text{ centrée en } \Omega_\tau \\ \Omega_\sigma \in \mathbb{C}_\sigma^n \xrightarrow{i_\sigma} \bar{\Sigma}^n(\mathbb{C}) \qquad \qquad \qquad \bar{\Sigma}^n(\mathbb{C}) \xleftarrow{i_\tau} \mathbb{C}_\tau^n \ni \Omega_\tau \\ \underline{z} \longmapsto (\underline{z}, \sigma = 1, \tau = \underline{z}^2) \qquad \text{et} \qquad (\underline{z}, \sigma = \underline{z}^2, 1) \longleftarrow \underline{z} \end{array} \right.$$

Le passage de $\mathbb{C}_\sigma$ à $\mathbb{C}_\tau$ se fait par inversion [car $(\underline{z}, 1, \underline{z}^2)$ et $(\underline{z}/\underline{z}^2, 1/\underline{z}^2, 1)$ ($\underline{z}^2 \neq 0$) représentent le même point].

De façon plus précise :

$\bar{\Sigma}^n(\mathbb{R})$ est la compactification, par le seul point Ω_τ , de $i_\sigma(\mathbb{R}^n)$

$\bar{\Sigma}^n(\mathbb{R})$ est la compactification, par le seul point Ω_σ , de $i_\tau(\mathbb{R}^n)$

$\bar{\Delta}_\tau^{n-1}(\mathbb{C}) = [\bar{\Sigma}^n(\mathbb{C}) - i_\sigma(\mathbb{C}_\sigma^n)]$ est le cône projectif de sommet Ω_τ
(section de $\bar{\Sigma}^n(\mathbb{C})$ par son plan tangent en Ω_τ)

et $\bar{\Sigma}^n(\mathbb{C})$ est la compactification, par le cône $\bar{\Delta}_\tau^{n-1}(\mathbb{C})$, de $i_\sigma(\mathbb{C}_\sigma^n)$.

$\Delta_\tau = \{\underline{z} \in \mathbb{C}_\tau^n \mid \underline{z}^2 = 0\} \subset \mathbb{C}_\tau^n$ est le cône contre image par i_τ de $\bar{\Delta}_\tau$

$\Delta_\sigma = \{\underline{z} \in \mathbb{C}_\sigma^n \mid \underline{z}^2 = 0\} \subset \mathbb{C}_\sigma^n$ est le cône de sommet Ω_σ , contre image de $\bar{\Delta}_\sigma$
par i_σ .

Alors les contre images de $i_\sigma(\mathbb{C}_\sigma^n) \wedge i_\tau(\mathbb{C}_\tau^n)$ par i_σ puis i_τ sont

$$(\mathbb{C}_\sigma^n - \Delta_\sigma) = \{\underline{z} \in \mathbb{C}_\sigma^n \mid \underline{z}^2 \neq 0\}$$

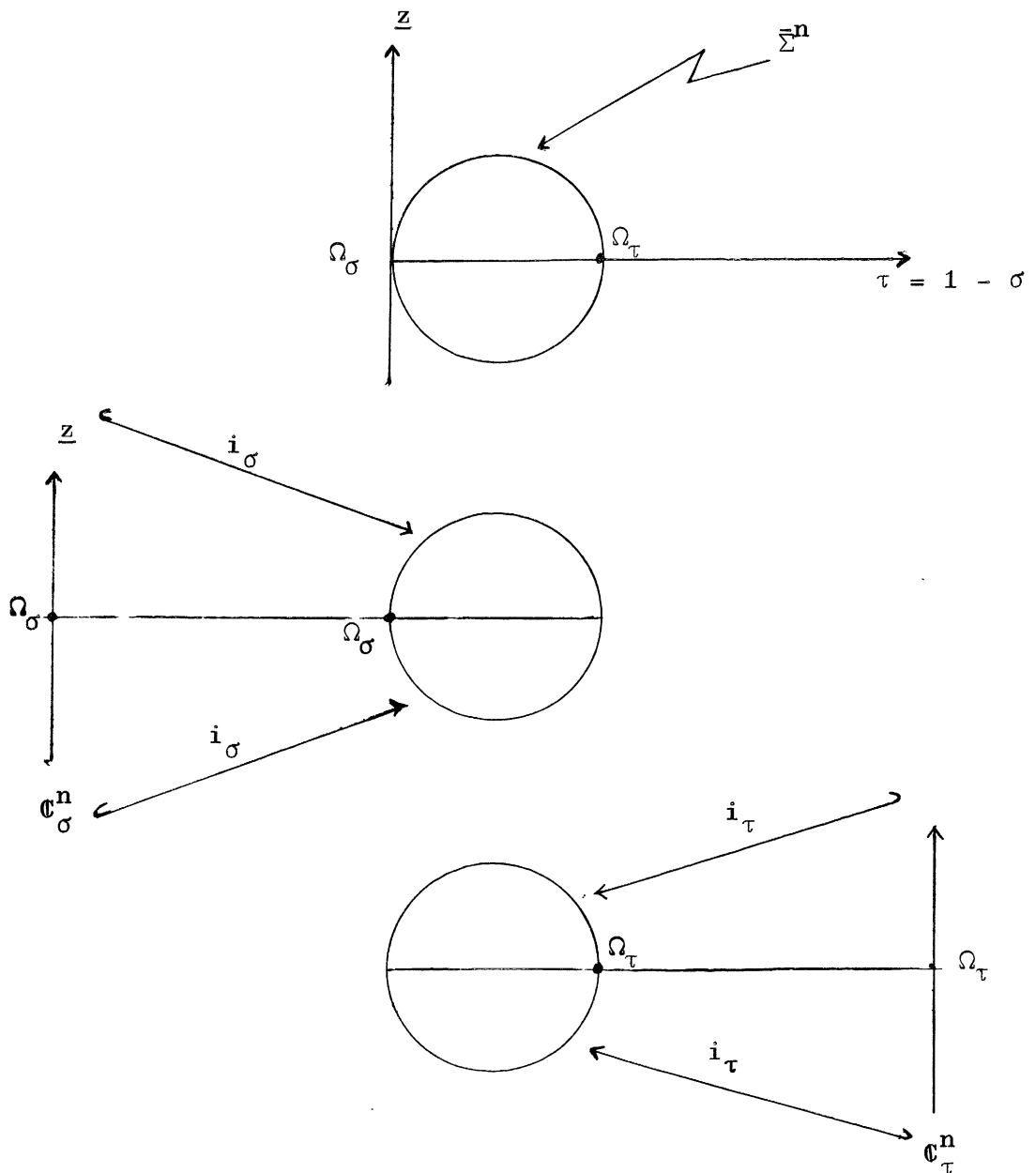
$$(\mathbb{C}_\tau^n - \Delta_\tau) = \{\underline{z} \in \mathbb{C}_\tau^n \mid \underline{z}^2 \neq 0\}$$

L'isomorphisme traditionnel de changement de carte :

$$\left| \begin{array}{l} \dot{\underline{z}} \in (\mathbb{C}_\sigma^n - \Delta_\sigma) \hookrightarrow (\mathbb{C}_\tau^n - \Delta_\tau) \ni \underline{z} \text{ est l'inversion : } \underline{\dot{z}} \mapsto \underline{z} = (\underline{\dot{z}}/\underline{\dot{z}}^2) = \underline{\dot{z}}^{-1} \\ \text{sa réciproque est } \underline{\dot{z}} = \underline{z}^{-1} \mapsto \underline{z} \end{array} \right.$$

$[\underline{z}]$ et $[\underline{\dot{z}}]$ sont dans des espaces différents ; ils peuvent néanmoins être considérés comme les coordonnées de points différents d'un même troisième $\mathbb{C}^n - \Delta$; alors, s'ils représentent le même point de $\bar{\Sigma}^n$, ils satisfont la relation involutive d'inversion : $\underline{z} = (\underline{\dot{z}})^{-1} = \underline{\dot{z}}$

Voici une représentation graphique dans la carte $\sigma + \tau = 1$ de l'ambient



Produit de sphères complexes $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$

La situation précédente se fonctorise sur les inclusions d'ensembles finis : la sphère $\bar{\Sigma}^n \subset \bar{P}^n$, munie de ses deux cartes centrées aux antipodes :

$$(*) \quad \Omega_\sigma \in \mathbb{C}_\sigma^n \xrightarrow{i_\sigma} \bar{\Sigma}^n \xleftarrow{i_\tau} \mathbb{C}_\tau^n \ni \Omega_\tau$$

est un foncteur qui appliqué à l'ensemble $\Gamma = \{1, 2, \dots, \gamma, \dots, |\Gamma|\}$ donne l'objet

$$\Omega_\sigma(\Gamma) \in \mathbb{C}_\sigma^n(\Gamma) \xrightarrow{\Gamma_\sigma} \bar{\Sigma}^n(\Gamma) \xleftarrow{\Gamma_\tau} \mathbb{C}_\tau^n(\Gamma) \ni \Omega_\tau(\Gamma) ,$$

produit, dans la bonne catégorie de variétés, d'objets identiques à (*) et indexés par Γ .

- Les cartes Γ_σ et Γ_τ de l'atlas réel de $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ sont centrées respectivement en $\Omega_\sigma(\Gamma) = \Omega_{\sigma_1} \times \dots \times \Omega_{\sigma_\Gamma}$ et $\Omega_\tau(\Gamma) = \Omega_{\tau_1} \times \dots \times \Omega_{\tau_r}$.

- $\mathbb{C}_\sigma^n(\Gamma)$ est un vectoriel de dimension $n|\Gamma|$ sur $\mathbb{C}$, ses coordonnées se notent : $\underline{z}_\Gamma = (\underline{z}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \mathbb{C}_\sigma^n(\Gamma)$

- $\bar{\Sigma}^n(\Gamma) \subset \bar{P}^n(\Gamma) \ni \bar{z}_\Gamma = (\bar{z}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est une multisphère dans un multiprojectif
 $\mathbb{C}_\sigma^n(\Gamma) \xrightarrow{\Gamma_\sigma} \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ est $\underline{z}_\Gamma = (\underline{z}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \mapsto \bar{z}_\Gamma = (\bar{z}_\gamma) = (\underline{z}_\gamma, \sigma_\gamma = 1, \tau_\gamma = \underline{z}_\gamma^2)$
 $\gamma \in \Gamma$

- Soit $\Delta_\sigma^{n-1}(\gamma) \subset \mathbb{C}_\sigma^n(\Gamma)$ le cône dégénéré $\Delta_\sigma^{n-1}(\gamma) = \{\underline{z}_\Gamma | \underline{z}_\gamma^2 = 0\}$

- Soit $(\Gamma)^\Delta_\sigma \subset \mathbb{C}_\sigma^n(\Gamma)$ la réunion $(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Delta_\sigma(\gamma)) \subset \mathbb{C}_\sigma^n(\Gamma)$ de ces cônes.

- L'isomorphisme de passage d'une carte à l'autre

$$\dot{\underline{z}}_\Gamma \in (\mathbb{C}_\sigma^n(\Gamma) - (\Gamma)^\Delta_\sigma) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}_\tau^n(\Gamma) - (\Gamma)^\Delta_\tau^{n-1}) \ni \underline{z}_\Gamma$$

est l'inversion $\dot{\underline{z}}_\Gamma = (\dot{\underline{z}}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \mapsto \underline{z}_\Gamma = (\dot{\underline{z}}_\gamma / \dot{\underline{z}}_\gamma^2)_{\gamma \in \Gamma} = (\dot{\underline{z}}_\Gamma)^{-1}$

Toute filtration d'ensembles finis donne une suite composable d'épimorphismes des objets correspondants ; ainsi à $i \in I \subset \Gamma$ est associée la suite de projections : $\bar{\pi}(i, I) \circ \bar{\pi}(I, \Gamma) = \bar{\pi}(i, \Gamma)$

[encore notée $\bar{\pi}(i, I) \circ \bar{\pi}(I) = \bar{\pi}(i)$, Γ étant considéré comme initial].

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{array}{c} (\Gamma) \\ \downarrow \bar{\pi}(I, \Gamma) \\ (I) \\ \downarrow \bar{\pi}(i, I) \\ (i) \end{array} & & \begin{array}{c} \Omega_{\sigma}(\Gamma) \in \Delta_{\sigma}(\Gamma) \subset \mathbb{C}_{\sigma}^n(\Gamma) \xrightarrow{\Gamma_{\sigma}} \bar{\Sigma}^n(\Gamma) \xleftarrow{\Gamma_{\tau}} \mathbb{C}_{\tau}^n(\Gamma) \ni \Omega_{\tau}(\Gamma) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \Omega_{\sigma}(I) \in \Delta_{\sigma}(I) \subset \mathbb{C}_{\sigma}^n(I) \xrightarrow{\quad} \bar{\Sigma}^n(I) \xleftarrow{\quad} \mathbb{C}_{\tau}^n(I) \ni \Omega_{\tau}(I) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \Omega_{\sigma}(i) \in \Delta_{\sigma}(i) \subset \mathbb{C}_{\sigma}^n(i) \xrightarrow{\quad} \bar{\Sigma}^n(i) \xleftarrow{\quad} \mathbb{C}_{\tau}^n(i) \ni \Omega_{\tau}(i) \end{array}
 \end{array}$$

Notation : la projection $\pi(J) : \mathbb{C}^n(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}^n(\tau)$ se note encore $\underline{z}_{\Gamma} \mapsto \underline{z}_I = \underline{z}_I^{\Gamma}$

L'image inverse par $\bar{\pi}(i)$ de $\Omega_{\sigma}(i) \in \Delta_{\sigma}(i) \subset \bar{\Sigma}_{(i)}^n$

se note encore de même $\Omega_{\sigma}(i) \subset \Delta_{\sigma}(i) \subset \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$

L'intersection de ces images inverses lorsque i parcourt I , se note

$$\text{par abus} \quad \Omega_{\sigma}(I) \subset \Delta_{\sigma}(I) \quad (\subset \bar{\Sigma}^n(\Gamma))$$

$$\text{ou, sans abus,} \quad (I)_{\Omega_{\sigma}} \subset (I)_{\Delta_{\sigma}} \subset \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$$

La réunion de ces images inverses lorsque i parcourt I , se note

$$(I)_{\Omega_{\sigma}} \subset (I)_{\Delta_{\sigma}} \subset \mathbb{C}_{\sigma}^n(\Gamma) \subset \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$$

Inversion partielle (dans la I-projection)

Soit $\underline{z}_{\Gamma} \in \mathbb{C}_{\sigma}^n(\Gamma) - (I)_{\Delta_{\sigma}}$ alors $\underline{z}_I = \underline{z}_I^{\Gamma} = \pi(I)(\underline{z}_{\Gamma}) \in \mathbb{C}_{\sigma}^n(I) - I_{\Delta_{\sigma}}$

et a donc dans cette même carte un inverse que l'on note $\underline{z}_I^{-1}$:

Si $\underline{z}_I = (\underline{z}_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}_{\sigma}^n(I) - I_{\Delta_{\sigma}}$, $\underline{z}_I^{-1} = (\underline{z}_i^{-1})_{i \in I} = (\underline{z}_i / \underline{z}_i^2)_{i \in I} \in \mathbb{C}_{\sigma}^n(I) - I_{\Delta_{\sigma}}$

APPENDICE C : LA DECOMPOSITION HOMOLOGIQUE

C.I Le lemme d'évanouissement

Soit Z un espace topologique et soit $\Sigma' \xrightarrow{i} Z$ un sous espace de Z .

Si, à tout compact K on peut associer une isotopie Z -ambiante σ_K de Σ' , qui envoie Σ' hors de K : $\sigma_K(\Sigma') = K_{\Sigma'} \subset (Z - K)$ alors c'est l'application nulle : $H_c^q(Z) \xrightarrow{i^*} H_c^q(\Sigma')$, que l'inclusion i donne par passage aux groupes de cohomologie à support compact.

Preuve

Si h est une classe quelconque de la cohomologie à support compact dans $H_c^q(Z)$, il s'agit de montrer que $i^*(h) = 0$. Soit $\omega \in h = h(\omega)$ un cocycle représentant h . ω s'annule donc en dehors d'un certain compact $K\omega$. Par hypothèse il existe une isotopie Z -ambiante $\sigma_{K\omega}$ de Σ' telle que $\sigma_{K\omega}(\Sigma') = K_{\omega\Sigma'} \subset Z - K\omega$.

Soit $i_{K\omega}$ l'inclusion $i_{K\omega} : K_{\omega\Sigma'} \hookrightarrow Z$.

Alors le diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{array}{ccc} \Sigma' & \xrightarrow{\sigma_{K\omega}|_{\Sigma'}} & K_{\omega\Sigma'} \\ i \downarrow & & \downarrow i_{K\omega} \\ Z & \xrightarrow{\sigma_{K\omega}} & Z \end{array}$$

donne le diagramme commutatif de groupes de cohomologie compacte en dimension q :

$$\begin{array}{ccc}
 H_c^q(\Sigma') & \xleftarrow{(\sigma_{K\omega}|_{\Sigma'})^*} & H_c^q(K\omega_{\Sigma'}) \\
 \uparrow i^* & & \uparrow i_{K\omega}^* \\
 H_c^q(Z) & \xleftarrow{\sigma_{K\omega}^*} & H_c^q(Z)
 \end{array}$$

dans lequel

- (a) La flèche de droite annule la classe $h(\omega)$ de ω puisque $K\omega_{\Sigma'}$ ne coupe pas le support de ω : ie $i_{K\omega}^* h(\omega) = 0$.
- (b) Les deux flèches horizontales sont des isomorphismes car $\sigma_{K\omega}$ est une isotopie (cf. Prop. 1; (4)).
- (c) La flèche horizontale du bas est l'IDENTITE de $H_c^q(Z)$, car l'isotopie $\sigma_{K\omega}$ est Z-ambiante (cf. prop. 1. (4')).

On a donc

$$\begin{aligned}
 i^*(h) &= (\sigma_{K\omega}|_{\Sigma'})^* \circ i_{K\omega}^* \circ (\sigma_{K\omega}^*)^{-1}(h) = \\
 &= (\sigma_{K\omega}|_{\Sigma'})^* \circ i_{K\omega}^* \circ (h) = \\
 &= (\sigma_{K\omega}|_{\Sigma'})^* (0) = 0
 \end{aligned}$$

]]

Le fait que l'isotopie soit Z-ambiante est fondamental.

Remarque : La cohomologie H_c^q à support compact dont il s'agit est à coefficients dans un faisceau constant de fibre G quelconque; on sait qu'elle coïncide alors avec la cohomologie singulière à support compact à valeur dans G .

C.II La décomposition homologique

Le lemme précédent, un théorème d'isotopie simple due à la (P.G.) le théorème de désintégration d'Hironaka, puis la dualité de Poincaré et la théorie du cobord composé de J. Leray, permettent de montrer pour l'homologie ordinaire à coefficients dans $\mathbb{C}$ [et aussi pour la cohomologie à support compact] que l'on a la décomposition suivante :

Théorème :

Soit $\{S^{i'}, S_i\}$ $(i', i) \in J' \times J \subset \mathbb{C}^n$ une famille de sous-variétés algébriques complexes de codimension un et en Position Générale dans l'espace numérique affine complexe de dimension n . Posons :

$$Z = \bigcap_{J'} S^{i'} \quad \text{et} \quad \Sigma_i = Z \cap S_i \quad \forall i \in J.$$

alors l'homologie (resp la cohomologie) admet la décomposition (non canonique) en somme directe :

$$H_*^{\mathbb{C}}(Z - \bigcup_{i \in J} \Sigma_i) = \bigoplus_{h \in \mathcal{P}(J)} \delta^h H_{*-|h|}^{\mathbb{C}}(Z \cap \bigcup_{i \in h} \Sigma_i)$$

où δ^h est la cobord h -composé de J. Leray (et se trouve ici être une injection).

où $\mathcal{P}(J)$ est l'ensemble de toutes les parties de J.

Idée de la preuve

- (1) La situation affine est en P.G. et admet donc une compactification en (P.G.) d'après H. Hironaka. Soit $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \overline{\mathbb{K}}^n$ cette compactification et soit $(p) \overline{\mathbb{K}} = \overline{\mathbb{K}}^n - \mathbb{C}^n$ et $\overline{S}_i$ les fermetures de Z et S_i .

- (2) La (P.G.) dans $\overline{K}^n$ entraîne l'existence d'isotopie $\overline{K}^n$ -ambiante laissant fixe ${}_{(p)}\overline{K}$, $\overline{Z}$ et $\overline{S}_i$ sauf une $\overline{S}_j$ au choix qu'elle envoie hors de tout compact de C^n . Cette isotopie restreinte à Z est Z -ambiante.
- (3) Le lemme d'évanouissement montre que la suite exacte de cohomologie compacte pour le fermé S_j se tronçonne en triplets.
Par récurrence simple sur $|J|$ ceci montre le théorème pour la cohomologie à support compact.
- (4) L'isomorphisme de Poincaré valable pour une variété non singulière entre l'homologie et la cohomologie à support dans une même famille, donne le théorème pour l'homologie. Le transformé du cobord de la suite de cohomologie du fermé est précisément le cobord d'homologie de J .
Leray (au signe mouvant près).

APPENDICE D

I - CATEGORIE DES GRAPHS ABSTRAITS

a) Monomorphisme unitaire de graphes

C'est un morphisme $\mu = (\mu_1, \mu_2) : G' \hookrightarrow G$ tel que μ_1 est une injection et μ_2 est l'identité

$$\begin{array}{ccccc}
 G' & (L', 0) & \xrightarrow{\quad} & (V', \infty) & \\
 \downarrow N & \downarrow N_1 & \text{injection} & \downarrow \text{identité} & \\
 G & (L, 0) & \xrightarrow{\quad} & (V, \infty) &
 \end{array}$$

b) Les monomorphismes unitaires forment une sous catégorie $\underline{G}_\circ \subset \underline{G}$ de celle des graphes.

c) Monomorphismes unitaires ADJOINTS

Si $\mu : F \hookrightarrow G$ est un monomorphisme unitaire, on dit que

$\mu^* : F^* \hookrightarrow G$ est adjoint de μ si

- (1) μ^* est un monomorphisme unitaire
- (2) si le produit fibré $F^* \times_G F$ de μ et μ^* sur G , n'a pas de lignes ie si c'est le graphe $(G, \emptyset)$ déduit de G en supprimant toutes les lignes L'adjonction est une involution.

d) Noyau d'un graphe

Le noyau d'un graphe $G : (L, 0) \xrightarrow[\mu]{\mu^*} (V, \infty)$ est le monomorphisme unitaire $\nu : F \hookrightarrow G$ défini par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 F & (L', 0) & \xrightleftharpoons[\beta]{\sigma} & (V, \infty) & \\
 \downarrow v & \downarrow v_1 & & \downarrow \text{Id.} & \\
 G & (L, 0) & \xrightleftharpoons[B]{S} & (V, \infty) &
 \end{array}$$

où v_1 est le noyau de la double flèche (S, B) de G et où $\sigma = S \circ v_1$,
 $\beta = B \circ v_1$.

e) La classe Γ et la classe Γ^*

Γ est la classe des NOYAUX de graphes, c'est une classe de monomorphismes unitaires,
 Γ^* est la classe des adjoints aux noyaux, c'est une classe de monomorphismes unitaires.

f) La catégorie des graphes abstraits $\underline{G}_0 = \Gamma^* \setminus \underline{G}$

C'est la catégorie $\underline{G}_0$ des fractions à gauche de la catégorie des graphes $\underline{G}$,
relativement à la classe Γ^* des monomorphismes unitaires adjoints aux
noyaux.

II - LA CATEGORIE DES FONCTEURS : $\text{Hom}(. \rightrightarrows ., \text{ensembles pointés})$

La catégorie des doubles flèches d'ensembles pointés est la
catégorie des foncteurs $\text{Hom}(. \rightrightarrows ., \text{ensembles pointés})$.

Or la catégorie des ensembles pointés admet : des objets nuls, des sommes amalgamées et des produits fibrés, elle admet donc des limites inductives et des limites projectives finies, (et même infinies). Il en va donc de même de toute catégorie de foncteurs à valeur dans cette catégorie, de plus les limites peuvent se calculer point par point ; autrement dit les foncteurs valeur en un point commutent à ces limites.

On a donc la proposition suivante :

Proposition

La catégorie des doubles flèches d'ensembles pointés admet

des objets nuls

des limites inductives

des limites projectives

De plus :

Le foncteur "1" "ensemble des lignes" ie $G \mapsto (L, 0)$

Le foncteur "2" "ensemble des vertex" ie $G \mapsto (V, x)$

Le foncteur "\$" "Source des lignes" ie $G \mapsto S$ et

Le foncteur "B" "But des lignes" ie $G \mapsto B$

commutent aux limites inductives et projectives.

]]

Parmi les limites inductives citons les sommes directes, et les sommes amalgamées.

Parmi les limites projectives citons les produits et les produits fibrés.

Corollaire

Dans la catégorie des doubles flèches d'ensembles pointés,
comme dans celle des ensembles pointés,

Toute flèche admet une flèche noyau*.

Toute flèche admet une flèche conoyau.

Toute flèche noyau est un monomorphisme strict.

Toute flèche conoyau est un épimorphisme strict.

Tout momorphisme est une flèche noyau d'une flèche conoyau, et est
une injection.

Toute flèche conoyau est conoyau d'une flèche noyau.

Malheureusement un épimorphisme n'est en général pas une flèche
conoyau, (mais est cependant une surjection).

Tout monomorphisme admet une flèche noyau qui est une flèche nulle.

Tout épimorphisme admet une flèche conoyau qui est une flèche nulle.]]

C'est en raison de ces belles propriétés qu'il n'y a pas
lieu de démolir cette catégorie mais au contraire, de l'utiliser au
mieux.

* Rappel

- une flèche nulle est une flèche qui se factorise au travers d'un
objet nul (ie à la fois initial et final)

* Un monomorphisme est une flèche qui n'égalise jamais deux flèches
différentes qui la précèdent ie α monomorphisme $(\alpha f = \alpha g) \Rightarrow (f = g)$.
Un épimorphisme τ est une flèche qui n'égalise jamais deux flèches
différentes qui la suivent ie τ épimorphisme $(f\tau = g\tau) \Rightarrow (f = g)$.
Un monomorphisme FAIBLE, est une flèche dont le noyau est nul, ce n'est
pas un monomorphisme.
Un épimorphisme FAIBLE est une flèche dont le conoyau est nul.

Ici les objets nuls sont $(0) \rightrightarrows (x)$.

- une flèche noyau est un noyau $N \rightarrow G$ d'une double flèche $G \overset{\mathbf{f}}{\underset{\mathbf{o}}{\rightrightarrows}} G'$ de la catégorie, dont l'une est une flèche nulle.
- une flèche conoyau est un conoyau $G' \rightarrow K$ d'une double flèche dont l'une est une flèche nulle.

$$N \rightarrow G \overset{\mathbf{f}}{\underset{\mathbf{o}}{\rightrightarrows}} G' \rightarrow K$$

APPENDICE E : DESINGULARISATION DE $\overset{\diamond}{\varepsilon \Sigma^n}(B) \hookrightarrow \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$

Pour désingulariser ce couple, on en rappelle la construction, dans la notation et la cartologie adaptées décrites à la fin de l'Appendice B, on donne les équations pour $n = 1$ puis pour $n > 1$, on exhibe ses singularités et on donne sa désingularisation pour $n = 1$ puis $n > 1$

1. La construction de $\overline{\varepsilon \Sigma^n}(B) \hookrightarrow \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$

A l'inclusion $B \subset \Gamma$ puis à la matrice d'incidence intérieure $\varepsilon = (\varepsilon_{\gamma}^b) \in \{-1, 0, +1\}^{\Gamma \times B}$, on associe : la projection $\bar{\pi}(B) : \bar{\Sigma}^n(\Gamma) \rightarrow \bar{\Sigma}^n(B)$ de multisphères, puis la fermeture $\overline{\varepsilon \Sigma^n}(B) \hookrightarrow \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ de l'injection composée $\varepsilon(B) = \Gamma_{\tau} \circ \varepsilon$,

$$\mathcal{C}_{\tau}^n(B) \hookrightarrow \mathcal{C}_{\tau}^n(\Gamma) \xhookrightarrow{\Gamma_{\tau}} \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$$

où $\varepsilon : \underline{z}_B = (\underline{z}_b)_{b \in B} \mapsto \underline{z}_{\Gamma} = (\underline{z}_{\gamma} = \varepsilon_{\gamma}^b \underline{z}_b)_{\gamma \in \Gamma}$ et

où Γ_{τ} est la carte centrée en $\Omega_{\tau}(\Gamma) = \Omega_{\tau_1} \times \dots \times \Omega_{\tau_{\Gamma}} \in \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$

2. Les notations

$$B \subset \Gamma = \{1, 2, \dots, B, \dots, p\}, \quad \varepsilon_{\gamma} = (\varepsilon_{\gamma}^b)_{b \in B}, \quad \varepsilon_{\gamma}^b \in \{-1, 0, 1\},$$

Posons $\forall \gamma \in \Gamma, \forall I \in \Gamma$

$$\boxed{\varepsilon(\gamma)} = \{\gamma\} \cup \{b \in B \mid \varepsilon_{\gamma}^b \neq 0\} \subset \Gamma, \quad \boxed{\varepsilon_{\gamma}^{\gamma} = -1}, \quad I \varepsilon = \bigcup_{\gamma \in I} \varepsilon(\gamma)$$

$\diamond$ n est le nombre de composantes du multivecteur $\underline{z} \in \mathcal{C}^n$.
Le cas intéressant est celui des quadrivecteur $n = 4$,
le cas plus facile est celui des monovecteurs $n = 1$.

$\diamond\diamond$ ou totale $\underline{\Theta}$ (Cf. V.1)

Rappelons : $\forall I \subset J \subset \Gamma, \forall \underline{z}_J \in \mathcal{C}^n(J), \forall t_j \in \mathcal{C}(J)$

$$\pi : \mathcal{C}^n(J) \rightarrow \mathcal{C}^n(I) \quad \underline{\underline{z_I^J}} = \pi(\underline{z}_J) \in \mathcal{C}^n(I)$$

$$\underline{z}_J^2 = (\underline{z}_j^2)_{j \in J} \in \mathcal{C}(J) ; \quad \forall \underline{z}_J \in \mathcal{C}^n(J) - J^\Delta ,$$

$$\dot{\underline{z}}_J = \frac{1}{\underline{z}_J} = \frac{\underline{z}_J}{\underline{z}_J^2} = \left(\frac{\underline{z}_j}{\underline{z}_j^2} \right)_{j \in J} \in \mathcal{C}^n(J) .$$

Définissons :

$$\pi_{\varepsilon(\gamma) \cap I} : \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}^n \quad \text{par} \quad \pi_{\varepsilon(\gamma) \cap I} t = \pi_{\varepsilon(\gamma) \cap I} (\varepsilon_\gamma^i t_i^I) \in \mathcal{C}^n$$

Définissons :

$$\Sigma_{\varepsilon(\gamma) \cap I} : \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}^n \quad \text{par} \quad \Sigma_{\varepsilon(\gamma) \cap I} \underline{z} = \left(\sum_{i \in \varepsilon(\gamma) \cap I} \varepsilon_\gamma^i \underline{z}_i^I \right) \in \mathcal{C}^n$$

3. Les équations de $\overline{\varepsilon \Sigma}^n(B)$ dans les deux cartes les plus intéressantes $\mathcal{C}_\tau^n(\Gamma)$ et $\mathcal{C}_\sigma^n(\Gamma)$ de $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ se déduisent de la construction.

(τ) Dans $\mathcal{C}_\tau^n(\Gamma)$, ce sont celles de l'image de ε , soit :

$$\overline{\varepsilon \Sigma}^n(B) \cap \mathcal{C}_\tau^n(\Gamma) = \{ \underline{z}_\Gamma \in \mathcal{C}_\tau^n(\Gamma) \mid \underline{z}_\gamma = \varepsilon_\gamma^b \underline{z}_b, \quad \forall \gamma \in \Gamma \}$$

Cette image est isomorphe à $\mathcal{C}_\tau^n(B)$, c'est un $n \times |B|$ -plan.

Avec les notations précédentes, les équations de $\overline{\varepsilon \Sigma}^n(B) \cap \mathcal{C}_\tau^n(\Gamma)$ sont :

$$(\tau) \quad \left| \sum_{\varepsilon(\gamma)} (\underline{z}_\Gamma) \right| = 0, \quad \gamma \in \Gamma, \quad \underline{z}_\Gamma \in \mathcal{C}_\tau^n(\Gamma)$$

$\overline{\varepsilon \Sigma}^n(B) \cap \mathcal{C}_\tau^n(\Gamma)$ a notamment les qualités suivantes : c'est une variété

algébrique, irréductible, "réelle", de dimension $|B|$ (sur $\mathcal{C}^n$).

Elle est de plus non singulière.

[Sa fermeture $\overline{\varepsilon \Sigma}^n(B)$ dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$, aura les mêmes qualités, mais sera en général singulière].

(ø) Dans $[\mathcal{C}_\sigma^n(\Gamma) - \Gamma^\Delta_\sigma]$, les équations de $\overline{\varepsilon \Sigma}^n(B)$ sont données en composant les précédentes à l'isomorphisme de changement de carte, et sont :

$$\sum_{\varepsilon(\gamma)} (\dot{\underline{z}}_\Gamma) = 0, \quad \gamma \in \Gamma, \quad \underline{z}_\Gamma \in \mathcal{C}_\sigma^n(\Gamma) - \Gamma^\Delta_\sigma, \quad \dot{\underline{z}}_\Gamma = \frac{1}{\underline{z}_\Gamma} \in \mathcal{C}_\sigma^n(\Gamma)$$

Cette variété est donc non singulière, mais sa fermeture dans $\mathcal{C}_\sigma^n(\Gamma)$ ne peut être singulière que sur Γ^Δ_σ .

Pour obtenir l'équation de sa fermeture $\overline{\varepsilon \Sigma}^n(B) \cap \mathcal{C}_\sigma^n(\Gamma)$ dans $\mathcal{C}_\sigma^n(\Gamma)$, on commence par chasser les dénominateurs, ie on forme le système d'équations $\mathcal{C}^n$ -vectorielles :

$$[\underline{\varepsilon}(\gamma)]_{\gamma \in \Gamma} \cdot \pi_{\varepsilon(\gamma)}(\underline{z}_\Gamma^2) \times \sum_{\varepsilon(\gamma)} (\dot{\underline{z}}_\Gamma) = 0, \quad \gamma \in \Gamma, \quad \underline{z}_\Gamma \in \mathcal{C}_\sigma^n(\Gamma)$$

Ces équations sont insuffisantes, il faut adjoindre d'autres équations pour éliminer les composantes parasites qui ne font pas partie de la fermeture. Pour tout $\gamma \in \Gamma - B$, on adjoint au système vectoriel précédent le système scalaire obtenu en faisant le produit scalaire des deux membres de $[\underline{\varepsilon}(\gamma)] = 0$ tour à tour par tous les $\dot{\underline{z}}_j$, où j parcourt $\varepsilon(\gamma) \subset \Gamma$.

[On note que $\dot{\underline{z}}_j \cdot \underline{z}_j = 1 \in \mathcal{C}$]

Ce qui donne le système supplémentaire scalaire :

$$[\underline{\varepsilon}(\gamma)] \cdot \dot{\underline{z}}_j = 0 \quad \gamma \in \Gamma - B, \quad j \in \varepsilon(\gamma) \subset \Gamma.$$

Ceci ne suffit pas à éliminer les parasites, cependant par prise de déterminants et substitutions linéaires entre les équations de ces systèmes, on doit arriver au but (qui est d'éliminer les facteurs $\underline{z}_j^2$).

Dans $\mathcal{C}_\sigma^1(\Gamma)$ (ie $n = 1$), la simplification $t = \frac{t^2}{t}$ conduit tout de suite au bon système et la fermeture $\varepsilon\Sigma^1(B) \cap \mathcal{C}_\sigma^1(\Gamma)$ est l'intersection des hyper surfaces :

$$\varepsilon(\gamma)f : \begin{pmatrix} \pi \\ \varepsilon(\gamma) \end{pmatrix} t_\Gamma \times \begin{pmatrix} \Sigma \\ \varepsilon(\gamma) \end{pmatrix} \frac{1}{t_\Gamma} = 0, \quad \gamma \in \Gamma - B, \quad t_\Gamma \in \mathcal{C}_\sigma^1(\Gamma)$$

[On vérifie que cette intersection est irréductible].

Remarque : hors de $(\Gamma)^\Delta_\sigma$ dans $\mathcal{C}_\sigma^n(\Gamma)$ le système vectoriel entraîne le système scalaire. Il n'en est plus de même sur $(\Gamma)^\Delta_\sigma$:

Exemple : $B = \{1,2\} \subset \Gamma = \{1,2,3\}$, $\varepsilon_3 = (\varepsilon_3^1, \varepsilon_3^2) = (-1, -1)$

alors $\overline{\varepsilon\Sigma}^n(B) \hookrightarrow \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ est, dans la carte $\mathcal{C}_\sigma^n(\Gamma)$:

$$\overline{\varepsilon\Sigma}^n(B) \cap \mathcal{C}_\sigma^n(\Gamma) = \{(\underline{q}_1, \underline{q}_2, \underline{q}_3) \in \mathcal{C}_\sigma^n\{1,2,3\} |$$

tels que l'on ait cumulativement :

$$(n_1)_\sigma \quad [\underline{\varepsilon}(\gamma)]_\sigma \quad (\underline{a}_1^2) \times (\underline{a}_2^2) \times (\underline{a}_3^2) \times \left(\frac{\underline{a}_1}{\underline{a}_1} + \frac{\underline{a}_2}{\underline{a}_2} + \frac{\underline{a}_3}{\underline{a}_3} \right) = 0$$

$$(n_2)_\sigma \quad \begin{cases} [\underline{\varepsilon}(\gamma)] \cdot \frac{\underline{a}_1}{\underline{a}_1} \quad (\underline{a}_2^2) \times (\underline{a}_3^2) + (\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_1)(\underline{a}_3^2) + (\underline{a}_3 \cdot \underline{a}_1)(\underline{a}_2^2) = 0 \\ [\underline{\varepsilon}(\gamma)] \cdot \frac{\underline{a}_2}{\underline{a}_2} \quad (\underline{a}_1^2) \times (\underline{a}_3^2) + (\underline{a}_3 \cdot \underline{a}_2)(\underline{a}_1^2) + (\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2)(\underline{a}_3^2) = 0 \\ [\underline{\varepsilon}(\gamma)] \cdot \frac{\underline{a}_3}{\underline{a}_3} \quad (\underline{a}_2^2) \times (\underline{a}_1^2) + (\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_3)(\underline{a}_2^2) + (\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_3)(\underline{a}_1^2) = 0 \end{cases}$$

$$(n_3)_\sigma \quad (\underline{a}_1 + \underline{a}_2)(\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2)(\underline{a}_3^2) + (\underline{a}_1 + \underline{a}_3)(\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_3)\underline{a}_2^2 + (\underline{a}_3 + \underline{a}_2)(\underline{a}_3 \cdot \underline{a}_2)\underline{a}_1^2 = 0.$$

$$(n_4)_\sigma \quad 3 \times (3 + n) \text{ matrice suivante :}$$

$$\begin{vmatrix} (\underline{a}_2 - \underline{a}_3) \cdot \underline{a}_1 & (\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_3) & -(\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_1) & \underline{a}_1 \\ -\underline{a}_3 \cdot \underline{a}_2 & (\underline{a}_3 - \underline{a}_1) \cdot \underline{a}_2 & (\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_1) & \underline{a}_2 \\ +\underline{a}_3 \cdot \underline{a}_2 & -(\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_3) & (\underline{a}_1 - \underline{a}_2) \cdot \underline{a}_3 & \underline{a}_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{est de rang } 2 \quad \left[\text{sur } \overline{\varepsilon \Sigma}^n(B) \right].$$

On voit que si $\underline{a}_1^2 = \underline{a}_2^2 = 0$ et $\underline{a}_3^2 = 0$, alors $(n_1)_\sigma$ est vérifiée, mais $(n_2)_\sigma$ se réduit à $\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 = 0$, donc n'est pas vérifiée. De même si $(*) \underline{a}_1^2 = \underline{a}_2^2 = \underline{a}_3^2 = 0$, alors $(n_1)_\sigma$ est vérifiée $(n_2)_\sigma$ et $(n_3)_\sigma$ aussi. Ce qui montre l'insuffisance de ces équations puisque notre $\overline{\varepsilon \Sigma}^n(\{1,2\})$ est de $\emptyset$ -codimension n , tandis que $(*)$ est de $\emptyset$ -codimension 3 dans $\emptyset_\sigma^n(\{1,2,3\})$.

La matrice $(n_4)_\sigma$ est celle des coefficients de $\underline{q}_3^2 \times \underline{q}_2^2$, $\underline{q}_1^2 \times \underline{q}_3^2$, et $\underline{q}_2^2 \times \underline{q}_1^2$ de $(n_1)_\sigma$ et de combinaison de $(n_2)_\sigma$.

Cette matrice est de rang 2 sur $\overline{\varepsilon\Sigma}^n \{1,2\}$ hors de $\Delta_\sigma^n \{1,2,3\}$.

Z Une autre méthode (que nous utiliserons éventuellement) pour trouver la fermeture de $\overline{\varepsilon\Sigma}^n(B)$ dans $\phi_\sigma^n(\Gamma)$ est de chercher explicitement les limites dans $(\Gamma)^\Delta_\sigma$ de suites de points de $\overline{\varepsilon\Sigma}^n(B) \cap (\phi_\sigma^n(\Gamma) - (\Gamma)^\Delta_\sigma)$.

4. Les singularités de $\overline{\varepsilon\Sigma}^1(B) \cap \phi_\sigma^1(\Gamma)$ et la désingularisation dans $\phi_\sigma^1(\Gamma)$

$\overline{\varepsilon\Sigma}^1(B) \cap \phi_\sigma^1(\Gamma)$ est la fermeture de l'intersection des hypersurfaces $\varepsilon(\gamma)f \subset \phi_\sigma^1(\Gamma) - \Gamma^\Delta_\sigma$ indexées par $\gamma \in \Gamma - B$.

Examinons d'abord les singularités de chacune d'elles, puis ensuite leur position relative.

4.1. Singularités de chaque hypersurface $\varepsilon(\gamma)f \subset \phi_\sigma^1(\Gamma)$; exemple

On prend : $B = \{1,2,\dots,p-1\} \subset \Gamma = \{1,2,\dots,p\}$, $\varepsilon_p = \varepsilon_p^b = -(1,1,1,1)$. Alors $\overline{\varepsilon\Sigma}^1(B) \cap \phi_\sigma^1(\Gamma) = \varepsilon(p)f$ est l'hypersurface de ϕ^p définie par l'équation :

$$f(t) = \sum_i (t_1 t_2 \dots \hat{t}_i \dots t_p) = 0, \text{ où } t = t_\Gamma = (t_1, \dots, t_p) \in \phi_\sigma^1(\Gamma) = \phi^p$$

Les hyperplans de coordonnées de $\phi^p = \phi^1(\Gamma)$ ont pour équation globale $t_1 t_2 \dots t_p = 0$, et forment un cornet Γ^Δ centré à l'origine dont ils sont les $(p-1)$ -faces.

[Les faces de ce cornet sont indexées par les sous-ensembles $I \subset \Gamma$:

$$F_I = \{t_\Gamma \mid t_I^\Gamma = 0\} \subset \phi(\Gamma) \text{ est la } (p - |I|) \text{ face d'indice } I.$$

♦ polyèdre dont on a enlevé la face opposée au sommet situé à l'origine.

Elles sont partiellement emboîtées :

$$(I \supset J \Rightarrow F_I \subset F_J) ; \quad F_I \cap F_J = F_{I \cup J}$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} (\text{union des } (p-1)\text{-faces}) &= \{t_\Gamma | t_1 \dots t_p = 0\} = \Gamma^\Omega = \Gamma^\Delta \\ (\text{union des } (p-2)\text{-faces}) &= \{t_\Gamma | \exists k \neq j \in \Gamma, t_k = t_j = 0\} \\ (\text{union des } (p-3)\text{-faces}) &= \{t_\Gamma | \exists k \neq j \neq i \in \Gamma, t_i = t_j = t_k = 0\} \\ &\vdots \\ (\text{union des } 1\text{-faces}) &= \{t_\Gamma | \text{au plus un } k \in \Gamma, t_k \neq 0\} = (\text{les arêtes} \\ 0\text{-face} &= \text{Origine.} \end{aligned} \quad]$$

Notre surface $f = 0$ passe par chacune des $(p-2)$ -faces du cornet.

On sait déjà que hors de Γ^Δ , (ie si $\forall i \in \Gamma \quad t_i^2 \neq 0$), ie hors de Γ^Ω , ie hors de notre cornet, il y a régularité de $f = 0$.

La dérivée partielle est $\partial f / \partial t_j = \sum_{i \in \Gamma-j} t_1 t_2 \dots \hat{t}_i \hat{t}_j \dots t_p$.

cherchons les conditions sur $t \in \Gamma^\Delta$ pour que t soit singulier.

Z On a cumulativement, en réordonnant au besoin les indices :
 $(t \in \Gamma^\Delta \Rightarrow t_1 = 0) ; (f(t) = 0 \Rightarrow t_2 = 0) ; (\frac{\partial f}{\partial t_2}(t) = 0 \Rightarrow t_3 = 0)$

En conclusion : Les points singuliers de $f = 0$ forment exactement
l'union de $(p-3)$ -faces du cornet,
 ie $(t_\Gamma \in \emptyset^1(\Gamma) \text{ est singulier pour } f = 0) \Leftrightarrow (\exists I \subset \Gamma, |I| = 3, t_I^\Gamma = 0)$.

[Ainsi, si $|\Gamma| = 3$, f est un cône quadratique non dégénéré passant par les arêtes et dont la seule singularité est le sommet ; si $|\Gamma| = 4$, $f = 0$ est singulier sur chacune des quatre arêtes de coordonnées ; etc...

4.2. Singularités de $\overline{\varepsilon\Sigma}^1(B) \cap \phi_\sigma^1(\Gamma)$

En plus des singularités individuelles des hypersurfaces.

$\varepsilon(\gamma)f$, $\gamma \in \Gamma - B$; on doit chercher leurs singularités relatives.

On sait qu'elles ne sont pas dans $\phi_\sigma(\Gamma) - \Gamma_\sigma^\Delta$ $\varepsilon(\gamma)f \subset \phi(\varepsilon(\gamma)) \times \phi(\Gamma - \varepsilon(\gamma))$ et la projection $\phi(\varepsilon(\gamma)) \times \phi(\Gamma - \varepsilon(\gamma)) \rightarrow \phi(\varepsilon(\gamma))$ induit sur $\varepsilon(\gamma)f$ une fibration de fibre $\phi(\Gamma - \varepsilon(\gamma))$.

Soit $t_\Gamma \in \Gamma^\Delta$, si $t_\Gamma \notin (\varepsilon(\gamma_1)^\Delta \cap \varepsilon(\gamma_2)^\Delta)$, alors $\varepsilon(\gamma_1)f$ et $\varepsilon(\gamma_2)f$ sont en (P.G.) en t_Γ dans $\phi(\Gamma)$. Si $t_\Gamma \in \varepsilon(\gamma_1)^\Delta \cap \varepsilon(\gamma_2)^\Delta$ alors :

$$(t_\Gamma \in \varepsilon(\gamma_1)f \cap \varepsilon(\gamma_2)f) \Leftrightarrow (\exists (i \neq j), (i, j) \in \varepsilon(\gamma_1) \cap \varepsilon(\gamma_2), \text{tg } t_i^\Gamma = t_j^\Gamma = 0).$$

[Comme il découle de $\varepsilon(\gamma)f : (\prod_{\varepsilon(\gamma)} t \times \sum_{\varepsilon(\gamma)} 1/t = 0)$]

Donc une condition nécessaire pour qu'un point $t_\Gamma \in \Gamma_\sigma^\Delta$ soit singulier pour $\overline{\varepsilon\Sigma}^1(B) \cap \phi_\sigma^1(\Gamma)$ est que t_Γ appartienne au moins à l'union des $(p-1)$ -faces.

Conclusion : Si $\overline{\varepsilon\Sigma}^1(B) \cap \phi_\sigma^1(\Gamma)$ est de codimension strictement supérieure à un dans $\phi_\sigma^1(\Gamma)$, les singularités semblent faussement portables par les $(p-2)$ -faces.

Exemple : $\{1, 2\} \subset \varepsilon(\gamma_1) \cap \varepsilon(\gamma_2)$, $\{1, 2\} \cap \varepsilon(\gamma_i) = \emptyset \quad \forall i > 2$.

Au lieu de rester dans $\phi_\sigma(\Gamma)$, il est commode de passer partiellement dans $\phi_\tau(\Gamma)$ et de considérer $z \in \phi_\sigma(\Gamma)$ de coordonnées :

$$t = (t_1, t_2, \dot{t}_3, \dots, \dot{t}_p) \in \phi_\sigma(\{1, 2\}) \times \phi_\tau(\Gamma - \{1, 2\})$$

Alors les surfaces susceptibles de passer par t sont :

$$\varepsilon(\gamma_1)f : (t_1 + t_2) + t_1 t_2 \times \sum_{j>2} \varepsilon_1^j \dot{t}_j = 0$$

$$\varepsilon(\gamma_2^+)f : (t_1 \pm t_2) + t_1 t_2 \times \sum_{j>2} \varepsilon_2^j \dot{t}_j = 0$$

$$\varepsilon(\gamma_i)f, \quad i > 2 \quad \sum_{j>2} \varepsilon_i^j \dot{t}_j = 0$$

Les $\varepsilon(\gamma_i)$ étant indépendants.

$$\text{d'où} \quad \frac{D(\varepsilon(1)f, \varepsilon^+(2)f)}{D(t_1, t_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \pm 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} -2 \\ +0 \end{cases} \quad \text{en } t_1 = t_2 = 0 ;$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial \varepsilon(1 \text{ ou } 2)f}{\partial \dot{t}_j} = 0 \quad \forall j > 2 \quad \text{en } t_1 = t_2 = 0$$

d'où la non singularité individuelle en z de $\varepsilon(1)f$, $\varepsilon^+(2)f$, $\varepsilon(i)f \quad \forall i > 2$,
 puis dans le cas du signe -, la (P.G.) en z , d'abord de $\varepsilon(1)f$ et $\varepsilon^-(2)f$
 entre eux, puis de tous les $\varepsilon(i)f$ entre eux, puis de tous les $\varepsilon(i)f$
mais dans le cas du signe +, $\varepsilon(1)f$ et $\varepsilon^+(2)f$ ont une intersection
singulière en z , mais la fermeture de leur intersection hors Γ^Δ ne l'est
 pas : par substitution linéaire on élimine $\diamond\diamond$ ce mauvais cas.

4.3. Les éclatements désingularisant

a) Eclatement des (p-3)-faces dans $\mathcal{C}^p$

Les (p-3)-faces forment un ensemble algébrique dont les singularités sont les (p-4)-faces, etc...

On peut n'éclater que les (p-3)-faces dans $\mathcal{C}^p$, mais le résultat sera singulier : cet éclatement est donné par la projection sur $\mathcal{C}^p$ de la

$\diamond$ et tous les $K_j : 1 + m_j^2 t_j^2 = 0$ car $\frac{\partial K_j}{\partial t_i}$ est diagonale et $\frac{\partial K_i}{\partial t_i} \neq 0$ sur $K_i = 0$
 $\diamond\diamond$ voir preuve du théorème 2.

fermeture de

$$(\mathcal{C}(\Gamma) - \Gamma^\Delta) \hookrightarrow \mathcal{C}^P \times \prod_{\substack{I \subset \Gamma \\ |I|=3}}^{\pi} \bar{P}^{I-1}, \quad t_\Gamma \mapsto t_\Gamma \times (t_I^\Gamma)_{|I|=3} = 3$$

b) Désingularisation de l'union des (p-2)-faces dans $\mathcal{C}^P$

Il est bien connu que l'éclatement non singulier des (p-3)-faces de $\mathcal{C}^P$ s'obtient en éclatant d'abord l'origine puis l'union (disjointe) des transformées strictes des arêtes, etc..., puis celle des (p-3)-faces.

Z Le résultat est la projection sur $\mathcal{C}^P$ de la fermeture $\tilde{\mathcal{C}}(\Gamma)$ de l'injection
"trois"

$$(\mathcal{C}^P - \Gamma^\Delta) \xrightarrow[\text{trois}]{} \mathcal{C}^P \times \prod_{|I| \geq 3}^{\pi} \bar{P}^{I-1} \text{ donnée par } t_\Gamma \mapsto t_\Gamma \times (t_I^\Gamma)_{|I| \geq 3}$$

c) Désingularisation de Γ^Δ , l'union des (p-1)-faces dans $\mathcal{C}^P$

Il faut, en plus, faire aussi sauter toutes les (p-2)-faces du cornet de $\mathcal{C}^P$.

Z L'éclatement désingularisant est la projection sur $\mathcal{C}^P$ de la fermeture $\tilde{\mathcal{C}}(\Gamma)$
de l'injection totale

$$(\mathcal{C}^P - \Gamma^\Delta) \xrightarrow[\text{totale}]{} \mathcal{C}^P \times \prod_{I \subset \Gamma}^{\pi} \bar{P}^{I-1} \text{ donnée par } t_\Gamma \mapsto t_\Gamma \times (t_I^\Gamma)_{I \subset \Gamma}$$

[où $t_I \in \bar{P}^{I-1}$ est le projectif de dimension $|I|-1$ dont les coordonnées homogènes sont indexées par les éléments de I , et où il n'y a plus de restriction de hauteur sur $I \subset \Gamma$].

d) Description de l'éclatement désingularisant

$$(\mathcal{C}^p - \Gamma^\Delta) \hookrightarrow \mathcal{C}^p \times_{\prod_{I \subset \Gamma} \bar{P}^{I-1}} \pi, \quad t_\Gamma \mapsto t_\Gamma \times (t_I^\Gamma)_{I \subset \Gamma}$$

Dans les deux cas on obtient une situation en drapeaux.

- Soit $x = t_\Gamma \times (t_I)_{I \subset \Gamma} \in \mathcal{C}^p \times_{\prod_{I \subset \Gamma} \bar{P}^{I-1}} \pi$; alors :

$$(x \in \tilde{\mathcal{C}}(\Gamma)) \Leftrightarrow [\forall I \subset J \subset \Gamma, \exists \lambda = \lambda(I, J) \in \mathcal{C}, t_I^J(x) = \lambda(x) t_I(x)]$$

- Soit $\Gamma = \{1, 2, \dots, |\Gamma| = p\}$

- Soit $\Gamma \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_r$, la filtration associée à $x \in \tilde{\mathcal{C}}(\Gamma)$

$$\begin{array}{llll} \text{définie par} & I_1 \subset \Gamma & \text{le plus grand tel que} & 0 = \lambda(I_1, \Gamma) \equiv \lambda_1 \\ & I_2 \subset \Gamma & " & " & " & 0 = \lambda(I_2, I_1) \equiv \lambda_2 \\ & \vdots & & & & \\ & I_r \subset I_{r-1} & " & " & " & 0 = \lambda(I_r, I_{r-1}) \equiv \lambda_r \end{array}$$

On suppose que $1 \in I_1, 2 \in I_2, \dots, r \in I_r$.

On pose $I'_1 = I_1 - \{1\}, I'_2 = I_2 - \{2\}, \dots, I'_r = I_r - \{r\}$.

Alors $\tilde{\mathcal{C}}(\Gamma)$ est localement isomorphe en x au produit :

$$\mathcal{C}(\Gamma - I'_1) \times \bar{P}^{I_1 - I_2} \times \bar{P}^{I_2 - I_3} \times \dots \times \bar{P}^{I_{r-1} - I_r},$$

l'isomorphisme local étant donné par :

$$t_\Gamma \times (t_I)_{I \subset \Gamma} \mapsto (t_{\Gamma - I_1}^\Gamma, t_1^\Gamma) \times (t_{I_1 - I_2}^{I_1}, t_2^{I_1}) \times \dots \times (t_{I_{r-1}}^{I_{r-1}}, t_r^{I_{r-1}})$$

[On note que, à droite, seuls $t_1^\Gamma, t_2^{I_1}, \dots, t_r^{I_{r-1}}$ sont nuls en x,

donc le produit $t_1^{I_1} \times t_2^{I_2} \times \dots \times t_r^{I_r}$ est non nul en x ;]

De plus on a les relations de Chasles suivantes :

$$t_1^\Gamma = t_1^{I_1} \lambda(I_1, \Gamma), \quad t_2^{I_1} = t_2^{I_2} \lambda(I_2, I_1), \dots, t_r^{I_{r-1}} = t_r^{I_r} \lambda_r$$

Une carte locale en x est donnée en imposant :

$$t_1^{I_1} = t_2^{I_2} = \dots = t_r^{I_r} = 1.$$

Les coordonnées locales en x sont encore indexées par Γ (indice du bas)

$$W = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \quad t_{\Gamma-I_1}^\Gamma, \quad t_{I_1'-I_2}^{I_1}, \quad t_{I_2'-I_3}^{I_2}, \dots, \quad t_{I_r'} \in W$$

(**) ||| [Pour l'éclatement total, seuls $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ et λ_r sont nuls en x ;
pour l'éclatement trois, $t_{I_r'}$ est éventuellement nul en x].

L'injection totale $(\mathcal{C}(\Gamma) - \Gamma\Delta) \hookrightarrow W$ dans la carte locale en x est donnée par l'égalité vectorielle (en $\mathcal{C}(\Gamma)$)

$$(t_\Gamma) = (t_{\Gamma-I}^\Gamma, \lambda_1 t_{I_1'-I_2}^{I_1}, \lambda_1 \lambda_2 t_{I_2'-I_3}^{I_2}, \dots, \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r \times t_{I_r'})$$

[toujours avec la contrainte $t_1^{I_1} = t_2^{I_2} = \dots = t_r^{I_r} = 1$]

[autres coordonnées locales (Westwater) ; dans le système précédent de coordonnées locales $W \subset \mathcal{C}(\Gamma)$, la remarque (**) montre que $W(x)$ se trouve soit hors de l'union $\Gamma - \{1, \dots, r\}^\Delta$ (cas total), soit hors de l'union $\Gamma - (\{1, \dots, r\} \cup I_r)^\Delta$ (cas trois).

Donc au lieu des coordonnées locales :

$$W = (\lambda, t) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, t_{\Gamma-I_1}^\Gamma, t_{I_1'-I_1}^{I_1}, \dots, t_{I_r'}) \in W, \quad I_i' = I_i - i$$

On peut prendre pour coordonnées locales (par exemple pour le cas total)

$$W = (\lambda, t) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dot{t}_{\Gamma-I_1}^{\Gamma}, \dot{t}_{I_1'-I_2}^{I_1}, \dots, \dot{t}_{I_r'}^{\Gamma}) \in \dot{W}$$

[où $\forall t_i \in \emptyset - \{\Delta\}$, $\dot{t}_i = \frac{1}{t_i}$].

4.4. La désingularisation de $\overline{\varepsilon\Sigma}^1(B) \cap \emptyset^1(\Gamma)$ dans $\emptyset^1(\Gamma)$

La compactification en P.G. dans le cas des monovecteurs

Soit $\tilde{C}(\Gamma) \rightarrow \emptyset(\Gamma)$, l'éclatement total déjà décrit comme étant la projection sur le premier facteur $\emptyset(\Gamma)$ de la fermeture de l'injection totale : $(\emptyset(\Gamma) - \Gamma^\Delta) \xrightarrow[\text{total}]{} \emptyset(\Gamma) \times_{\substack{\pi \\ I \subset \Gamma}} \bar{P}^{I-1}, t_\Gamma \mapsto t_\Gamma \times (t_I^\Gamma)_{I \subset \Gamma}$

Soit $\mathfrak{s} \hookrightarrow Y \hookrightarrow \emptyset(\Gamma)$, une filtration de $\mathbb{C}(\Gamma)$, l'injection totale en donne dans $\tilde{\emptyset}(\Gamma)$ une image (partielle) dont la fermeture est la transformée stricte $\tilde{\mathfrak{s}} \rightarrow \tilde{Y} \rightarrow \tilde{\emptyset}(\Gamma)$ sous l'éclatement.

Théorème 2

(1) Le diagramme des transformées strictes du triplet du bas :

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma \tilde{Q} & \hookrightarrow & \overline{\varepsilon\Sigma}^1(B) & \hookrightarrow & \tilde{\emptyset}(\Gamma) & ; & \emptyset(\Gamma) \times_{\substack{\pi \\ I \subset \Gamma}} \bar{P}^{I-1} & ; & t_\Gamma \times (t_I^\Gamma)_{I \subset \Gamma} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \Gamma Q & \hookrightarrow & \varepsilon\Sigma^1(B) & \hookrightarrow & \emptyset(\Gamma) & ; & \emptyset(\Gamma) - \Gamma^\Delta & ; & t_\Gamma \end{array}$$

sous l'éclatement total $\tilde{\emptyset}(\Gamma) \rightarrow \emptyset(\Gamma)$, est une désingularisation :

- (i) du couple $\overline{\varepsilon\Sigma}^1(B) \cap \emptyset^1(\Gamma) \hookrightarrow \emptyset^1(\Gamma)$
- (ii) et de la famille ΓQ des sections de $\overline{\varepsilon\Sigma}^1(B)$ par les hyperplans :

$$K_j : 1 + m_j^2 t_j^2 = 0 \quad (m_j^2 \neq 0, j \in \Gamma).$$

- (2) L'éclatement trois suffit à l'obtention du même résultat si $\overline{\varepsilon\Sigma}^1(B)$ est de codimension un dans $\mathcal{C}^1(\Gamma)$.
- (3) L'éclatement trois suffit à l'obtention du même résultat, en fait, même lorsque $\overline{\varepsilon\Sigma}^1(B)$ est de codimension strictement plus grande que un dans $\mathcal{C}^1(\Gamma)$.

Corollaire : Compactification en P.G. de l'intégrale

Soit $Z = \varepsilon\Sigma^1(B)$ l'espace d'intégration de départ.

Soit $\widetilde{\Sigma}^1(\Gamma) \rightarrow \bar{\Sigma}^1(\Gamma)$, l'éclatement [principalement décrit comme] prolongeant l'identité de $\mathcal{C}_\tau(\Gamma)$ et l'éclatement trois $\widetilde{\mathcal{C}}_\sigma(\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}_\sigma(\Gamma)$ de $\mathcal{C}_\sigma(\Gamma)$.

Soit $X = \widetilde{\varepsilon\Sigma}^1(B)$, la transformée stricte de $\overline{\varepsilon\Sigma}^1(B) \subset \bar{\Sigma}^1(\Gamma)$.

Soit $T = \Sigma^1(E)$ l'espace des paramètres.

Alors $X \times T \rightarrow T$ est une compactification de la projection $Z \times T \rightarrow T$.

C'est une compactification réelle, algébrique, régulière et en

Position Générale si le graphe est assez convergent.

Les nouvelles variétés polaires $\mathfrak{s}_j \subset X \times T$ sont en (P.G.), et de partie réelle vide.

Preuve du corollaire

Si le graphe est assez convergent l'étude faite pour le théorème I (du V-II), montre que les variétés polaires sont sans partie réelle après la première compactification (singulière) $\bar{Z} = \overline{\varepsilon\Sigma}^1(B)$.

Sous la 2ème compactification décrite, l'intégrand reste inchangé en forme, seul le cycle d'intégration est remonté de $\bar{Z}$ dans X (c'est $X(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$) sous $X \rightarrow \Sigma$.

Cette 2ème compactification décrite n'est autre que l'image inverse par $T \hookrightarrow \bar{\Sigma}^1(E)$, de la projection de la compactification totale

(ie par $\underline{\underline{\theta}}$, au lieu de $\underline{\underline{\varepsilon}}$), or les nouvelles surfaces polaires $s_j \subset X \times T$ ne sont autres que la partie $\widetilde{\Gamma Q}$ de la famille des $\widetilde{J Q}$ (pour $\underline{\underline{\theta}}$)
(Cf. V-1 : proposition d'équivalence entre $\underline{\underline{\theta}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$).]]

Démonstration du théorème

Il est instructif d'examiner d'abord le cas (2) d'une seule équation, puis le cas général (1), puis le cas (3).

Preuve de (2)

$\overline{\varepsilon \Sigma^1(B)} \subset \mathcal{C}^1(\Gamma)$, c'est-à-dire l'hypersurface $\varepsilon(p)f$, est alors donné par la seule équation :

$$f = \sum_i t_1 t_2 \dots \hat{t}_i \dots t_p = 0$$

[on peut toujours supposer en effet que :

$$B = \{1, 2, \dots, p-1\} \subset \{1, 2, \dots, p\} = \Gamma \text{ et } \varepsilon_p = (\varepsilon_p^b) = -(1, 1, \dots, 1) \quad]$$

Nous remarquons d'abord en un point de $\mathcal{C}^1(\Gamma)$ où deux coordonnées au plus sont nulles, le triplet du bas est déjà non singulier.

[En effet la matrice $(\frac{\partial K_j}{\partial t_i})$ est diagonale et $\frac{\partial K_j}{\partial t_j} \neq 0$ sur $K_j = 0$.

si $t_1 = t_2 = 0$ et $t_j \neq 0$, $\forall j > 2$, les équations $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial t_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial t_2} = 0$ ne sont pas compatibles ;

si $t_1 = 0$ et $t_j \neq 0$ $\forall j > 1$, $f \neq 0$;

si $t_j \neq 0$ $\forall j$, le point est dans le domaine de la carte $\mathcal{C}_\tau(\Gamma)$ et là il y a (P.G.)]

Nous ramènerons à ce cas la situation en $x \in \widetilde{\varepsilon(p)}$ $f \subset \mathcal{C}(\Gamma)$.

Soit $\Gamma \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_r$, la filtration associée à $x \in \tilde{\mathcal{C}}(\Gamma)$

$$\begin{array}{ccccccc} & \phi & & \phi & & & \phi \\ & 1 & & 2 & & & r \end{array}$$

Soit $w = (\lambda, t) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, t_{\Gamma-I_1}^{\Gamma}, t_{I_1'-I_2}^{I_1}, t_{I_2'-I_3}^{I_2}, \dots, t_{I_r}^{I_r}) \in W$, la carte locale en x de $\tilde{\mathcal{C}}(\Gamma)$; $w(x) = (0, t(x))$.

Sous l'injection qui la complète $(\mathcal{C}(\Gamma) - \Gamma^\Delta) \hookrightarrow W$,

[donnée par $(t_\Gamma) = (t_{\Gamma-I_1}^{\Gamma}, \lambda_1 t_{I_1'-I_2}^{I_1}, \dots, \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r t_{I_r}^{I_r})$

avec $t_1^{I_1} = t_2^{I_2} = \dots = t_r^{I_r} = 1]$,

le produit $\pi_\Gamma t^\Gamma = t_1 t_2 \dots t_r$, devient :

$$(\lambda_1)^{I_1} (\lambda_2)^{I_2} \dots (\lambda_r)^{I_r} \cdot \pi_{\Gamma-I_1} t^\Gamma \cdot \pi_{I_1-I_2} t^{I_1} \dots \pi_{I_r} t^{I_r}.$$

De même la somme $\sum_{i \in \Gamma} (\pi_{\Gamma-i} t^\Gamma) = \sum_{i \in \Gamma} t_1 \dots \hat{t}_i \dots t_r$, devient

$$f \equiv R \cdot g \equiv R \cdot \pi_t t \cdot \left(\sum_{I_r} + \lambda_r \sum_{I_{r-1}-I_r} + \dots + \lambda_r \lambda_{r-1} \dots \lambda_1 \sum_{\Gamma-I_1} \right) \left(\frac{1}{t} \right)$$

$$\text{où } R = (\lambda_1)^{I_1'} \cdot (\lambda_2)^{I_2'} \dots (\lambda_r)^{I_r'} \cdot \pi_{\Gamma \supset I_1 \supset I_2 \dots \supset I_r / I_r} (t).$$

est inversible dans l'image $W - \Delta$ de $\mathcal{C}(\Gamma) - \Gamma^\Delta$;

[image définie localement en x par $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r \pi_{I_r'} t^{I_r} \neq 0]$

A ce point il est utile de noter que $\pi_{\Gamma \supset I_1 \supset \dots \supset I_r / I_r} (t)$ est non nul en x donc inversible.

La fermeture $\widetilde{\varepsilon(1)f} \subset \widetilde{\mathcal{C}(\Gamma)}$ de $\varepsilon(1)f$, a donc localement en x , l'équation $g = 0$ ie

$$0 = g(\lambda, t) \equiv \pi_{I_r} t \cdot \left(\sum_{I_r} + \lambda_r \sum_{I_{r-1}-I_r} + \dots + \lambda_r \lambda_{r-1} \dots \lambda_1 \sum_{\Gamma-I_1} \right) \left(\frac{1}{t} \right)$$

Dressons le tableau des expressions de g et de ses dérivées partielles

$g_i = \frac{\partial g}{\partial w_i}$ par rapport aux coordonnées locales en x : $w = w_\Gamma = (\lambda, t)$

$$\begin{aligned}
 g &\equiv \frac{\pi}{I_r} t^{I_r} \cdot \left(\frac{\Sigma}{I_r} + \lambda_r \frac{\Sigma}{I_{r-1} - I_r} + \dots + \lambda_r \lambda_{r-1} \dots \lambda_1 \frac{\Sigma}{\Gamma - I_1} \right) \left(\frac{1}{t} \right) \\
 g_s &\equiv \frac{\pi}{I_{r-s}} t^{I_r} \cdot \left(\frac{\Sigma}{I_{r-s}} + \lambda_r \frac{\Sigma}{I_{r-1} - I_r} + \dots + \lambda_r \lambda_{r-1} \dots \lambda_1 \frac{\Sigma}{\Gamma - I_1} \right) \left(\frac{1}{t} \right) \\
 g_r &= \frac{\partial g}{\partial \lambda_r} \equiv \frac{\pi}{I_r} t^{I_r} \cdot \left(0 + \frac{\Sigma}{I_{r-1} - I_r} + \dots + \lambda_{r-1} \dots \lambda_1 \frac{\Sigma}{\Gamma - I_1} \right) \left(\frac{1}{t} \right) \\
 g_{r-1} &= \frac{\partial g}{\partial \lambda_{r-1}} \equiv \frac{\pi}{I_r} t^{I_r} \cdot \left(0 + 0 + \lambda_r \frac{\Sigma}{I_{r-2} - I_{r-1}} + \dots + \lambda_r \hat{\lambda}_{r-1} \dots \lambda_1 \frac{\Sigma}{\Gamma - I_1} \right) \left(\frac{1}{t} \right) \\
 g_1 &= \frac{\partial g}{\partial \lambda_1} \equiv \frac{\pi}{I_r} t^{I_r} \cdot \left(0 + 0 + 0 + \dots + \lambda_r \lambda_{r-1} \dots \hat{\lambda}_1 \frac{\Sigma}{\Gamma - I_1} \right) \left(\frac{1}{t} \right) \\
 g_{\hat{a}} &= \frac{-\partial g}{\partial t_a} \equiv \frac{\pi}{I_r} t^{I_r} \cdot \left(0 + \lambda_r \lambda_{r-1} \dots \lambda_{j+1} + 0 \right)
 \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à conclure :

Dans l'hypersurface $\lambda_r = 0$ de W , g et g_s ($s \in I'_r = I_r - \{r\}$) ont pour équations :

$$\begin{aligned}
 g \Big|_{\lambda_r=0} &\equiv \frac{\pi}{I_r} t^{I_r} x \frac{\Sigma}{I_r} \frac{1}{t} = 0, \quad (t_r^{I_r} = 1) \\
 g_s \Big|_{\lambda_r=0} &\equiv \frac{\pi}{I_{r-s}} t^{I_r} x \frac{\Sigma}{I_{r-s}} \frac{1}{t} = 0
 \end{aligned}$$

Ces équations ne dépendent que de la variable t_{I_r} .

Dans $\mathcal{C}(I_r)$, nous retrouvons l'hypersurface de départ (où Γ a été remplacé par I_r) ou plus exactement la section de ce cône par l'hyperplan $t_r^{I_r} = 1$, et les équations de ses dérivées.

Nous savons qu'elles sont incompatibles si au plus deux coordonnées de $\mathcal{C}(I_r)$ sont nulles, or c'est le cas en x (ie pour $t_{I_r}(x)$), même si nous n'avons opéré que l'éclatement trois car alors $t_{I_r}(x) \in \mathcal{C}(I_r)$ a au plus deux coordonnées non nulles. g a donc au moins une dérivée partielle non nulle en x .

(2)(i) est donc établi : x est donc un point non singulier de l'hyper-surface $\widetilde{\varepsilon(1)f}$ que g définit ; or c'est un point quelconque de $\widetilde{\varepsilon(1)f}$]].

Enfin, puisque $m_j^2 \neq 0$, notre x n'est pas sur les $0 = K_j \equiv 1 + t_j^2 m_j^2$ tels que $j \in I_1$;

De plus, les autres dérivées $g_i = \frac{\partial g}{\partial w_i}$, $i \in \Gamma - I_r$ s'annulent en x (puisque $\lambda(x) = 0$) ; ceci est vrai notamment si $i \notin I_1$.

Ceci [ajouté à $\frac{\partial K_i}{\partial t_j}$ est diagonale et $\frac{\partial K_i}{\partial t_i} \neq 0$ sur $K_i = 0$] achève de démontrer que $\Gamma^{\widetilde{Q}}$ est une famille d'hypersurfaces non singulières et en (P.G.) dans $\widetilde{\varepsilon\Sigma^1(B)}$.

(2)(ii) est donc établi.

Preuve de (1)

- Une simplification par rapport à la preuve de (2) est introduite par l'emploi de l'éclatement total (au lieu de l'éclatement trois) ce qui linéariserait totalement en t .

- Une complication par rapport à la preuve de (2) est due à la non égalité générale des fermetures : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, soit ici : les hypersurfaces $\widetilde{\varepsilon(\gamma)f} \subset \widetilde{\mathcal{C}(\Gamma)}$, $\gamma \in (\Gamma - B)$ sont non singulières mais ne sont pas en (P.G.), leur intersection est donc singulière, mais contient $\widetilde{\varepsilon\Sigma^1(B)}$ comme composante irréductible et non singulière.

Deux matrices $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{\varepsilon}'$ sur $L \times \Gamma$ sont ligne-équivalentes, si $\underline{\varepsilon}'$ se déduit de $\underline{\varepsilon}$ par une succession d'opérations élémentaires de type ligne, à savoir :

1. échange de deux lignes quelconques
2. multiplication d'une ligne par un scalaire inversible
3. addition d'une ligne à une autre.

$$\left(\begin{array}{cccccccc} & \mathbf{g}_1 & < & \mathbf{g}_2 & < & \mathbf{g}_3 & < & \mathbf{g}_4 & < & \mathbf{g} \mid \Gamma\text{-B} \mid \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & 0 & \dots & 01 & \boxed{} & 0 & \boxed{} & 0 & \boxed{} & 0 & \boxed{} & 0 & \boxed{} & 0 & \boxed{} \\ & & & & & 1 & \boxed{} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \boxed{} \\ & & & & & & \boxed{} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \boxed{} \\ & & & & & & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & \boxed{} \\ & & & & & & & & & 1 & & 0 & & 0 & \boxed{} \\ & & & & & & & & & & & 0 & & 0 & \boxed{} \\ & & & & & & & & & & & \vdots & & 0 & \boxed{} \\ & & & & & & & & & & & & & 0 & \boxed{} \\ & & & & & & & & & & & & & 1 & \boxed{} \end{array} \right)$$
$$\{g_1 < g_2 < g_3 < \dots < g_{(\Gamma-B)}\} \subset \Gamma$$

Preuve : [Milnor, Cf. Ehresmann, Ann. Math. 35 (1934) p. 396].

Remarque : Une altération de l'ordre des colonnes est :

- (1) sans effet sur le type d'échelon si elle est intérieure à un intervalle ouvert $] g_n, g_{n+1} [$,
- (2) sans effet apparent sur le type d'échelon (qui reste caractérisé par la même suite $g_1, g_2, \dots$) si elle est intérieure à un intervalle semi-ouvert $] g_n, g_{n+1}]$.

(a) Cherchons l'équation locale de x , dans W , de $\widetilde{\varepsilon(\gamma)}f$.

Hors de Γ^Δ , $\varepsilon(\gamma)f$ a pour équation : $\sum_{\varepsilon(\gamma) \cap \Gamma} \left(\frac{1}{t}\right) = 0$ où $t_\Gamma \in \mathcal{C}(\Gamma) - \Gamma^\Delta$.

Or localement en x , l'injection totale est : $\mathcal{C}(\Gamma) - \Gamma^\Delta \hookrightarrow W$

donnée par : $(t_\Gamma) = (t_{\Gamma-I_1}^\Gamma, \lambda_1 t_{I_1-I_2}^{I_1}, \dots, \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r t_{I_r}^{I_r})$

[avec $t_1^{I_1} = \dots = t_r^{I_r} = 1$]

$\widetilde{\varepsilon(\gamma)}f$ est donc la fermeture dans W des zéros (lorsque $\lambda_1 \dots \lambda_r \neq 0$) de :

$$(1) \quad \left| \left(\varepsilon(\gamma) \cap I_r^\Sigma + \lambda_r \varepsilon(\gamma) \cap (I_{r-1} - I_r)^\Sigma + \dots + (\lambda_r \lambda_{r-1} \dots \lambda_1) \varepsilon(\gamma) \cap (\Gamma - I_1)^\Sigma \right) \left(\frac{1}{t}\right) \right|$$

soit $h(\gamma) \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$ le plus grand indice tel que $\varepsilon(\gamma) \cap I_h \neq \emptyset$;

$\widetilde{\varepsilon(\gamma)}f$ irréductible comme $\varepsilon(\gamma)f$, a donc pour équation locale :

$$(2) \quad \widetilde{\varepsilon(\gamma)}f \left| \left(\varepsilon(\gamma) \cap I_h^\Sigma + \lambda_h \varepsilon(\gamma) \cap (I_{h-1} - I_h)^\Sigma + \dots + \lambda_h \lambda_{h-1} \dots \lambda_1 \varepsilon(\gamma) \cap (\Gamma - I_1)^\Sigma \right) \left(\frac{1}{t}\right) \right| = 0$$

comme $x \in \widetilde{\varepsilon(\gamma)}f$, l'équation ci-dessus est vérifiée en x , mais $\lambda(x) = 0$

et $t(x)$ est inversible, donc t_{I_h} vérifie :

$$(\varepsilon(\gamma) \cap I_h)f : \text{ie } \sum_{\varepsilon(\gamma) \cap I_h} \frac{1}{t} = 0 \quad \text{où } h = h(\gamma)$$

comme t est inversible en x , il est commode de considérer ces équations

en t comme linéaires en $\frac{1}{t}$

- (b) Pour étudier la position relative en x , on examine la matrice des valeurs en x des dérivées partielles par rapport à $\dot{w} = (\lambda, \dot{t})$ des équations locales des $\widetilde{\varepsilon}(\gamma)f$ quand $\gamma \in (\Gamma - B)$.

A chaque $\gamma \in \Gamma - B$ correspond une ligne de cette matrice, celle des dérivées partielles en x de $\widetilde{\varepsilon}(\gamma)f$ et qui est $\diamond$:

$$\varepsilon(\gamma) \cap I'_h + \lambda_h \varepsilon(\gamma) \cap (I'_{h-1} - I_h) + \dots + \lambda_h \dots \lambda_1 \varepsilon(\gamma) \cap (\Gamma - I_1)$$

pour la partie dérivées par rapport à $\dot{t}$,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} = 0 \text{ pour } i > h, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_h} = \varepsilon(\gamma) \cap (I'_{h-1} - I_h) \dot{t}(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_{h-1}} = \lambda_{h-1} \varepsilon(\gamma) \cap (I'_{h-1} - I_{h-1}) \dot{t}(x), \dots$$

pour la partie dérivée par rapport à λ .

Mais en x , $\lambda(x) = 0$, et la valeur de cette ligne est en fait portée par $\gamma \times I_h - I_{h+1}$ et vaut :

$$\varepsilon(\gamma) \cap I'_h, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_h} = \varepsilon(\gamma) \cap (I'_{h-1} - I_h) \dot{t}(x) \quad \text{où } h = h(\gamma), \quad I'_h = I_h - \{h\}$$

On reconnaît là la forme initiale de $\widetilde{\varepsilon}(\gamma)f$

La matrice sur $(\Gamma - B) \times \Gamma$, des valeurs de dérivées partielles en x des diverses $\widetilde{\varepsilon}(\gamma)f$, $\gamma \in \Gamma - B$, ie la matrice dont les lignes sont $(\varepsilon(\gamma) \cap I'_h, \varepsilon(\gamma) \cdot \dot{t}(x) \cap (I'_{h-1} - I_h))$, n'est en général pas de rang $\Gamma - B$;

- $\diamond$ Ici notre matrice $\underline{\varepsilon}$ est la matrice d'incidence complétée par les $\varepsilon_\gamma^\gamma = 1$ c'est une matrice sur $(\Gamma - B) \times I$ dont les lignes sont encore notées $\varepsilon(\gamma)$ et dont la restriction à $\gamma \times I_h \subset (\Gamma - B) \times \Gamma$ est encore notée $\varepsilon(\gamma) \cap I_h$.

Les $\varepsilon(\gamma)f$ ne sont pas en position générale en x dans $\tilde{\mathcal{C}}(\Gamma)$, leur intersection est singulière.

- (c) Heureusement leur intersection n'est pas non plus $\tilde{\varepsilon\Sigma}^1(B)$ mais la contient seulement.

$\tilde{\varepsilon\Sigma}^1(B)$ est la fermeture dans W de l'injection totale de $\overline{\varepsilon\Sigma}^1(B) - \Gamma^\Delta$ dans $W - \Delta$.

$\overline{\varepsilon\Sigma}^1(B)$ est l'intersection des $\varepsilon(\gamma)f$, lorsque γ parcourt $\Gamma - B$, cette intersection ne dépend que de l'idéal engendré par les $\varepsilon(\gamma)f$ et reste inchangée lorsqu'on remplace l'équation d'une des $\varepsilon(\gamma)f$ par son produit par un inversible ou par sa somme avec une autre.

L'injection totale de $\overline{\varepsilon\Sigma}^1(B) - \Gamma^\Delta$ reste inchangée par cette opération. Cependant, l'injection totale $\varepsilon(\gamma)f - \Gamma^\Delta$ subit la même opération.

En fin de compte la matrice des dérivées partielles par rapport à $\dot{W} = (\lambda, \dot{t})$ subit une opération ligne et il en est de même de la matrice $\underline{\varepsilon}$.

Munissons Γ d'un ordre total compatible à

$$I'_r < \{r\} < I'_{r-1} - I_r < \{r-1\} < \dots < I'_1 - I_2 < \{1\} < \Gamma - I_1.$$

Effectuons le passage de $\underline{\varepsilon}$ à l'échelon $\underline{\varepsilon}'$ pour cet ordre sur Γ .

Effectuons sur les $(\varepsilon(\gamma)f - \Gamma^\Delta)$, $\gamma \in (\Gamma - B)$, sous la forme (1) (ie normalisée) de leurs équations, la succession même des opérations ligne qui font passer de $\underline{\varepsilon}$ à $\underline{\varepsilon}'$.

Nous obtenons ainsi des hypersurfaces $(\varepsilon'(\gamma)f - \Gamma^\Delta)$, $\gamma \in \Gamma - B$ dont l'intersection est encore $\tilde{\varepsilon\Sigma}^1(B) - \Gamma^\Delta$, et dont les équations (sous la forme (1) ou sous la forme (2)), sont bâties à partir de $\underline{\varepsilon}'$ comme les précédentes l'étaient à partir de $\underline{\varepsilon}$. Leurs fermetures $\varepsilon'(\gamma)f$ ont pour équations :

$$(3) \quad \varepsilon'(\gamma)f : \left(\varepsilon'(\gamma) \cap I_H^\Sigma + \lambda_{h'} \varepsilon'(\gamma) \cap I_{h'-1}^\Sigma + \dots + \lambda_{h'} \lambda_{h'-1} \dots \lambda_1 \varepsilon'(\gamma) \cap (\Gamma - I_1)^\Sigma \right) \left(\frac{1}{t} \right) = 0$$

où $h' = h'(\gamma) =$ le plus grand indice tel que $\varepsilon'(\gamma) \cap I_{h'} \neq \emptyset$

Proposition : les hypersurfaces (3)

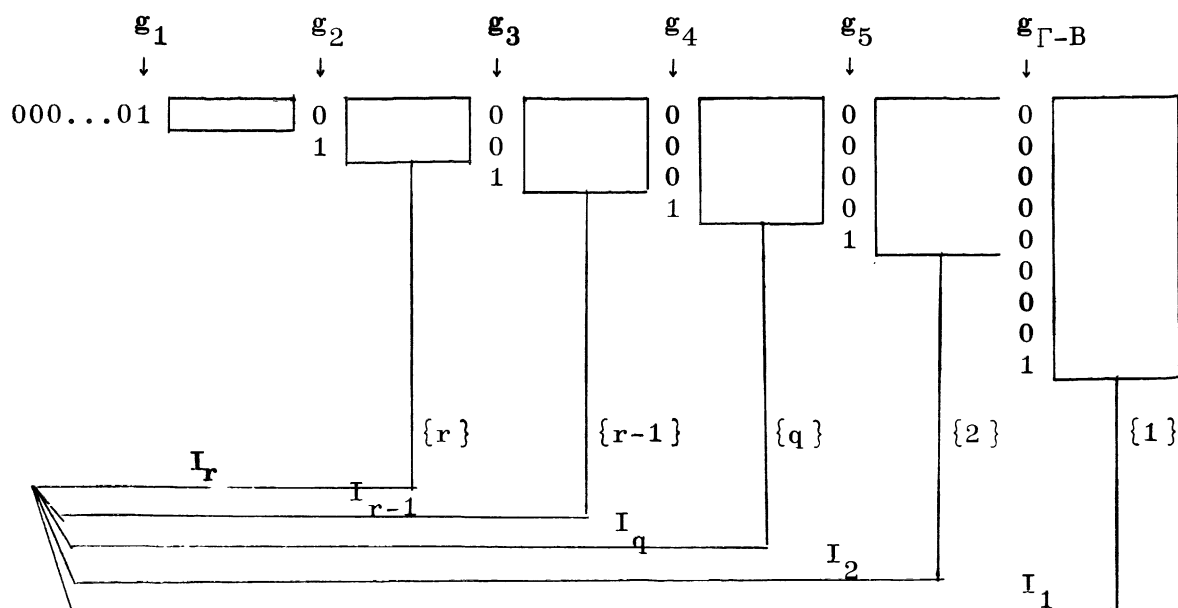
- (i) sont en Position Générale en (x) ,
- (ii) sont en Position Générale en (x) avec les $0 \equiv K_j \equiv 1 + m_j^2 t_j^2$

Corollaire : $\widetilde{\varepsilon\Sigma}^1(B)$ est non singulière, et les ${}_{\Gamma}\widetilde{Q}$ sont en (P.G.) dans $\widetilde{\varepsilon\Sigma}^1(B)$.

[Preuve du corollaire : près de (x) l'intersection des hypersurfaces (3) est irréductible, non singulière, de dimension $|B|$, et contient $\widetilde{\varepsilon\Sigma}^1(B)$, de dimension $|B|$ aussi, donc lui est égale].

Preuve : Il suffit de montrer que la matrice des valeurs en x des dérivées partielles des $\varepsilon'(\gamma)f$ est une matrice échelon du même type que $\underline{\varepsilon}$ ie du type $\{g_1 < g_2 < \dots < g_{\Gamma-B}\} \subset \Gamma$, car, son rang sera alors $|\Gamma-B|$, ce qui entraîne (i).

Surimposons à $\underline{\varepsilon}'$, la filtration $I_r \subset I_{r-1} \subset \dots$, on obtient :



La matrice des valeurs en x des dérivées partielles des $\varepsilon'(\gamma)f$, s'obtient

(1) en remplaçant par des zéros tout ce qui est à droite de la colonne $\{q\}$

dans les lignes coupant le rectangle rencontré par $\{q\}$;

(2) en remplaçant sur cette colonne $\{q\}$ les éléments du rectangle par

$$\varepsilon'(\gamma) \cap I_{q-1} - I_q \quad \dot{t}(x) \quad .$$

Cette matrice sera du même type que $\underline{\varepsilon}'$ si les deux sous-ensembles de Γ :

$\{g_1, g_2, \dots, g_{\Gamma-B}\}$ et $\{1, 2, \dots, r\}$ n'ont aucun point commun.

Or il en est bien ainsi, car si, par exemple, $g_\gamma = \{h\}$,

alors $\varepsilon'(\gamma) \cap I_h = \{h\}$, et l'équation de $\varepsilon'(\gamma)f$ qui est

$$\pm \dot{t}_h^I + \lambda_h(\Sigma \dots) \dot{t} = 0 \quad \text{ie} \quad \pm 1 + \lambda_h(\Sigma \dots) \dot{t} = 0$$

ne serait pas vérifiée en x (où $\lambda_h(x) = 0$), ce qui contredit $x \in \widetilde{\varepsilon\Sigma}^1(B)$

et prouve (i).

La preuve de (ii) reste inchangée : en un point (x) où $K_j = 0$ passe, $j \notin I_1$ (car $\dot{t}_j^2 = \frac{1}{2} \neq 0$), de plus $\frac{\partial K_i}{\partial \dot{t}_j}$ est diagonale et

$$\frac{\partial K_j}{\partial \dot{t}_j} \neq 0 \text{ sur } K_j = 0, \text{ or } \frac{\partial \varepsilon'(\gamma)f}{\partial \dot{t}_j} = 0 \text{ si } \varepsilon'(\gamma) \cap I_1 \neq \emptyset$$

De plus on sait en passant en $\mathcal{C}_\tau(\Gamma)$, que les $K_j = 0$ et les $\varepsilon'(\gamma)f = 0$ tels que $j \notin I_1$ et $\varepsilon'(\gamma) \cap I_1 = \emptyset$ sont en P.G.]]

Preuve de (3) : c'est pour alléger l'écriture que nous avons séparé la preuve de (3) de celle de (1).

Il faut maintenant tenir compte du fait que $\dot{t}^I$ peut avoir deux composantes nulles ; soient i_1 et i_2 les indices de ces composantes.

Dans le choix de l'ordre total sur Γ , précisons que i_1 et i_2 sont les deux plus petits éléments, puis procédons exactement comme il est fait dans la preuve de (1).

Nous aboutissons à un système (4) d'équation $\varepsilon'(\gamma)g$ indexées par $\gamma \in \Gamma - B$ qui est le système (3) modifié comme suit :

$$(4) \quad (a) \quad \text{si } \varepsilon'(\gamma) \cap I_r = \emptyset \quad \text{alors } \varepsilon'(\gamma)g \equiv \varepsilon'(\gamma)f \quad ;$$

$$(b) \quad \text{si } \varepsilon'(\gamma) \cap I_r \neq \emptyset \quad \text{alors } \varepsilon'(\gamma)g = \left(\pi_{\varepsilon'(\gamma) \cap I_r}^I \right) \cdot \varepsilon'(\gamma)f$$

Pour conclure à la (P.G.) on se rapporte d'abord au §4.2 qui montre que le système (4)(b) est en (P.G.) en x

[le cas désagréable s'excluant de lui-même grâce à la construction de $\underline{\varepsilon}'$]
 puis on se rapporte à la preuve de (1), qui montre que le système total est en (P.G.).]]

5. Les singularités de $\overline{\varepsilon \Sigma}^n(B) \subset \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$

Notation : $z, \underline{z}, \dot{z}$; $z_\Gamma, \underline{z}_\Gamma, \dot{z}_\Gamma$; $z_\Gamma^\Gamma, \underline{z}_\Gamma^\Gamma, \dot{z}_\Gamma^\Gamma$; $(\underline{z}_\Gamma)^2$; $\varepsilon(\gamma)\underline{h}$.

$\underline{z} \in \mathcal{C}_\sigma^n$ et $\dot{z} \in \mathcal{C}_\tau^n$ représenteront le même point $z \in \bar{\Sigma}^n$,

[donc $\underline{z} = \dot{z}(\dot{z}^2)$ là où $\underline{z}$ et $\dot{z}$ sont simultanément définis ; nous écrirons alors soit $z = \underline{z}$, soit $z = \dot{z}$, mais nous éviterons d'écrire $\underline{z} = z = \dot{z}$][♦]

♦ Bien que $\bar{\Sigma}^n \subset \bar{P}^{n+1} \ni (\underline{z}, \sigma, \tau)$, définie par $\underline{z}^2 = \sigma\tau$, ne sont pas entièrement recouverte par les cartes :

$$\mathcal{C}_\sigma^n \rightarrow \bar{P}^{n+1}, \quad \underline{z} \mapsto (\underline{z}, \sigma = 1, \tau = \underline{z}^2)$$

$$\mathcal{C}_\tau^n \rightarrow \bar{P}^{n+1}, \quad \dot{z} \mapsto (\dot{z}, \sigma = \dot{z}^2, \tau = 1), \quad \text{pour le moment nous n'en tiendrons pas compte et travaillons dans } \bar{\Sigma}^n \cap (\mathcal{C}_\sigma^n \cup \mathcal{C}_\tau^n).$$

$\bar{\Delta}_\sigma$ et $\bar{\Delta}_\tau \subset \bar{\Sigma}^n$ seront les fermetures dans $\bar{\Sigma}^n$ de Δ_σ et Δ_τ

[d'équation respective $\underline{z}^2 = 0$ ou $\underline{\dot{z}}^2 = 0$].

Remarquons que $(\bar{\Sigma}^n - \bar{\Delta}_\sigma) \simeq \phi_\tau^n$ et que $\Omega_\sigma \in \Delta_\sigma$ et $\Omega_\tau \in \Delta_\tau$.

De même pour $I \subset \Gamma$, un point de $\bar{\Sigma}^n(I)$ se note z_I et sa projection naturelle sur $\bar{\Sigma}^n(I)$ se note z_I^Γ .

Pour souligner le fait que le point est dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma) - {}_\Gamma\bar{\Delta}_\sigma$, nous écrirons

$z_\Gamma = \underline{\dot{z}}_\Gamma$, (l'assimilant à son image dans ϕ_τ^n).

Si $z_\Gamma = \underline{z}_\Gamma$, alors $(\underline{z}_\Gamma)^2 = (\underline{z}_i^2)_{i \in \Gamma}$.

Enfin, si le point est dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma) - ({}_\Gamma\bar{\Delta}_\tau \cup {}_\Gamma\bar{\Delta}_\sigma)$ nous écrirons soit $z_\Gamma = \underline{z}_\Gamma$

soit $z_\Gamma = \underline{\dot{z}}_\Gamma$, mais nous éviterons d'écrire $\underline{z}_\Gamma = z_\Gamma = \underline{\dot{z}}_\Gamma$ et surtout d'en déduire l'égalité vectorielle fautive de $\underline{z}_\Gamma$ et $\underline{\dot{z}}_\Gamma$.

Soit $\varepsilon(\gamma)\underline{h} \subset \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$, la ϕ^n -hypersurface irréductible (et fermée) dont la ϕ^n -équation dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma) - {}_\Gamma\bar{\Delta}_\sigma$ est :

$$(\varepsilon(\gamma)\underline{h} - {}_\Gamma\bar{\Delta}_\sigma) : \quad \sum_{\varepsilon(\gamma)} (\underline{\dot{z}}_\Gamma) = 0, \quad (\underline{\dot{z}}_\Gamma \in \phi_\tau^n(\Gamma), \gamma \text{ fixe} \in \Gamma)$$

Alors $\overline{\varepsilon\Sigma}^n(B)$ est la fermeture dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ de l'intersection de $(\bar{\Sigma}^n(\Gamma) - {}_\Gamma\bar{\Delta}_\sigma)$ et des ϕ^n -hypersurfaces $\varepsilon(\gamma)\underline{h}$, $\gamma \in \Gamma - B$.

Proposition

Le couple $\overline{\varepsilon\Sigma}^n(B) \hookrightarrow \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ est régulier dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma) - \bigcup_{|J|=3} \bar{\Delta}_\sigma(J)$.

- ie un point z_Γ de $\overline{\varepsilon\Sigma}^n(B)$ n'est singulier que si au moins trois de ses composantes z_j , $j \in J$, $|J| \geq 3$, dans le produit $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ de sphères $\bar{\Sigma}^n$ sont dans le plan tangent $\bar{\Delta}_\sigma(j)$ au point $\Omega_\sigma(j)$ de compactification de la partie réelle $\text{Re } \bar{\Sigma}^n(j)$ du facteur $\bar{\Sigma}^n(j)$.

- ie $z_\Gamma \in \overline{\varepsilon\Sigma}^n(B)$, z_Γ singulier $\Rightarrow \exists J \subset \Gamma$, $|J| \geq 3$, $(\underline{z}_J)^2 = 0$.

• Pour souligner le fait que le point est dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma) - {}_\Gamma\bar{\Delta}_\tau$, nous écrirons $z_\Gamma = \underline{z}_\Gamma$ (l'assimilant à son image dans ϕ_σ^n).

Preuve : Soit $z_\Gamma \in \overline{\varepsilon \Sigma^n(B)} - \Gamma \Delta_\sigma$

5.1. On examine d'abord les singularités de chacune des $\varepsilon(\gamma)\underline{h} \subset \overline{\Sigma^n(\Gamma)}$

On fixe $B = \{1, 2, \dots, p-1\} \subset \Gamma = \{1, 2, \dots, p\}$, $\varepsilon_p = (\varepsilon_p^b) = -(1, \dots, 1)$

Alors la $\mathcal{C}^n$ -hypersurface est la fermeture $\varepsilon(p)\underline{h}$ dans $\overline{\Sigma^h(\Gamma)}$ de :

$$(A) \quad \dot{z}_1 + \dot{z}_2 + \dots + \dot{z}_{p-1} + \dot{z}_p = 0, \quad \dot{z}_\Gamma = (\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_p) \in \overline{\Sigma^n(\Gamma)} - \Gamma \bar{\Delta}_\sigma$$

Autrement dit : Soit $z_\Gamma \in \overline{\Sigma^n(\Gamma)}$ alors :

$$z_\Gamma \in \varepsilon(p)\underline{h} \Leftrightarrow z_\Gamma = z_\Gamma(\infty) = \text{point limite d'une suite } \dot{z}_\Gamma(s) \in (\varepsilon(p)\underline{h} - \Gamma \bar{\Delta}_\sigma)$$

(a) Si $\diamond I = \Gamma$, le point $z_\Gamma(\infty)$ est dans $\varepsilon(p)\underline{h} - \Gamma \bar{\Delta}_\sigma$, donc régulier.

(b) Si $\diamond I = \Gamma - \{p\}$, le point $z_\Gamma(\infty)$ est tel que $z_I^\Gamma(\infty) = \dot{z}_I(\infty)$.

Alors, d'après l'équation (A), $-\dot{z}_p(s) = \sum_{i \in I} \dot{z}_i(s)$, mais limite $\dot{z}_i(s) = \dot{z}_i^I(\infty)$. Donc $z_p(\infty) = \dot{z}_p(\infty) = - \sum_{i \in I} \dot{z}_i^I(\infty)$.

Donc $z_\Gamma(\infty) = \dot{z}_\Gamma(\infty)$, ie $z_\Gamma(\infty)$ est hors de $\Gamma \bar{\Delta}_\sigma$, donc régulier ;

et (A) reste l'équation locale en $z_\Gamma(\infty)$

(c) Si $\diamond I = \Gamma - \{p-1, p\}$, le point $z_\Gamma(\infty)$ est tel que $z_I^\Gamma(\infty) = \dot{z}_I(\infty)$.

Si $z_\Gamma(\infty)$ est limite de $\dot{z}_\Gamma(s)$, alors le raisonnement fait en (b) montre que l'on peut supposer que la suite $z_I^\Gamma(s)$ est stationnaire, ie $z_I^\Gamma(\infty) = \dot{z}_I(\infty) = \dot{z}_I(s)$.

L'équation (A) montre que $z_I^\Gamma(\infty)$ n'intervient que par la somme $\sum_{i \in I} \dot{z}_i(\infty)$ de ses τ -coordonnées. Nous pouvons donc supposer que $\dot{z}_I(\infty) = (\dot{z}_1, 0, 0, \dots, 0)$ et que $\dot{z}_\Gamma(s) = (\dot{z}_1, 0, \dots, 0, \dot{z}_{p-1}(s), \dot{z}_p(s))$.

♦ Dans la toute première ligne de cette page.

Nous allons chercher l'équation locale en $z_\Gamma(\infty)$ de $\varepsilon(p)\underline{h}$ puis nous montrerons que $z_\Gamma(\infty)$ est non singulier.

$$(A) \quad \text{s'écrit} \quad - \dot{\underline{z}}_p(s) = \dot{\underline{z}}_1 + \dot{\underline{z}}_{p-1}(s) \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$(A') \quad - \underline{z}_p(s) = [\dot{\underline{z}}_1(\underline{z}_{p-1}(s))^2 + \underline{z}_{p-1}(s)] (\underline{z}_p(s))^2 / (\underline{z}_{p-1}(s))^2$$

Soit $v(s) \in P^1$, le point du projectif P^1 de coordonnées homogènes :

$$v(s) = (\tau_p(s), \tau_{p-1}(s)) = ((\underline{z}_p(s))^2, (\underline{z}_{p-1}(s))^2) \in P^1$$

$$(A') \text{ s'écrit} \quad - \underline{z}_p(s) = [\dot{\underline{z}}_1(\underline{z}_{p-1}(s))^2 + \underline{z}_{p-1}(s)] v(s)$$

d'où en élevant au carré scalaire chaque membre :

$$v(s) = [1 + 2 \dot{\underline{z}}_1 \cdot \underline{z}_{p-1}(s) + (\dot{\underline{z}}_1)^2 (\underline{z}_{p-1}(s))^2] v^2(s)$$

d'où, en divisant par $v(s) \neq 0$,

$$(B') : \quad 1 = [1 + 2 \dot{\underline{z}}_1 \cdot \underline{z}_{p-1}(s) + (\dot{\underline{z}}_1)^2 (\underline{z}_{p-1}(s))^2] v(s)$$

[Ceci montre incidemment que $v(s)$ converge dans P^1 , sans qu'on ait même besoin de prendre une sous suite. On peut toujours supposer sa limite $v \neq \infty$].

De (A') et (B'), on tire l'équation :

$$(B) : \quad - \underline{z}_p(s) = [\dot{\underline{z}}_1(\underline{z}_{p-1}(s))^2 + \underline{z}_{p-1}(s)] / [1 + 2 \dot{\underline{z}}_1 \cdot \underline{z}_{p-1}(s) + (\dot{\underline{z}}_1)^2 (\underline{z}_{p-1}(s))^2]$$

Lemme : L'équation (B) est l'équation locale en $z_\Gamma(\infty)$ de $\varepsilon(p)\underline{h}$ (lorsqu'on ignore la paramétrisation par s) ; et $z_\Gamma(\infty)$ est régulier.

Premier cas : ou bien $z_{p-1}(\infty) = \dot{\underline{z}}_{p-1}(\infty)$ (e.g. $\underline{z}_{p-1}^2(\infty) \neq 0$) et l'équation (B) est alors équivalente à (A) en $z_\Gamma(\infty)$, mais alors la partie (b) termine la preuve dans ce cas.

Deuxième cas : $\underline{z}_{p-1}^2(\infty) = 0$; alors la limite est

$$z_{\Gamma}(\infty) = (\dot{\underline{z}}_1, \underline{z}_{p-1}(\infty), \underline{z}_p(\infty) = \underline{z}_{p-1}(\infty)/1 + 2 \dot{\underline{z}}_1 \cdot \underline{z}_{p-1}(\infty))$$

[et $\underline{z}_p(\infty)$ est colinéaire à $\underline{z}_{p-1}(\infty)$ donc aussi isotrope, et le rapport de colineation dépend de $\dot{\underline{z}}_1$ et de $\underline{z}_{p-1}(\infty)$].

L'équation (B) donne $\underline{z}_p$ en fonction de $\dot{\underline{z}}_1$ et $\underline{z}_{p-1}$, et pour prouver le lemme il suffit de montrer que la matrice jacobienne $\frac{D[\underline{z}_p]}{D[\dot{\underline{z}}_1, \underline{z}_{p-1}]}$ de cette application est de rang maximum en $z_{\Gamma}(\infty)$.

(B) équivaut à (A') et (B'), d'où, facilement :

$$\frac{D[\underline{z}_p]}{D[\dot{\underline{z}}_1]} = -2 \underline{z}_{p-1} \otimes \underline{z}_{p-1} + 0(\underline{z}_{p-1}^2)$$

(mais $\underline{z}_{p-1}^2(\infty) = 0$), dont le rang en $z_{\Gamma}(\infty)$ est au plus 1 (c'est la dimension sur $\mathcal{C}$) et

$$-\frac{D[\underline{z}_p]}{D[\underline{z}_{p-1}]} = \underbrace{\nu(s) [1 + 2 \dot{\underline{z}}_1 \otimes \underline{z}_{p-1} - \nu \underline{z}_{p-1} \otimes (2 \dot{\underline{z}}_1 + 1(\dot{\underline{z}}_1^2) \underline{z}_{p-1})]}_{= \underline{N}}$$

Pour montrer que le rang est maximum, il suffit de montrer que la matrice $\underline{N}$ n'a pas la valeur propre 1.

Or un vecteur propre de $\underline{N}$ est de la forme $\underline{\theta} = \alpha \dot{\underline{z}}_1 + \beta \underline{z}_{p-1}$

Montrons que $\underline{N} \underline{\theta} = \underline{\theta}$ est impossible, en calculant les deux membres.

• Soit $\underline{E} \in \mathcal{C}^n$, $\underline{F} \in \mathcal{C}^n$, $\underline{G} \in \mathcal{C}^n$, et $\underline{F} \cdot \underline{G}$ le produit scalaire euclidien et

$\underline{M} = \underline{E} \otimes \underline{F}$ la matrice $M_{ij} = E_i F_j$.

Alors $\underline{M}$ est la jacobienne de $\underline{G} \rightarrow \underline{H} = \underline{E}(\underline{F} \cdot \underline{G})$, ie $\frac{D[\underline{H}]}{D[\underline{G}]} = \underline{E} \otimes \underline{F}$

$$- \underline{\underline{N}} \underline{\underline{\theta}} = \begin{cases} 2 \underline{\underline{z}}_1 [\alpha \underline{\underline{z}}_{p-1} \cdot \underline{\underline{z}}_1 + \beta \underline{\underline{z}}_{p-1}^2] \\ + \\ - \nu 2 \underline{\underline{z}}_{p-1} [\alpha \underline{\underline{z}}_1^2 (1 + \underline{\underline{z}}_{p-1} \cdot \underline{\underline{z}}_1) + \beta (\underline{\underline{z}}_1 \cdot \underline{\underline{z}}_{p-1}) + \beta (\underline{\underline{z}}_1^2) (\underline{\underline{z}}_{p-1}^2)] \end{cases}$$

Tenant compte de $\underline{\underline{z}}_{p-1}^2(\infty) = 0$, la valeur de $- \underline{\underline{N}} \underline{\underline{\theta}}$ en $\underline{\underline{z}}_{\Gamma}(\infty)$ est :

$$- \underline{\underline{N}} \underline{\underline{\theta}} = \begin{cases} 2 \underline{\underline{z}}_1 [\alpha \underline{\underline{z}}_{p-1} \cdot \underline{\underline{z}}_1] \\ + \\ - \nu 2 \underline{\underline{z}}_{p-1} [\alpha \underline{\underline{z}}_1^2 (1 + \underline{\underline{z}}_{p-1} \cdot \underline{\underline{z}}_1) + \beta (\underline{\underline{z}}_1 \cdot \underline{\underline{z}}_{p-1})] \end{cases}$$

$$\text{et } \nu [1 + 2 \underline{\underline{z}}_1 \cdot \underline{\underline{z}}_{p-1}] = 1 \text{ en } \underline{\underline{z}}_{\Gamma}(\infty).$$

Alors l'équation $\underline{\underline{N}} \underline{\underline{\theta}} = \underline{\underline{\theta}}$ équivaut au système :

$$\begin{cases} \frac{\underline{\underline{\theta}}}{\nu} \underline{\underline{z}}_1 = 0 \\ \nu \underline{\underline{z}}_{p-1} [\beta - 2\alpha (1 + \underline{\underline{z}}_1 \cdot \underline{\underline{z}}_{p-1}) (\underline{\underline{z}}_1^2)] = 0 \end{cases}$$

$$\text{toujours avec } \nu [1 + 2 \underline{\underline{z}}_1 \cdot \underline{\underline{z}}_{p-1}] = 1.$$

Et la discussion va comme suit :

$$1^\circ / \underline{\underline{z}}_{p-1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nu = 1 \\ \alpha \underline{\underline{z}}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\theta}} = 0 \text{ qui est exclu}$$

$$2^\circ / \underline{\underline{z}}_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nu = 1 \\ \beta \underline{\underline{z}}_{p-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\theta}} = 0 \text{ qui est exclu}$$

$$3^\circ / \nu = 0 \Rightarrow 1 + 2 \underline{\underline{z}}_1 \cdot \underline{\underline{z}}_{p-1} = \infty \text{ qui est impossible}$$

$$4^\circ / \alpha = 0 \Rightarrow \nu \beta \underline{\underline{z}}_{p-1} = 0 \Rightarrow \beta \underline{\underline{z}}_{p-1} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\theta}} = 0, \text{ exclu.}$$

Ceci termine la preuve du lemme dans le deuxième cas, donc celle de (c)

]]

(d) Si $I = \Gamma - \{p-2, p-1, p\} \neq \emptyset$, alors si $z_\Gamma(\infty) \in \Gamma_{\Delta_\sigma} \cap \varepsilon(\gamma)\underline{h}$, ce point est singulier.

[En effet, le calcul rapide suivant (non commenté, et où l'on a omis d'expliciter la dépendance en s) aboutit à l'équation locale en $z_\Gamma(\infty)$, et la jacobienne correspondante est infinie en $z_\Gamma(\infty)$.

$$(A) \quad -\dot{z}_p = \dot{z}_{p-2} + \dot{z}_{p-1}$$

$$\alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} -\dot{z}_p = [\dot{z}_{p-2} \dot{z}_{p-2}^2 + z_{p-1}] \nu \quad \text{et} \quad \nu = \dot{z}_p^2 / z_{p-1}^2 \\ 1 = [1 + 2 \dot{z}_{p-2} \cdot z_{p-1} + \dot{z}_{p-2}^2 \dot{z}_{p-1}^2] \end{array} \right.$$

$$\beta' \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = [1 + 2 \frac{z_{p-2}}{z_{p-1}} \cdot \frac{z_{p-1}}{z_{p-2}^2} + \frac{z_{p-1}^2}{z_{p-2}^2}] \nu \end{array} \right.$$

$$\beta'' \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_{p-2}^2 = [\dot{z}_{p-1} + \dot{z}_{p-2}]^2 \nu \\ \alpha' \quad \left\{ \begin{array}{l} -\dot{z}_p = [\dot{z}_{p-2} \dot{z}_{p-1}^2 + z_{p-1} \dot{z}_{p-2}^2] \nu / z_{p-2}^2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$ie \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = [\dot{z}_{p-1} + \dot{z}_{p-2}]^2 \lambda \quad \text{et} \quad \lambda = \nu / z_{p-2}^2 \\ -\dot{z}_p = [\dot{z}_{p-2} \dot{z}_{p-1}^2 + z_{p-1} \dot{z}_{p-2}^2] \lambda \end{array} \right.$$

$$(C) \quad -\dot{z}_p = [\dot{z}_{p-2} \dot{z}_{p-1}^2 + z_{p-1} \dot{z}_{p-2}^2] / [\dot{z}_{p-2} + \dot{z}_{p-1}]^2$$

$$\text{et} \quad \dot{z}_p^2 [\dot{z}_{p-2} + \dot{z}_{p-1}]^2 = 1$$

$$-\frac{D[z_p]}{D[z_{p-1}]} = 1 \frac{\dot{z}_{p-2}^2}{[\dot{z}_{p-2} + \dot{z}_{p-1}]^2} + 2 \frac{\dot{z}_{p-2} \otimes \dot{z}_{p-1}}{[\dot{z}_{p-2} + \dot{z}_{p-1}]^2} + \dots$$

et le deuxième terme est infini.

]]

5.2. Si $\overline{\varepsilon\Sigma^n}(B)$ n'est pas une $\mathcal{C}^n$ -hypersurface

Les conclusions de (a), (b), (c) et (d) demeurent valables.

Prenons le cas (c) où $I = \Gamma - \{p-1, p\}$ et $z_\Gamma \in \overline{\varepsilon\Sigma^n}(B) - I^\Delta_\sigma$.

On range comme suit les $\varepsilon(\gamma)_{\underline{h}}$.

Parmi les $\gamma \in \Gamma$, tels que $\{p\} \in \varepsilon(\gamma)$, on garde γ_1 et $\varepsilon(\gamma_1)_{\underline{h}}$, et on remplace chacune des autres par la combinaison linéaire avec $\varepsilon(\gamma_1)_{\underline{h}}$ qui annule le coefficient de $\dot{z}_p$ dans son équation sous la forme (A).

Ce remplacement donne une nouvelle matrice $\varepsilon_1(\gamma)$.

Parmi les $\gamma \in \Gamma - \{\gamma_1\}$, tels que $\{p-1\} \in \varepsilon_1(\gamma)$, on garde γ_2 et $\varepsilon_1(\gamma_2)_{\underline{h}}$, et on remplace chacune des autres par la combinaison linéaire avec $\varepsilon_1(\gamma_2)_{\underline{h}}$ qui annule le coefficient de $\dot{z}_{p-1}$ dans son équation.

Ceci donne une nouvelle matrice $\varepsilon_2(\gamma)$.

On remarque alors que :

$$1^\circ/ \quad \overline{\varepsilon\Sigma^n}(B) = \overline{\varepsilon_2\Sigma^n}(B) \quad (\text{cf. définition})$$

$$2^\circ/ \quad \text{Les } \varepsilon_2(\gamma)_{\underline{h}} \text{ sont en P.G. en } z \text{ (cf. (c) et (b))}$$

$$3^\circ/ \quad \text{Localement en } z, \quad \overline{\varepsilon_2\Sigma^n}(B) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \varepsilon_2(\gamma)_{\underline{h}} .$$

]]

6. La désingularisation du couple $\overline{\varepsilon\Sigma^n}(B) \rightarrow \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$

6.0 Direction générale [Cf. Hironaka]

La proposition qui précède montre que les singularités de ce couple sont portées par les intersections trois à trois des "cônes"

$$\Delta_\sigma(j), j \in \Gamma.$$

Ces points singuliers peuvent être plus ou moins bons comme le reflète la stratification [♦] d'Hironaka en strates de Samuel.

Les meilleurs points sont ceux hors de tous les sommets ^{♦♦}, et parmi eux les meilleurs sont ceux qui n'appartiennent qu'à trois nappes ^{♦♦} des cônes $\Delta_\sigma(j)$; parmi ceux qui restent les meilleurs sont ceux qui n'appartiennent qu'à quatre nappes etc...

[♦] La fonction de Samuel d'un ensemble algébrique X (sur $\mathcal{C}$) est : $H_X : X \rightarrow \mathbb{N}$
 $H_{X,x}(n) = \dim_{\mathcal{C}}(0_{X,x}/M_x^{n+1})$ [où $0_{X,x}$ est l'anneau local de X en x et M_x l'idéal maximal]. La strate de Samuel de $x \in X$ est $\{y \in X | H_{X,y} = H_{X,x}\}$.
 Un ordre total entre strates de Samuel est donné par l'ordre lexicographique $\{$ sur $\mathbb{N}^N$.

Si $H_{X,x} \{ H_{X,y}$, x est dans une meilleure strate que y .

^{♦♦} Le cône de $j \in \Gamma$ est $\bar{\Delta}_\sigma(j) = \{z_\Gamma \in \bar{\Sigma}^n(\Gamma) | \underline{z}_j^2 = 0\}$,

on dit que $\underline{z}_\Gamma \in \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ est sur le sommet $\Omega_\sigma(j)$ du cône si $\underline{z}_j = 0$

on dit que $\underline{z}_\Gamma \in \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ est sur la nappe du cône de j si $\underline{z}_j^2 = 0$, $\underline{z}_j \neq 0$.

A l'autre bout de l'échelle on trouve :

le point fixe $\Omega_{\sigma}(\Gamma)$ situé sur tous les sommets à la fois,
 puis les points situés sur tous les sommets sauf un
 puis les points situés sur tous les sommets sauf deux, etc...
 ie, ces points se rangent en des grosses strates :

$$\Omega_{\sigma}(\Gamma), \quad \Omega_{\sigma}(J), \quad |J| = |\Gamma| - 1 \quad \Omega_{\sigma}(J), \quad |J| = |\Gamma| - 2, \text{ etc...}$$

Enfin, parmi les points de la "grosse" strate $\Omega_{\sigma}(J)$, ceux situés sur toutes les nappes des cônes de $\Gamma - J$, sont les plus mauvais etc... ce qui donne la vraie stratification de Samuel.

La prescription générale d'Hironaka pour la désingularisation est de s'occuper d'abord de la plus mauvaise strate de Samuel :

On en recherche la partie lisse fermée la plus grande, que l'on éclate dans l'ambient, et on réexamine la situation dans la transformée stricte de l'ensemble étudié : tout n'est pas à refaire car hors du centre d'éclatement il y a isomorphisme ;

On doit examiner la partie de l'éclaté située au-dessus du centre.

La procédure qui suit s'inspire de ces principes généraux.

6.1 Première étape ♦

C'est l'éclatement ♦♦ des intersections des SOMMETS des cônes, ie, c'est l'éclatement dans l'ambient $\overline{\Sigma}^n(\Gamma)$ de la réunion $\cup \Omega_{\sigma}(J)$, $J \subset \Gamma$ (avec la limitation éventuelle $|J| \geq \text{trois}$).

z | ♦ A quelques détails près, c'est l'éclatement qu'utilise Westwater []
 et qui suffit à désingulariser la partie réelle de $\overline{\varepsilon}\Sigma^n(B)$.

♦♦ (trois ou total).

Cette première étape ne concerne donc que les sommets des cônes.

Dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ on éclate d'abord le point pire $\Omega_\sigma(\Gamma)$, on constate que la grosse strate de Samuel qui vient après, ie $\Omega_\sigma(J)$, $|J| = |\Gamma| - 1$, a dans l'éclaté une fermeture non singulière que l'on éclate à son tour ; et on constate que la grosse strate de Samuel qui vient après, ie $\Omega_\sigma(J)$, $|J| = |\Gamma| - 2$, a dans l'éclaté une fermeture non singulière que l'on éclate à son tour etc...

Cet éclatement $\bar{\Sigma}^n(\Gamma) \rightarrow \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ est formellement le même que celui décrit en 4.3 pour $n = 1$. Il est réalisable en une seule fois comme étant la projection sur $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ de la fermeture de l'injection :

$$(\bar{\Sigma}^n(\Gamma) - \Gamma\bar{\Delta}_\sigma) \hookrightarrow \bar{\Sigma}^n(\Gamma) \times_{\prod_{J \subset \Gamma} \mathbb{P}^{n_J-1}} \mathbb{P}^{n_J-1}, \ni z_\Gamma \times (z_J)_{J \subset \Gamma}$$

définie par $z_\Gamma \mapsto z_\Gamma \times (z_J)_{J \subset \Gamma}$.

Soient $\Gamma\bar{\Delta}_\sigma$, $\bar{\varepsilon}\bar{\Sigma}^n(B)$, $\Gamma\bar{K}$, $\Gamma\bar{Q}$ les transformées strictes sous cet éclatement $\bar{\Sigma}^n(\Gamma) \rightarrow \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ respectivement de $\diamond$:

$$\Gamma\bar{\Delta}_\sigma, \quad \bar{\varepsilon}\bar{\Sigma}^n(B), \quad \Gamma\bar{K}, \quad \text{et} \quad \Gamma\bar{Q}.$$

On note que : $\Gamma\bar{\Delta}_\sigma - \Gamma\Omega_\sigma$ est sans point réel,
est hors du centre d'éclatement,
est en (P.G.) dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$
 $\Gamma\bar{\Delta}_\sigma$ est en (P.G.) dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ et
est sans point réel.

$\diamond$ où $\Gamma\bar{K}$ est la famille des fermetures des hypersurfaces de $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ d'équation $K_j : 1 + m_j^2 z_j^2 = 0$, $m_j^2 \neq 0$, $j \in \Gamma$, et où $\Gamma\bar{Q}$ est la section de $\bar{\varepsilon}\bar{\Sigma}^n(B)$ par $\Gamma\bar{K}$.

Proposition : l'étude faite en 4.3 et 4.4 pour les monovecteurs et notamment le théorème 2 et son corollaire restent entièrement valables pour les n-vecteurs non pas dans $\bar{\Sigma}^n$ tout entier mais dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma) - \Gamma_{\sigma}^{\bar{\Delta}}$.

Corollaire : La désingularisation est ainsi acquise dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma) - \Gamma_{\sigma}^{\bar{\Delta}}$ donc dans tout un voisinage de $\text{Re } \bar{\varepsilon}\bar{\Sigma}^n(B)$ dans $\bar{\varepsilon}\bar{\Sigma}^n(B)$

Preuve de la proposition : Il suffit d'examiner la situation dans une carte de l'éclaté pour s'apercevoir que les équations sont formellement les mêmes : $\dot{t}_j$ étant remplacé par $\dot{z}_j$ [qui a un sens hors de $\Gamma_{\sigma}^{\bar{\Delta}}$] et t_j^2 étant remplacé par z_j^2 .

6.2 Situation locale après la première étape

Soit $y = (z_{\Gamma}, z_J)_{J \subset \Gamma} \in \bar{\Sigma}^n(\Gamma) \subset \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$. $\pi_{J \subset \Gamma} \bar{P}^{nJ-1}$, un point de $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$.

Alors $\forall K \subset J \subset \Gamma$, $\mu(K, J) \in \mathbb{Z}$ tel que $z_K^J = \mu(K, J) z_K$.

Au point y est associé une filtration pointée F, α

puis une graduation pointée G, α (partition ordonnée pointée) de Γ :

$$F(y) \quad \Gamma \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset J_s ; \quad \alpha_q \in (J_q - J_{q+1}) \times n$$

$$G(y) \quad \Gamma = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_s ; \quad \alpha_q \in G_q \times n ; \quad G_q = J_q - J_{q+1}$$

où J_1 est le plus grand tel que $\mu_1 \equiv \mu(J_1, \Gamma) = 0$ en y,

J_2 est le plus grand tel que $\mu_2 \equiv \mu(J_2, J_1) = 0$ en y,

etc...

Alors il existe en y un isomorphisme local :

- E37 -

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}^n(\Gamma) &\rightarrow \bar{\Sigma}^n(G_o) \times \mathcal{C} \times \bar{P}^{nG_1} \times \bar{P}^{nG_2} \times \dots \times \bar{P}^{nG_s-1} \\ (z_\Gamma, \underline{z}_J) &\mapsto (z_{G_o}^\Gamma) \times z_{\alpha 1}^\Gamma \times (z_{G_1}^J, z_{\alpha 2}^J) \times \dots \times (z_{G_s}^J)^\diamond\end{aligned}$$

Un système de coordonnées locales en μ de $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$, est donc :

$$W = (\mu_1, \dots, \mu_s, z_{G_o}, z_{G_1}, \dots, z_{G_s}) \cap \{z_{\alpha 1} = \dots = z_{\alpha s} = 1\}$$

L'injection canonique $(\bar{\Sigma}^n(\Gamma) - \Gamma\Omega_\sigma) \hookrightarrow (W - \Gamma\Omega_\sigma)$ étant donnée par l'égalité (vectorielle dans $\mathcal{C}^n(\Gamma)$)

$$\underline{z}_\Gamma = (z_{G_o}, \mu_1 z_{G_1}, \mu_1 \mu_2 z_{G_2}, \dots, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_s z_{G_s})$$

$$[\Gamma = G_o \cup G_1 \cup \dots \cup G_s].$$

L'équation de $\bar{\Delta}_\sigma(j) \cap W$ est alors $\underline{z}_j^2 = 0$ et donc hors de $\Gamma\bar{\Delta}_\sigma$ et dans W , les $\dot{\underline{z}}_j = \underline{z}_j / \underline{z}_j^2$ sont bien définis.

L'équation $\sum_\Gamma \dot{\underline{z}} = 0$ (définie dans $\bar{\Sigma}^n|\Gamma| - \Gamma\Delta_\sigma$) devient dans $W - \Gamma\bar{\Delta}_\sigma - \Gamma\Omega_\sigma$

$$0 = \sum_{G_o} \dot{\underline{z}} + \frac{1}{\mu_1} \sum_{G_1} \dot{\underline{z}} + \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \sum_{G_2} \dot{\underline{z}} + \dots + \frac{1}{\mu_1 \dots \mu_s} \sum_{G_s} \dot{\underline{z}}$$

Plus généralement, dans W , la transformée stricte $\varepsilon \bar{\Sigma}^n(B) \hookrightarrow \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ de $\varepsilon \bar{\Sigma}^n(B) \hookrightarrow \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ est la fermeture dans W de la variété définie dans $W - \Gamma\bar{\Delta}_\sigma - \Gamma\Omega_\sigma$ par les équations : indexées par $\Gamma - B$

$$\varepsilon(\gamma)\underline{h} : 0 = \sum_{G_o \cap \varepsilon(\gamma)} \dot{\underline{z}} + \frac{1}{\mu_1} \sum_{G_1 \cap \varepsilon(\gamma)} \dot{\underline{z}} + \dots + \frac{1}{\mu_1 \dots \mu_s} \sum_{G_s \cap \varepsilon(\gamma)} \dot{\underline{z}}$$

• si $\alpha_q = (\alpha(q), \tau) \in G_q \times n$, $z_{\alpha q} \in \mathcal{C}$ désigne la τ ^{ième} composante de $\underline{z}_{\alpha(q)} \in \mathcal{C}^n$.

Donc, après réduction de $\underline{\varepsilon}$ à la matrice échelon relative à l'ordre sur Γ donné par $G_s < G_{s-1} < \dots < G_1 < G_0$, $\overline{\varepsilon}^n(B) - \Gamma \bar{\Delta}_\sigma$ a pour équation dans $W - \Gamma \bar{\Delta}_\sigma$:

$$\varepsilon(\gamma) \underline{h} \quad 0 = \left(\sum_{G_\sigma \cap \varepsilon(\gamma)} + \mu_\sigma \sum_{G_{\sigma-1} \cap \varepsilon(\gamma)} + \dots + \mu_\sigma \mu_{\sigma-1} \dots \mu_{\beta+1} \sum_{G_\beta \cap \varepsilon(\gamma)} \right) \underline{z}$$

où $0 \leq \beta \leq \sigma \leq s$ dépendent de $\gamma \in \Gamma - B$, et β est le plus petit indice et σ le plus grand indice tels que $G_\beta \cap \varepsilon(\gamma) \neq \emptyset$.

La situation après la première étape est ainsi explicitement éclaircie, hors de $\Gamma \bar{\Delta}_\sigma$ c'est bien formellement la même que celle des §4.3 et 4.4, comme l'indiquait la proposition de 6.1. Il reste à étudier ce qui se passe dans $\Gamma \bar{\Delta}_\sigma$.

6.3 Deuxième étape

C'est l'éclatement[♦] des intersections des NAPPES transformées.

Dans^{♦♦} $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$, $\Gamma \bar{\Delta}_\sigma$ est la famille en (P.G.) des transformées strictes des nappes des cônes des divers $i \in \Gamma$.

La deuxième étape est l'éclatement dans l'ambient $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ de la réunion $\cup(\bar{\Delta}_\sigma(I))$, $I \subset \Gamma$ des intersections $\bar{\Delta}_\sigma(I) = \bigcap_{i \in I} \bar{\Delta}_\sigma(i)$ des transformées strictes des nappes des cônes.

Les équations de $\overline{\varepsilon}^n(B)$ hors de $\Gamma \bar{\Delta}_\sigma$ dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$, sont linéaires en $\underline{z}$, ce qui montre donc que $\overline{\varepsilon}^n(B)$ est singulier sur $\bar{\Delta}_\sigma(I)$ dès que $|I| \geq$ trois.

Ici encore on peut former les strates de Samuel dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ pour $\overline{\varepsilon}^n(B)$.

[♦](trois ou total)
^{♦♦}que l'on vient d'obtenir par l'éclatement total des sommets.

Ceci conduit à éclater successivement dans $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$:

d'abord $\bar{\Delta}_\sigma(\Gamma)$,

puis l'union (disjointe) $\bar{\Delta}_\sigma(I)$; $|I| = |\Gamma| - 1$,

puis l'union (disjointe) $\bar{\Delta}_\sigma(I)$; $|I| = |\Gamma| - 2$,

etc...

Le résultat est un éclatement composé non singulier :

$$\bar{\Sigma}^n(\Gamma) \rightarrow \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$$

que nous allons décrire seulement au-dessus de la carte $\diamond\diamond$

$W = (\mu_q, z_{Gq}, q \in \{1, \dots, s\})$ en $y \in W \subset \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$.

On procède en deux temps, le premier ignorant $W(y)$.

6.31 On effectue l'éclatement (trois ou total) $\bar{\mathcal{C}}^1(\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}^1(\Gamma)$, déjà décrit en 43

On arrive ainsi à la situation locale $x \in U \subset \bar{\mathcal{C}}^1(\Gamma)$,

où $U = (\lambda_p, t_{G_p}, p \in \{1, \dots, r\}) \diamond\diamond\diamond$ est la carte locale en x issue de la filtration pointée puis de la graduation pointée associées à $x \in \bar{\mathcal{C}}^1(\Gamma)$:

$$F(x) : \quad \Gamma \supset I_1 \supset I_2 \dots \supset I_r$$

$$\quad \quad \quad \begin{matrix} \phi & \phi & \phi \\ i_1 & i_2 & i_r \end{matrix}$$

$$G(x) : \quad \Gamma = G'_0 \cup G'_1 \cup \dots \cup G'_r ; \quad i_p \in G'_p = (I_p - I_{p+1}) \subset \Gamma$$

$\diamond$ "des transformées strictes de"

$\diamond\diamond$ ce qui est important est l'injection de $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ dans son éclaté $\bar{\Sigma}^n(\Gamma)$,
 (6,30) qui est réalisée au voisinage de $y \in z_\Gamma \in (\bar{\Sigma}^n(\Gamma) - \Gamma \Delta_\sigma) \hookrightarrow W$ par l'égalité
 vectorielle dans $\mathcal{C}^n(\Gamma)$: $z_\Gamma = (z_{G_0}, \mu_1 z_{G_1}, \dots, \mu_1 \dots \mu_s z_{G_s})$.

$\diamond\diamond\diamond$ où $\forall j \in \Gamma$, $t_j \in \mathcal{C}$, et $\forall p \in \{1, \dots, r\}$ $\lambda_p \in \mathcal{C}$ et $t_{ip} = 1$.

(6,31) Ce qui est important est l'injection de $\mathcal{C}^1(\Gamma)$ dans son éclaté $\bar{\mathcal{C}}^1(\Gamma)$ qui est réalisée dans la carte $U(x)$ $t_\Gamma \in (\mathcal{C}^1(\Gamma) - \Gamma^{\omega_\sigma}) \hookrightarrow U$, par l'égalité vectorielle (dans $\mathcal{C}(\Gamma)$)

$$t_\Gamma = (t_{G'_0}, \lambda_1 t_{G'_1}, \dots, \lambda_1 \dots \lambda_r t_{G'_r})$$

6.32 A chaque carte locale $W(y) \subset \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$, on associe un exemplaire de l'éclatement $(\mathcal{C}^1(\Gamma) - \Gamma^{\omega_\sigma}) \hookrightarrow \bar{\mathcal{C}}^1(\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}^1(\Gamma)$.

Puis on forme les produits :

$$W(y) \times (\mathcal{C}^1(\Gamma) - \Gamma^{\omega_\sigma}) \hookrightarrow W(y) \times \bar{\mathcal{C}}^1(\Gamma) \rightarrow W(y) \times \mathcal{C}^1(\Gamma)$$

Puis on prend l'image "diagonale "

$$(W(y) - \Gamma^{\bar{\Delta}_\sigma}) \hookrightarrow W(y) \times (\mathcal{C}^1(\Gamma) - \Gamma^{\omega_\sigma})$$

(6,32) donnée par $(\mu_q, \underline{z}_{G_q}) \mapsto (\mu_q, \underline{z}_{G_q}) \times (t_{G_q}^\Gamma = \underline{z}_{G_q}^2)$

C'est la projection sur $W(y)$ de la fermeture de cette image dans $W(y) \times \bar{\mathcal{C}}^1(\Gamma)$ qui constitue l'éclatement $\bar{\bar{\Sigma}}^n(\Gamma) \rightarrow \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ au-dessus de $W(y)$.

6.4 Situation locale après la deuxième étape

Soit $y \in W(y) = (\mu_q, \underline{z}_{G_q}, q \in \{1, \dots, s\}) \subset \bar{\Sigma}^n(\Gamma)$ une carte locale de l'exemplaire $\bar{\mathcal{C}}^1(\Gamma)$ associé à $W(y)$.

Associations à $z = (y, x)$ la bigraduation $\diamond$ de Γ $\bar{G}(z) = G(y) \cap G'(x)$, définie à partir des graduation pointées de Γ associées à y et x par $\bar{G}(z) = (G_{qp}) = (G_q \cap G'_p)$, où $q \in \{1, \dots, s\}$, $p \in \{1, \dots, r\}$.

$\diamond$ ie partition indexée par $N \times N$.

[On note que certains $G_{qp} \subset \Gamma$ peuvent être vides].

Alors, dans le produit $W(y) \times U(x)$, la situation est la suivante

a) $\Sigma^n(\Gamma)$ (qui est non singulière) est définie par les relations :

$$(6,4a) \quad \left(\frac{G}{z_{qp}} \right)^2 = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p \left(\frac{G'}{t_{qp}} \right)$$

b) La transformée stricte $\varepsilon \Sigma^n(B) \hookrightarrow \Sigma^n(\Gamma)$ est la fermeture dans $\Sigma^n(\Gamma)$ de la variété définie (hors de $\lambda_p \mu_q = 0$) par les équations indexées par $\gamma \in \Gamma - B$

$$(6,4b) \quad \varepsilon(\gamma) \underline{h} : 0 = \sum_{G_{oo} \cap \varepsilon(\gamma)} \frac{1}{\mu_1 \dots \mu_q} \frac{1}{\lambda_1 \dots \lambda_p} \sum_{G_{qp} \cap \varepsilon(\gamma)} \underline{z} \dot{t} + \dots$$

$$0 \leq q \leq s, \quad 0 \leq p \leq r$$

et nous nous occuperons du modèle $\varepsilon(1) \cdot \underline{h}$

$$(6,4c) \quad \varepsilon(1) \underline{h} : 0 = \left(\sum_{G_{oo}} + \dots + \frac{1}{\mu_1 \dots \mu_q} \frac{1}{\lambda_1 \dots \lambda_p} \sum_{G_{qp}} + \dots + \frac{1}{\mu_1 \dots \mu_s} \frac{1}{\lambda_1 \dots \lambda_r} \sum_{G_{sr}} \right) (\underline{z} \dot{t})$$

Notons qu'en $z = (y, x) : \mu(y) = \lambda(x) = 0$,

$$(6,4d) \quad \text{et} \quad \underline{z}_j \neq 0 \quad t_j \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall p, \forall q \quad \underline{z}_{\alpha q} = t_{ip} = 1$$

$$(6,4e) \quad \text{Adoptons sur } \Gamma \text{ un } \underline{\text{ordre total}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{compatible à } G_{sr} \\ \left\{ G_{qp} \right\} \left\{ G_{q'p'} \right\} G_{oo} \end{array} \right.$$

$\forall (q, p)$ et (q', p') tels que $q > q'$ ou tels que $(q = q' \text{ et } p > p')$,

et supposons effectué le passage[♦] de la matrice $\underline{\varepsilon}$ à l'échelon[♦] $\underline{\varepsilon}(z)$ pour cet ordre total sur Γ .

[♦]Cf. p. E19 et p. E 23.

(6,4f) Définition : pour chaque $\gamma \in \Gamma$, formons le spectre $\square(\gamma) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour les équations (6,4b).

C'est par définition l'ensemble des $(q,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tel que le coefficient de $\frac{1}{\mu_1 \dots \mu_q \lambda_1 \dots \lambda_p}$ dans $\varepsilon(\gamma)h$ n'est pas identiquement nul.

[A ce stade, ceci correspond à $\{(q,p) | G_{qp} \neq \emptyset\}$, mais la définition qui se généralise est la précédente].

$\square(\gamma)$ dépend de $z \in \Sigma^{\equiv n}(\Gamma)$ par $\bar{G}(z)$ et de $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}(z)$ (lui-même satisfaisant (6,4e) en z).

Ombre de $(q,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ c'est $\{(q',p') | q' \leq q \text{ et } p \leq p'\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

6.41 L'hypothèse d'ombre :

Si le point $z \in \Sigma^{\equiv n}(\Gamma)$ et la matrice $\underline{\varepsilon}(z) = \underline{\varepsilon}$ sont tels que $\forall \gamma \in \Gamma, \exists (q,p) \in \square(\gamma)$ tel que :

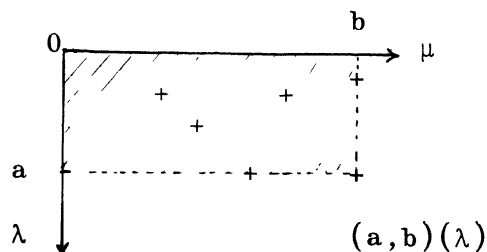
$(q' > q \Rightarrow (q',p') \notin \square(\gamma))$ et $(p'' > p \Rightarrow (q'',p'') \notin \square(\gamma))$

alors on dit que l'hypothèse d'ombre est satisfaite en z .

Remarque : l'hypothèse signifie que pour tout $\gamma \in \Gamma$, le spectre en z , $\square(\gamma)$ est dans l'ombre d'un de ses points.

Dans ce cas :

Soit $\forall \gamma \quad (b,a)(\gamma) \in \square(\gamma)$ le point $\square(\gamma)$ qui le met dans son ombre :



- en hachuré est l'ombre de (a,b)

- les croix + sont les points de $\square(\gamma)$

Alors, dans $W(y) \times U(x)$, la fermeture $\overline{\varepsilon(\gamma)\underline{h}}$ de $\varepsilon(\gamma)\underline{h}$ est donnée en multipliant dans (6,4c) les deux membres de $\varepsilon(\gamma)\underline{h}$ par $\mu_1 \dots \mu_b \lambda_1 \dots \lambda_a$. Ceci chasse entièrement le dénominateur et les équations(b) deviennent

$$(6,4b) \quad \overline{\varepsilon(\gamma)\underline{h}} : 0 = \sum_{G_{ba} \cap \varepsilon(\gamma)} \underline{z} \dot{t} + \dots + \mu_b \mu_{b-1} \dots \mu_q \lambda_a \lambda_{a-1} \dots \lambda_p \sum_{G_{qp} \cap \varepsilon(\gamma)} \underline{z} \dot{t}$$

et pour chaque $\gamma \in \Gamma$, il y a un terme indépendant de λ et μ et non identiquement nul par hypothèse.

On doit examiner la jacobienne globale en z dans $W(y) \times U(x)$:

$$\frac{D[(6,4a), (\overline{6,4b}), \text{ et } (6,4d)]}{D[\underline{z} \dot{t}_{G_{qp}}, \dot{t}_{G_{qp}}, \mu_q, \lambda_p ; (q,p) \in \{1, \dots, s\} \times \{1, \dots, r\}]}$$

or :

$$(1) \quad \text{La jacobienne } \frac{D(\overline{\varepsilon(\gamma)\underline{h}}, \gamma \in \Gamma)}{D(\underline{z} \dot{t}_G, G_{qp} \subset \Gamma)} \text{ en } z = (y, x) \text{ est le produit tensoriel de}$$

- La matrice identité $\mathbb{I}_n$ de $\mathcal{C}^n$
- par une matrice issue de $\underline{\varepsilon}$ et de même type d'échelon qu'elle (grâce à 6.4e),

donc cette jacobienne est de rang maximum.

$$(2) \quad \text{La jacobienne } \frac{D(\underline{z} \dot{t}_\Gamma)}{D(\underline{z}_\Gamma)} \text{ en } z = (y, x) \text{ est le produit tensoriel de :}$$

- la matrice identité $\mathbb{I}_n$ de $\mathcal{C}^n$
- par la matrice diagonale $\dot{t}_i \delta_{ij} ; i, j \in \Gamma$,
or $\forall_i \in \Gamma, \dot{t}_i \neq 0$ en z ,

donc cette jacobienne est de rang maximum.

- (3) La jacobienne $\frac{D(\underline{z} \cdot \dot{t}_\Gamma)}{D(\dot{t}_\Gamma)}$ en $z = (y, x)$ est le produit tensoriel des
- vecteurs colonne $\underline{z}_i$ $i \in \Gamma$, or $\forall i \in \Gamma, \underline{z}_i \neq 0$ en z ,
donc cette jacobienne est de rang maximum.
- (4) La jacobienne $\frac{D(6.4a)}{D(\underline{z}_\Gamma)}$ en $z = (y, x)$ est le produit tensoriel des
- vecteurs ligne $\underline{z}_j$ $j \in \Gamma$
donc est de rang maximum en z (puisque $\forall i \in \Gamma, \underline{z}_i \neq 0$).
- (5) On peut s'arranger (en modifiant au besoin l'ordre sur Γ , Cf. p. E23) pour que les dérivées par rapport à μ n'aient pas de rôle à jouer dans le rang total, pas plus que les dérivées par rapport aux "variables fixes" (6.4d), ni par rapport à λ_p hormis λ_1 .
- [en $z = (y, x)$, $\frac{D(\overline{6.4b})}{D(\lambda, \mu)}$ et $\frac{D(6.4a)}{D(t, \lambda)}$ sont nuls pour presque tous les λ, μ et t , ce qui tue les interférences]
- (6) Mettant bout à bout les points (1) à (5) on déduit la jacobienne globale en $z = (y, x)$ que nous examinerons après la troisième étape.

Ce qui fait tout marcher est le point (1), qui n'est valable que dans notre hypothèse d'ombre.

La partie concernant $\overset{\equiv}{\Gamma}Q$ est maintenant de la routine immédiate.

]]

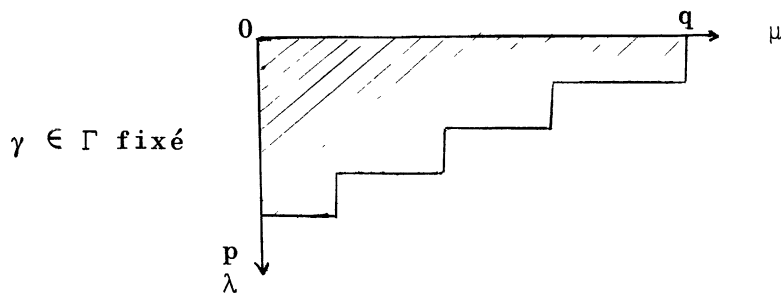
6.5 Troisième étape

La fin de la deuxième étape ne s'achève pas, si $z=(y,x)$ satisfait l'hypothèse d'ombre.

La troisième étape consiste à ramener à ce cas les autres points $z = (y,x)$ de $\overline{\varepsilon\Sigma^n}(B) \hookrightarrow \overline{\Sigma^n}(\Gamma)$. Elle procède par éclatements en (λ,μ) cette fois.

Supposons qu'en $z = (y,x) \in W(y) \times U(x)$, l'hypothèse d'ombres soit non satisfaite.

Alors pour au moins un $\gamma \in \Gamma$, l'ombre du spectre $\square[\gamma]$ présente une allure en escalier



La troisième étape diminuera l'amplitude et la profondeur des marches mais, surtout, supprimera les deux marches extrêmes de notre escalier.

En la réitérant, on supprime toutes les marches concernant notre $\gamma \in \Gamma$; B puis on passe au γ suivant dans notre carte $W(y) \times U(x)$.

En procédant ainsi dans toutes les cartes (en nombre fini, mais très grand) on aura réalisé l'hypothèse d'ombres.

6.51 Effet sur (6.5b) (ie sur $\varepsilon(\gamma)\underline{h}$) d'un éclatement binaire élémentaire en λ et μ .

(6.5b) désigne les équations (6.4b) après qu'on en ait multiplié les deux membres par $\lambda_1 \dots \lambda_r \mu_1 \dots \mu_s$

$$(6.5b) \quad \overline{\varepsilon(\gamma) \cdot \underline{h}} = 0 \quad 0 = \left(\sum_{\mathbf{G}_{\mathbf{sr}} \cap \varepsilon(\gamma)} + \dots + \lambda_{p+1} \dots \lambda_r \mu_{q+1} \dots \mu_s \sum_{\mathbf{G}_{\mathbf{pq}} \cap \varepsilon(\gamma)} + \dots \right) (\underline{z} \cdot \underline{t})$$

un point $(p, q) \in \square(\gamma)$ du spectre de γ représente un terme effectif en $\lambda_{p+1} \dots \lambda_r \mu_{q+1} \dots \mu_s$ dans $\overline{\varepsilon(\gamma)\underline{h}}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Un éclatement binaire de type (a, b) en $(\lambda$ et $\mu)$ est l'éclatement de l'origine dans $\mathbb{P}^2 \ni (\lambda_a, \mu_b)$.

Suivant la carte de $\overline{\mathbb{P}^1}$ locale au-dessus du point éclaté,

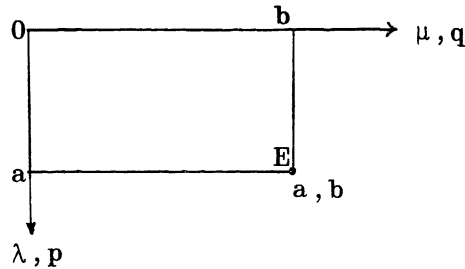
- (1) on a un éclatement binaire λ -élémentaire si le couple (λ_a, μ_b) est remplacé par $(\lambda'_a, \lambda'_a \mu'_b)$, où λ' et μ' sont nuls au centre de la carte.
- (2) On a un éclatement binaire μ -élémentaire si le couple (λ_a, μ_b) est remplacé par $(\lambda''_a \mu''_b, \mu''_b)$ où λ'' et μ'' sont nuls au centre de la carte.
- (3) On a un éclatement binaire $\lambda\mu$ -élémentaire si le couple (λ_a, μ_b) est remplacé par $(\lambda'_a, \lambda'_a \mu'_b)$ avec λ' nul au centre de la carte mais $\mu' \neq 0$ au centre.

[Dans la suite nous supprimons primes et secondes].

Si $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, le terme $\lambda_{p+1} \dots \lambda_r \mu_{q+1} \dots \mu_s$ se trouve multiplié au cours d'un éclatement élémentaire binaire par le facteur :

$\mathbb{Z}$ $\left\{ \begin{array}{l} - \lambda_a \text{ si } q < b \text{ et si l'éclatement est } \lambda\text{-élémentaire ;} \\ - \mu_b \text{ si } p < a \text{ et si l'éclatement est } \mu\text{-élémentaire.} \end{array} \right.$

[Cette observation fondamentale est la clef de la méthode qui suit] ;
autrement dit, dans la représentation graphique :



par un éclatement λ -élémentaire de type (a,b) , tous les points à gauche (strictement) de $E = (a,b)$ acquièrent le facteur λ_a , or tous les points strictement au-dessus de E , ont déjà ce facteur λ_a , donc on pourra diviser tous les termes de $\overline{\varepsilon(\gamma)}_{\underline{h}}$ (modifiés par cet éclatement) par λ_a dès que $\square(\gamma)$ n'a pas de point au quart sud-est de $E = (a,b)$ (on dit alors que l'éclatement binaire de type (a,b) est permis pour $\square(\gamma)$).

De plus, cette division par λ_a ne sera vraiment une simplification par rapport à la situation avant éclatement, que si elle détruit un facteur μ_b par contraction.

$\mathbb{Z}$ || Cela n'arrive à coup sur que si l'ombre de $E = (a,b)$ ne rencontre qu'une seule marche de l'ombre de $\square(\gamma)$.

Supposant réalisée cette condition, pour conserver l'interprétation graphique après cette opération, il suffit de représenter l'éclatement λ -élémentaire par un chemin vertical de longueur un issu de $E = (a,b)$ et de supprimer la projection de ce chemin sur l'axe $\overrightarrow{0\lambda}$. (ce qui remplace par un le facteur λ_a , là où il faut, ie $\forall(p,q)$ tel que $q > b$, et $p < a$).

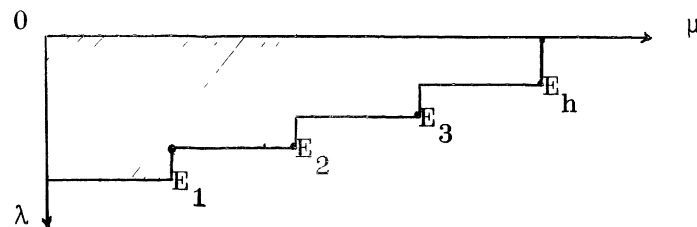
De même un éclatement μ -élémentaire se représente par un chemin est-ouest issu de $E = (a,b)$ et de longueur un. Et le changement de situation avant

et après revient à supprimer la projection de ce chemin sur l'axe $\overrightarrow{0\mu}$ (ce qu'on interprète en remplaçant par un le facteur $\mu_b \forall(p,q)$ tel que $q < b$ et $p > a$).

Enfin, un éclatement $\lambda\mu$ -élémentaire se représente par un chemin (sud-est)-(nord-ouest) issu de $E = (a,b)$ et la simplification apportée revient à supprimer ses projections qui sont de longueur un sur les axes $\overrightarrow{0\lambda}$ et $\overrightarrow{0\mu}$ (ce qu'on interprète en remplaçant par un le facteur λ_a et le facteur μ_b dans $\frac{*}{*}$)

6.5.2 La suppression des marches extrêmes de l'ombre du spectre $\square(\gamma)$

γ étant fixé, l'ombre du spectre de $\square(\gamma)$ se présente graphiquement comme une suite de sommets $E_1, E_2, \dots, E_h$.



Soit $L_i \subset \{1, \dots, r\}$ $M_i \subset \{1, \dots, s\}$ les projections de la marche numéro i .

On effectue alors (pour chaque i fixé) l'éclatement $\overline{\phi}(L_i \cup M_i) \rightarrow \phi(L_i \cup M_i)$ défini comme la projection sur le facteur $\phi(L_i \cup M_i)$ de la fermeture de l'inclusion :

$$(\phi(L \cup M) -_{L_i \cup M_i} \omega) \hookrightarrow \phi(L_i \cup M_i) \pi \overline{P}^{(L \cup M)-1}$$

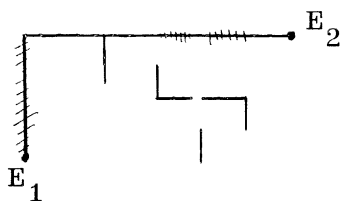
$$(\lambda_{L_i}, \mu_{M_i}) \mapsto (\lambda_{L_i}, \mu_{M_i}) \times (\lambda_L, \mu_M)$$

où $L \subset L_i$ est non vide et où $M \subset M_i$ est non vide.

Proposition : Cette opération supprime à coup sûr les marches extrêmes de l'ombre de $\square(\gamma)$.

En effet, à tout point de l'éclaté correspondant à la première marche (ie $i = 1$), il correspond une filtration bipointée (en L et en M) de $L_i \cup M_i$ et une carte locale.

La filtration bi pointée est résoluble en éclatements binaires élémentaires dont la succession correspond à une ligne brisée interne à la marche mais dont au moins une des deux projections recouvre celle de la marche :



Cette opération supprime un des flancs de la première marche et une partie (éventuellement vide) de l'autre flanc.

Il en va de même pour la dernière marche. Pour terminer la preuve de la proposition, il reste à remarquer que les $\underline{z} \cdot \underline{t}$ relatifs à des indices différents dans Γ sont indépendants, ce qui fait que les simplifications par les facteurs λ_a ou μ_b contractés par effacement des projections de la ligne brisée ne risquent pas d'aboutir à des multiplicateurs identiquement nuls en $\underline{z} \cdot \underline{t}$.

Enfin la construction de l'équation de la transformée stricte de $\overline{\varepsilon(\gamma)}_{\underline{h}}$ après l'éclatement précédent se fait à partir du spectre original $\square(\gamma)$ et de la ligne d'éclatement en remplaçant dans les facteurs complets de chaque point $(p,q) \in \square(\gamma)$ (hors l'ombre de l'éclatement) chaque λ barré et chaque μ barré par un nombre $\neq 0$ au centre de la carte.

La proposition est donc démontrée.]

11

6.6 Quatrième étape

Chasse aux singularités restantes dans $\overset{\equiv n}{\varepsilon \Sigma}(B) \hookrightarrow \overset{\equiv n}{\Sigma}(\Gamma)$

La situation locale en tout point de $\overset{\equiv n}{\varepsilon \Sigma}(B)$ est pratiquement celle décrite en 6.41 dont nous reprenons la discussion. Soit $\bar{G} = (G_{qp})$, α_q, i_p , la bipartition pointée, associée à z . Raffinons l'ordre total sur Γ donnée par (6.4e) en imposant :

$$G_s \leq \alpha(s) < G_{s-1} \leq \alpha(s-1) < G_{s-2} \leq \alpha(s-2) < \dots < G_q \leq \alpha(q) < \dots < G_o$$

Nous aurons aussi à examiner une matrice dont les colonnes sont indexées par $\Gamma \times N$. Nous prenons sur $\Gamma \times n$, un ordre total compatible à

$$G_{sr} \times n \left\{ G_{qp} \times n \left\{ G_{q'p'} \times n \right\} G_{oo} \times n \right. \quad (\text{comme en 6.4e})$$

raffiné par

$$G_s \times n \leq \alpha_s < G_{s-1} \times n \leq \alpha_{s-1} < G_{s-2} \dots \text{etc} \dots$$

(cf. p. 120 pour la signification de α_q et $\alpha(q)$ et $z_{\alpha q}$).

Le point $z = (y, x)$ à décrire est dans $\overset{\equiv n}{\varepsilon \Sigma}(B)$. Dans un système élargi de coordonnées indépendantes locales

$$(\underline{z}'_{G_{qp}}, \dot{t}_{G_{qp}}, \mu_q, \lambda_p) \quad \text{où} \quad (q, p) \in \{1, \dots, s\} \times \{1, \dots, s\}$$

ce point satisfait toutes les équations et inéquations

(6.4a) et (6.4d) (qui sont celles de $\overset{\equiv n}{\Sigma}(\Gamma)$ dans cette carte), puis

puis $(\overline{6.4b})$ (qui sont celles de $\overset{\equiv n}{\varepsilon \Sigma}(B)$ dans $\overset{\equiv n}{\Sigma}(\Gamma)$ dès que $\underline{z}$ est de type échelon pour notre ordre sur Γ).

Enfin $\lambda_p(z) = \mu_q(z) = 0 \quad \forall q, p$.

La matrice Jacobienne pour ces coordonnées et ces équations est décrite dans deux tableaux dont seul le premier est figuré.

Le premier est relatif à un point proche de z lui-même ($\lambda_p \neq 0, \mu_q \neq 0$).
Le deuxième est relatif au point z lui-même et est obtenu à partir du premier en posant $\lambda = \mu = 0$; il n'est pas figuré.

Légende : dans cette description :

$\square$ représente un multiple non nul de la matrice identité de $\mathcal{C}^n$.

$\boxtimes$ représente le produit de $\square$ par un vrai monôme en λ et μ .

$\underline{y}$ représente le vecteur ligne $(\underline{z}^t)_j \in \mathcal{C}^n$ où $j \in \Gamma$ est donné par la ligne.

La matrice $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est supposée mise sous la forme d'échelon réduite.

$\mu \rightarrow$ indiquent que tous les éléments de la ligne situés à droite de ce
 $\lambda \rightarrow$ symbole sont multipliés par un vrai monôme en λ et μ (donc sont nuls
en $z = (y, x)$).

Seule est efficace la matrice représentée

$$\begin{array}{c} \overline{64b} \\ D \left(\begin{array}{c} \overline{64b} \\ 64a \end{array} \right) \leftarrow \text{lignes} \\ \hline D \left(\begin{array}{c} \dot{\underline{z}}^t \\ \dot{t} \end{array} \right) \leftarrow \text{colonnes} \end{array}$$

En effet : $\frac{D(\overline{64b})}{D(\dot{t})}$ est nulle par notre choix de variables (indépendantes $\underline{z}^t$ et $\dot{t}$)

$\frac{D(64a)}{D(\dot{t})}$ a un facteur λ , donc est nulle en $z = (y, x)$

$\mathbb{Z} \left| \begin{array}{l} \frac{D}{D(\lambda_p)} \text{ est nul en } z = (y, x) \text{ sauf peut être } \frac{D}{D(\lambda_1)} \text{ non figuré.} \\ \frac{D}{D(\mu)} \text{ n'intervient pas pour le rang et n'est pas figuré.} \end{array} \right.$

[car $z = (y, x) \in \overline{\varepsilon(\gamma)\underline{h}}$, $\forall \gamma \in \Gamma - B \Rightarrow (64b)$ est vérifié pour $\lambda = \mu = 0$
 or $\underline{z}t_i \neq 0 \forall i \in \Gamma. \Rightarrow$] au moins deux symboles $\square$ par ligne.]]

The diagram illustrates a quantum circuit with two main sections: $\Gamma \times n$ (top) and Γ (bottom).

Section $\Gamma \times n$:

- It contains six gates labeled g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 , and $g_{\Gamma-B}$.
- Each gate has a vertical input line and a horizontal output line.
- The gates are connected in a sequence, with the output of one gate serving as the input for the next.
- Specific components within the gates include:
 - g_1 : A box containing $\lambda \rightarrow$.
 - g_3 : A box containing two $\mu \rightarrow$ symbols.
 - g_5 : A box containing $\lambda \rightarrow$.
 - $g_{\Gamma-B}$: A box containing four $\mu \rightarrow$ symbols.

Section Γ :

- It contains a series of vertical lines labeled α_s and α_q .
- The circuit is divided into two main parts by a vertical line.
- The left part contains gates G_{sr} and G_{sh} .
- The right part contains gates G_{qp} and G_q .
- The diagram uses various symbols including squares, circles, and arrows to represent quantum states and operations.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Hironaka : Resolution of singularities. Ann. Math. 79, 109-326, (1964).
- [2] J. Leray : Problème de Cauchy III. B.M.S. t.87. 1959.
- [3] J. Leray : Complément à un théorème de N. Nilsson. B.M.S. 1967.
- [4] R. Thom : Stratification. B.A.M.S. 75. 1969.
- [5] C. Ehresmann : Ann. Math. 35 (1934) p.396.
- [6] D. Fotiadi, M. Froissart, J. Lascoux et F. Pham : Toplogy, t.4 1965.
- [7] N. Nilsson : Arkiv för Math. 5, 463-476, 1964.
- [8] M.J. Westwater : Renormalization of Feynman Integrals. Fortschritte Der Physik 17, 1-71 (1969).
- [9] E.R. Speer : Generalized Feynman Amplitudes. Ann. Math. Studies. 62 (1969).
- [10] J. Lascoux : Battelle Rencontres 1967. Benjamin 1968.
- [11] F. Pham : Ann. Inst. H. Poincaré, 6, 89-204, (1967).
- [12] F. Pham : Mémorial des Sciences Mathématiques 164, Gauthier-Villars Paris (1967).