

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JACQUES-LOUIS LIONS

Écoulement d'un fluide rigide visco-plastique incompressible

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1969-1970), p. 8-14

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969-1970__2_8_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE RIGIDE VISCO-PLASTIQUE INCOMPRESSIBLE

par

Jacques-Louis LIONS

On expose ici le contenu d'une note aux C.R. Acad. des Sciences, Décembre 1969, par G. Duvaut et l'Auteur.

L'écoulement d'un fluide rigide visco-plastique incompressible (fluide de Bingham) est régi par un système d'inéquations variationnelles (contenant comme cas particulier les équations de Navier-Stokes).

On donne aux N° 1 à 5 les énoncés des résultats principaux obtenus.

Le N° 6 donne les idées essentielles de la démonstration du Théorème 1, qui est à la base de tous les autres résultats.

1. Formulation du problème.

Si u est le vecteur vitesse de l'écoulement dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ du fluide incompressible, on a :

$$(1) \quad \text{Div } u = 0 ,$$

$$(2) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \text{Div } \bar{\sigma} + f ,$$

(ρ_0 sera pris égal à 1 dans la suite), où $\bar{\sigma}$ = tenseur des contraintes de composantes σ_{ij} et où f est une densité volumique de forces donnée.

La loi de comportement du fluide rigide - visco-plastique de Bingham [8] est :

$$(3) \quad \begin{aligned} D_{ij} &= 0 \quad \text{si} \quad \sigma_{II}^{\frac{1}{2}} < g , \\ 2\mu D_{ij} &= \left(1 - \frac{g}{\sigma_{II}^{\frac{1}{2}}} \right) \sigma_{ij}^D \quad \text{si} \quad \sigma_{II}^{\frac{1}{2}} \geq g \end{aligned}$$

où

$$(4) \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) , \quad \sigma_{II} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D$$

(σ_{ij}^D étant les composantes du déviateur du tenseur des contraintes) ,

g = constante positive représentant un seuil de contraintes, au-deçà duquel le fluide se comporte comme un matériau rigide et au-delà duquel il flue de façon voisine d'un fluide de viscosité μ ; à (3) on ajoute

$$(5) \quad u = 0 \quad \text{au bord } \Gamma \text{ de } \Omega .$$

On pose :

$$a(u, v) = 2\mu \int_{\Omega} D_{ij}(u) D_{ij}(v) dx,$$

$$j(v) = 2g \int_{\Omega} D_{II}(v)^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{où} \quad D_{II}(v) = \frac{1}{2} D_{ij}(v) D_{ij}(v) ,$$

$$b(u, v, w) = \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx ,$$

$$(f, g) = \int_{\Omega} f_i g_i dx .$$

On vérifie la

Propriété : l'écoulement d'un fluide de Bingham satisfait à

$$(6) \quad \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t} , v - u(t) \right) + a(u(t), v - u(t)) + b(u(t), u(t), v) + j(v) - j(u(t)) \\ \geq (f(t), v - u(t))$$

$\forall v$ tel que $\text{Div } v = 0$, $v = 0$ sur Γ , à quoi on ajoute (1), (5) et la condition initiale

$$(7) \quad u(0) = 0 .$$

On a un résultat analogue pour le cas stationnaire.

On prend alors (6) (et son analogue stationnaire) comme définition du modèle (avec (1), (5), (7)), qui est donc gouverné par une inéquation variationnelle.

2. Existence d'une solution faible en dimension quelconque.

On introduit :

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^n, \text{div } \varphi = 0\}$$

$$V_{\sigma} = \text{adhérence de } \mathcal{V} \text{ dans } (H^{\sigma}(\Omega))^n, \sigma > 0 \text{ quelconque,}$$

$$V_1 = V, V_0 = H \text{ (produit scalaire } (,)) .$$

THÉORÈME 1. On suppose que $f \in L^2(0, T; H)$. Il existe une fonction u telle que

$$(8) \quad u \in L^2(0, T; V) \cap L^{\infty}(0, T; H) ,$$

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V_{\sigma}^*), \sigma = n/2 ,$$

$$(10) \quad u(0) = 0 ,$$

$$(11) \quad \int_0^T \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} , v - u \right) + a(u, v - u) - b(u, v, u) + j(v) - j(u) - (f, v - u) \right] dt \geq 0$$

$\forall v$ telle que

$$v \in L^2(0, T; V_0), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; H), v(0) = 0 \quad (1).$$

L'unicité est ouverte, sauf si $n = 2$; cf. N° 3.

3. Existence et unicité d'une solution faible et d'une solution forte en dimension deux d'espace.

THÉORÈME 2. On suppose $n = 2$. Il existe alors une fonction u et une seule vérifiant (8), (9) (avec $\sigma = 1$), (10) et (au lieu de (11))

$$(13) \quad \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}, v - u(t) \right) + a(u(t), v - u(t)) + b(u(t), u(t), v - u(t)) + j(v) - j(u(t)) \\ \geq (f(t), v - u(t)) \quad , \quad \forall v \in V.$$

Pour les solutions "fortes" on a le

THÉORÈME 3. On suppose que $n = 2$ et que

$$(14) \quad \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(0, T; H) \quad f(0) = 0.$$

Alors la solution u de (13) vérifie

$$(15) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H).$$

4. Comportement lorsque $g \rightarrow 0$.

Notons d'abord que les résultats précédents sont valables si $g = 0$ et redonnent alors certains des résultats connus sur les équations de Navier-Stokes ([4], [3], [6]).

La solution u de (13) dépend évidemment de g , posons $u = u_g$; alors :

THÉORÈME 4. On suppose $n = 2$. Lorsque $g \rightarrow 0$ on a

$$(16) \quad u_g \rightarrow u \quad \text{dans } L^2(0, T; V) \text{ faible,}$$

$$(17) \quad \frac{\partial u_g}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{dans } L^2(0, T; V') \text{ faible,}$$

où u est la solution des équations de Navier-Stokes.

Si $n > 2$, on peut extraire une suite de g telle que u_g converge vers une solution de Navier-Stokes.

(1) Il s'agit d'une formulation faible de (6).

5. Cas stationnaire

THÉORÈME 5. On suppose $n \leq 4$. Pour tout $\lambda \geq 0$, il existe $u \in V$ tel que

$$(18) \quad a(u, v-u) + \lambda b(u, u, v-u) + j(v) - j(u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in V$$

(si $n > 4$, le résultat subsiste en prenant dans (18) $v \in V_s$, $s = \frac{n}{2} - 1$).

Si $\lambda = 0$, u est unique, soit $u = u_0$; le résultat est alors une variante de [7].

Dans le théorème 5 on peut trouver une famille de solutions u_λ telle que $u_\lambda \rightarrow u_0$ dans V faible lorsque $\lambda \rightarrow 0$.

Par ailleurs, pour λ fixé, on peut trouver une famille de solutions u_g de (18) telle que

$$(19) \quad u_g \rightarrow u_{NS} \text{ dans } V \text{ faible lorsque } g \rightarrow 0,$$

où

u_{NS} = solution du système stationnaire de Navier-Stokes.

6. Principe de la démonstration du Théorème 1

6.1. Idée générale

La formulation (11) est une forme "faible" de (13); on commence donc par essayer de résoudre (13). On note que si j était différentiable alors on pourrait remplacer (13) par une équation

$$(20) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), v \right) + a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) + (j'(u(t)), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in V_\sigma.$$

Alors l'idée est d'approcher j par j_ε :

$$(21) \quad j_\varepsilon(v) = \frac{2g}{1+\varepsilon} \int_{\Omega} D_{II}(v)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} dx, \quad \varepsilon > 0.$$

On cherche alors à résoudre, au lieu de (20):

$$(22) \quad \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v \right) + a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) + (j'_\varepsilon(u_\varepsilon), v) = (f, v) \quad \forall v \in V_\sigma.$$

Mais (22) est une équation du type Navier Stokes avec en outre la non linéarité correspondant à $j'_\varepsilon(u_\varepsilon)$. Il faut alors, comme dans [5] (Chapitre 2, N° 5), utiliser à la fois des méthodes de compacité et de monotonie. Il est alors utile de régulariser encore une fois (22) (double régularisation): on introduit $\eta > 0$ et on cherche $u_{\varepsilon, \eta}$ solution de

$$(23) \quad \left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t}, v \right) + a(u_{\varepsilon\eta}, v) + b(u_{\varepsilon\eta}, u_{\varepsilon\eta}, v) + (j'_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}), v) + \eta(u_{\varepsilon\eta}, v)_{V_\sigma} = (f, v)$$

$$v \in V_\sigma,$$

avec

$$(24) \quad u_{\varepsilon\eta}(0) = 0.$$

6.2. Résolution de (23), (24)

Par les méthodes [5], Chap. 2, N°5, on montre l'existence de $u_{\varepsilon\eta}$ solution de (23) (24) avec

$$(25) \quad u_{\varepsilon\eta} \in \text{borné de } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \quad (\text{lorsque } \varepsilon, \eta \rightarrow 0),$$

$$(26) \quad u'_{\varepsilon\eta} \in \text{borné de } L^2(0, T; V'_\sigma), \quad (\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial t}),$$

$$(27) \quad \sqrt{\eta} u_{\varepsilon\eta} \in \text{borné de } L^2(0, T; V_\sigma).$$

6.3. Passage à la limite en ε et η

D'après (25) (26) on peut supposer, par extraction d'une sous-suite encore notée $u_{\varepsilon\eta}$, que

$$u_{\varepsilon\eta} \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ faible et dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible étoile,}$$

$$u'_{\varepsilon\eta} \rightarrow u' \text{ dans } L^2(0, T; V'_\sigma) \text{ faible,}$$

et il faut montrer que u satisfait à (11).

Pour cela on introduit, pour v donné avec (12) :

$$(28) \quad Y_{\varepsilon\eta} = \int_0^T [(v', v - u_{\varepsilon\eta}) + a(u_{\varepsilon\eta}, v - u_{\varepsilon\eta}) + b(u_{\varepsilon\eta}, u_{\varepsilon\eta}, v - u_{\varepsilon\eta})$$

$$+ j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) + \eta(u_{\varepsilon\eta}, v - u_{\varepsilon\eta})_{V_\sigma} - (f, v - u_{\varepsilon\eta})] dt.$$

Utilisant (23) (où l'on remplace v par $v - u_{\varepsilon\eta}$) on trouve que

$$Y_{\varepsilon\eta} = \int_0^T [(v' - u'_{\varepsilon\eta}, v - u_{\varepsilon\eta}) + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) - (j'_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}), v - u_{\varepsilon\eta})] dt.$$

D'après la convexité de la fonction $v \rightarrow j_\varepsilon(v)$, on a :

$$j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) - (j'_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}), v - u_{\varepsilon\eta}) \geq 0$$

et donc

$$(29) \quad Y_{\varepsilon\eta} \geq \frac{1}{2} \|v(T) - u_{\varepsilon\eta}(T)\|^2,$$

ou encore

$$\begin{aligned}
 (30) \quad \int_0^T [\mathbf{v}', \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}] + a(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) + \eta(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{v})_{V_\sigma} + j_\varepsilon(\mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta})] dt \\
 \cong \int_0^T [a(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) + j_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) + \eta(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta})_{V_\sigma}] dt \\
 + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}(T) - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(T)\|^2 \cong \int_0^T [a(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}, \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}) + j_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta})] dt .
 \end{aligned}$$

Mais

$$\int_0^T j(u) dt \cong \left(\int_0^T \int_\Omega g D(u)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} dx dt \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \left(\int_0^T \int_\Omega g dx dt \right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

d'où

$$\int_0^T j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) dt \cong c_\varepsilon \left(\int_0^T j(u_{\varepsilon\eta}) dt \right)^{1+\varepsilon}, \quad c_\varepsilon \rightarrow 1 \quad \text{si} \quad \varepsilon \rightarrow 0 .$$

Alors

$$\liminf \int_0^T j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) dt \cong \int_0^T j(u) dt$$

et (30) donne

$$\int_0^T [(\mathbf{v}', \mathbf{v} - \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) + j(\mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})] dt \cong \int_0^T [a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + j(\mathbf{u})] dt$$

d'où (11).

7. Remarques

7.1. Les autres démonstrations utilisent le même genre de techniques. Dans l'unicité (pour le Théorème 2) la démarche est analogue à celle suivie dans le cas des équations [6] : si u_* est une deuxième solution éventuelle de (13), on prend $\mathbf{v} = u_*$ dans (13) et $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans l'inéquation analogue pour u_* . Par addition on obtient, si $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_*$:

$$\begin{aligned}
 -(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(t), \mathbf{w}(t)) - a(\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(t)) + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}_*(t) - \mathbf{u}(t)) \\
 + b(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{u}_*(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_*(t)) \geq 0
 \end{aligned}$$

et c'est exactement l'inégalité dont on a besoin pour arriver à l'unicité dans le cas des équations ; cf. [6].

7.2. D'autres problèmes d'inéquations variationnelles intervenant dans divers points de la Mécanique sont donnés dans [1], [2].

7.3. L'analyse numérique de ces problèmes est en cours par ailleurs.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. DUVAUT et J.L. LIONS, C.R. Acad. Sc., t. 269 (1969), p. 510-513 et p. 570-572.
- [2] G. DUVAUT et J.L. LIONS, C.R. Acad. Sc., Nouvelles inéquations variationnelles rencontrées en thermique et en thermo-élasticité. A paraître.
- [3] O.A. LADYZENSKAYA, The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon et Breach, New-York, 1963.
- [4] J. LERAY, Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois. J. Math. Pures et Appliquées, Série 9, 13, (1934), 331-418.
- [5] J.L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires, Dunod, Gauthier-Villars, 1969.
- [6] J.L. LIONS et G. PRODI, Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2. C.R. Acad. Sc. (1959, 248, 3519-3521
- [7] P.P. MOSOLOV et V.P. MIASNIKOV, Variational methods in the theory of the fluidity of a viscous plastic medium. P.M.M. 29 (1965), 468-492.
- [8] W. PRAGER, Introduction to mechanics of continua. Gim and Company, 1961.