

# SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

BERNARD MALGRANGE

## **Une remarque sur les idéaux de fonctions différentiables**

*Séminaire Jean Leray*, n° 2 (1969-1970), p. 41-45

[http://www.numdam.org/item?id=SJL\\_1969-1970\\_\\_2\\_41\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969-1970__2_41_0)

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR LES IDÉAUX DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

par Bernard MALGRANGE (Grenoble)\*

1. INTRODUCTION

Soient  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{E}$  (resp.  $\mathcal{O}$ ) le faisceau des germes de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (resp. analytiques) sur  $X$ , à valeurs complexes. Pour tout point  $a \in X$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , désignons par  $F_a$  l'anneau des séries formelles  $\mathbb{C}[[x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n]]$  et par  $f_a \mapsto \hat{f}_a$  l'application  $\mathcal{E}_a \rightarrow F_a$  (ou  $\mathcal{O}_a \rightarrow F_a$ ) : "série de Taylor en  $a$ ".

Soit  $M \in \text{Hom}(X; \mathcal{O}^q, \mathcal{O}^p)$  une matrice à coefficients analytiques sur  $X$ , le résultat suivant est connu (Malgrange [1]) :

Soit  $f \in \mathcal{E}(X)^p$  ; pour qu'il existe  $g \in \mathcal{E}(X)^q$  vérifiant  $Mg = f$ , il faut et il suffit qu'en tout point  $a \in X$ , la condition suivante soit satisfaite :

$$C(a) : \text{Il existe } \gamma_a \in F_a^q \text{ tel qu'on ait : } \hat{f}_a = \hat{M}_a \gamma_a .$$

Il est facile de voir sur des exemples que la conclusion reste vraie si l'on fait seulement l'hypothèse que  $C(a)$  est vérifié en "suffisamment de points  $a$ ". Par exemple, si  $X = \mathbb{R}^2$ , un  $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$  est de la forme  $x_1 g$  si et seulement si l'on a  $f(0, x_2) = 0$  ; par conséquent, il suffit ici d'imposer  $C(a)$  pour un ensemble dense sur la droite  $x_1 = 0$ . D'une façon générale, posons la définition suivante :

**DÉFINITION 1.1.** Un sous-ensemble  $Y$  de  $X$  sera dit "M-dense" si tout  $f \in \mathcal{E}(X)^p$ , vérifiant  $C(a)$  en tout point  $a \in Y$ , est de la forme  $Mg$ , avec  $g \in \mathcal{E}(X)^q$ . [Autrement dit, si la condition " $\forall a \in Y, C(a)$ " entraîne " $\forall a \in X, C(a)$ ".]

Le but de cette note est de donner une caractérisation des ensembles M-denses ; l'outil essentiel est un argument de "semi-continuité de la dimension", déjà utilisé dans des questions analogues par Tougeron [1] (voir l'Appendice de cet article). Cette question m'avait été posée par F. Pham, ce dont je le remercie avec plaisir.

2. CARACTÉRISATION DES ENSEMBLES M-DENSES

Désignons par  $L$  le conoyau du morphisme de faisceaux  $M : \mathcal{O}^q \rightarrow \mathcal{O}^p$  ; en tensorisant par  $\mathcal{E}$ , on obtient une suite exacte :

$$\mathcal{E}^q \longrightarrow \mathcal{E}^p \longrightarrow L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

\*) à paraître dans les "Inventiones".

et, par partition de l'unité, une suite exacte pour les sections :

$$\mathcal{E}^q(X) \rightarrow \mathcal{E}^p(X) \rightarrow \Gamma(X, L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}) \rightarrow 0 .$$

On déduit de là que la propriété " Y est M dense " ne dépend en fait que de L , et peut s'exprimer ainsi :

"Soit  $\varphi \in \Gamma(X, L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E})$  ; pour qu'on ait  $\varphi = 0$  , il faut et il suffit que,  
 $\forall a \in Y$ , l'image  $\hat{\varphi}_a$  de  $\varphi_a$  dans  $L_a \otimes_{\mathcal{O}_a} F_a = \hat{L}_a$  par l'application (identité  $\otimes_{\mathcal{O}_a}$   
 série de Taylor en a) soit nulle".

Posons  $V = \text{supp}(L) = \{a \in X \mid L_a \neq 0\}$  ; en tout point  $a \in X - V$ , la dernière condition est trivialement vérifiée ; par conséquent, on peut supposer (quitte à remplacer Y par  $Y \cap V$ ) que l'on a  $Y \subset V$  , ce que nous ferons désormais. Pour tout point  $a \in V$  , soient  $\mathfrak{p}_{a,i}$  ( $1 \leq i \leq \ell(a)$ ) les idéaux premiers de  $\mathcal{O}_a$  associés à  $L_a$  (Bourbaki [1]), et soit  $V_{a,i}$  le germe en a de sous-ensemble analytique-réel de X défini par  $\mathfrak{p}_{a,i}$  (i.e. le germe des zéros de  $\mathfrak{p}_{a,i}$ ). Désignons encore par  $V_a$  le germe de V en a ; la proposition suivante est bien connue :

PROPOSITION 2.1. On a  $V_{a,i} \subset V_a$  , et  $V_a = \bigcup_i V_{a,i}$  ( $1 \leq i \leq \ell(a)$ ) .

Rappelons sa démonstration ; soit  $0 = \bigcap L_{a,i}$  une décomposition primaire réduite de 0 dans  $L_a$  , avec  $L_{a,i}$  primaire pour  $\mathfrak{p}_{a,i}$  ; soit  $L_i$  un sous-faisceau analytique cohérent de L , défini au voisinage de a , tel qu'on ait  $(L_i)_a = L_{a,i}$  ; on a encore  $0 = \bigcap L_i$  , donc l'application diagonale  $L \rightarrow \bigoplus (L/L_i)$  est injective, d'où  $V_a = \bigcup \text{supp}(L/L_i)_a$ . Tout revient donc à montrer qu'on a  $(L/L_i)_a = V_{a,i}$  , c'est-à-dire qu'on est ramené au cas où  $L_a$  est coprimaire pour un idéal  $\mathfrak{p}_a$  .

Dans ce cas, on sait qu'il existe une suite de composition

$$L_a = \bar{L}_{a,1} \supset \bar{L}_{a,2} \supset \dots \supset \bar{L}_{a,p+1} = 0$$

telle que  $\bar{L}_{a,i}/\bar{L}_{a,i+1}$  soit monogène et isomorphe à  $\mathcal{O}_a/\mathcal{Q}_{a,i}$  ,  $\mathcal{Q}_{a,i}$  idéal premier de  $\mathcal{O}_a$  contenant  $\mathfrak{p}_a$  ; on peut aussi supposer  $\mathcal{Q}_{a,p} = \mathfrak{p}_a$  , puisque  $L_a$  contient un sous-module monogène isomorphe à  $\mathcal{O}_a/\mathfrak{p}_a$  , soient  $\bar{L}_i$  des sous-faisceaux cohérents de L , définis au voisinage de a , vérifiant  $(\bar{L}_i)_a = \bar{L}_{a,i}$  , on a encore, au voisinage de a ,  $\bar{L}_i/\bar{L}_{i+1} \simeq \mathcal{O}/\mathcal{Q}_i$  ,  $\mathcal{Q}_i$  un faisceau cohérent d'idéaux vérifiant  $(\mathcal{Q}_i)_a = \mathcal{Q}_{a,i}$  ; par suite, on a, avec  $\mathfrak{p} = \mathcal{Q}_p$  :

$$\text{supp}(L)_a = \bigcup_i \text{supp}(L_i/L_{i+1})_a = \bigcup_i \text{supp}(\mathcal{O}/\mathcal{Q}_i)_a = \text{supp}(\mathcal{O}/\mathfrak{p})_a$$

ce qui démontre la proposition.

Remarque 2.2. La décomposition précédente de  $V_a$  ne doit pas être confondue avec sa "décomposition en germes irréductibles" ; les deux décompositions n'ont presque aucun rapport pour les raisons suivantes :

D'une part, les  $V_{a,i}$  ne sont pas forcément irréductibles ; ensuite il se peut que l'on ait  $V_{a,i} \subseteq V_{a,j}$ , pour  $i \neq j$ , soit que l'on ait  $\mathfrak{P}_{a,i} \supset \mathfrak{P}_{a,j}$  ("composantes immergées" de la décomposition primaire), soit encore simplement parce que en analytique-réel, le "Nullstellensatz" est faux. Naturellement dans le cas analytique-complexe, de ces trois accidents, seul le second peut se produire.

THÉORÈME 2.3. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a)  $Y$  est M-dense ;

b) Pour tout point  $a \in V$  et tout  $i \leq l(a)$ , on a  $V_{a,i} \cap Y_a \neq \emptyset$  ;

(autrement dit : soit  $\tilde{V}_{a,i}$  un représentant de  $V_{a,i}$  au voisinage de  $a$  ; alors  $\tilde{V}_{a,i} \cap Y$  est adhérent à  $a$ ).

Démontrons d'abord a)  $\Rightarrow$  b) . Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point  $a \in V$  et un  $i$  tels qu'on ait  $V_{a,i} \cap Y_a = \emptyset$  ; il existe  $\varphi$ , section de  $L$  au voisinage de  $a$  tel que le noyau de l'application

$$f \mapsto f\varphi : \mathcal{O}_a \rightarrow L_a$$

soit égal à  $\mathfrak{P}_{a,i}$  ; au voisinage de  $a$ , soit  $\mathfrak{P}_i$  le faisceau cohérent d'idéaux de  $\mathcal{O}$  tel que  $(\mathfrak{P}_i)_a = \mathfrak{P}_a$  ; l'application  $f \mapsto f\varphi$  donne encore une suite exacte  $0 \rightarrow \mathfrak{P}_i \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow L$  ; l'application naturelle  $L \rightarrow L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$  est injective (parce que, pour tout  $b$ ,  $\mathcal{E}_b$  est fidèlement plat sur  $\mathcal{O}_b$ , cf. Malgrange [1] ; ou, plus simplement, parce que l'application composée

$$L_b \rightarrow L_b \otimes_{\mathcal{O}_b} \mathcal{E}_b \rightarrow L_b \otimes_{\mathcal{O}_b} F_b$$

est injective,  $F_b$  étant fidèlement plat sur  $\mathcal{O}_b$ , cf. Bourbaki [1]) ; on peut donc considérer  $\varphi$  comme une section au voisinage de  $a$  de  $L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$ , dont le germe en  $a$  est  $\neq 0$  ; soit  $\psi \in \mathcal{E}(X)$ , égal à 1 au voisinage de  $\mathcal{O}_a$ , et à support compact ; si le support de  $\psi$  est assez voisin de  $a$ ,  $\psi\varphi$  peut être considéré comme une section de  $L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$  sur  $X$  entier ; si de plus  $\text{supp}(\psi) \cap \tilde{V}_{a,i} \cap Y = \emptyset$ ,  $\tilde{V}_{a,i}$  un représentant convenable de  $V_{a,i}$  au voisinage de  $0$ , on aura  $(\psi\varphi)_b = 0$  pour tout  $b \in Y$  ; a fortiori  $(\widehat{\psi\varphi})_b = 0$  ; mais  $(\psi\varphi)_a \neq 0$ , ce qui montre que  $Y$  n'est pas M-dense.

Démontrons maintenant b)  $\Rightarrow$  a) . Le théorème étant local, il suffit de le démontrer au voisinage d'un point  $a \in X$  fixé. Nous allons procéder pour cela en deux étapes :

Etape 1

Supposons qu'on ait  $L = \mathcal{O}/\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{I}$  faisceau cohérent d'idéaux, avec  $\mathcal{O}_a/\mathcal{I}_a$  réduit, i.e.  $\mathcal{I}_a$  intersection d'idéaux premiers ; soit  $f$  une section de  $\mathcal{E}$  au voisinage de  $a$ , vérifiant, pour tout point  $b \in Y$  voisin de  $a$  :

$$\hat{f}_b \in \mathcal{I}_b \otimes_{\mathcal{O}_b} F_b \quad (= \mathcal{I}_b).$$

Il suffit de montrer qu'on a  $\hat{f}_a \in \hat{\mathcal{I}}_a$  : en effet, d'après un théorème classique de Cartan-Oka, en tout point  $c \in V$ , assez voisin de  $a$ ,  $\mathcal{O}_c/\mathcal{I}_c$  est réduit, et par conséquent, le même raisonnement, appliqué à  $c$  au lieu de  $a$ , montrera qu'on a  $\hat{f}_c \in \hat{\mathcal{I}}_c$ , ce qui est le résultat cherché.

On a  $\mathcal{I}_a = \bigcap \mathfrak{p}_{a,i}$  ( $1 \leq i \leq \ell(a)$ ), donc, par platitude de  $F_a$  sur  $\mathcal{O}_a$  :  $\hat{\mathcal{I}}_a = \bigcap \hat{\mathfrak{p}}_{a,i}$  ; par hypothèse, on a, pour chaque  $i$  :  $Y \cap V_{a,i} \neq \emptyset$  ; ceci montre qu'il suffit de traiter le cas où  $\mathcal{I}_a$  est premier, et, plus précisément, de démontrer le lemme suivant :

**LEMME 2.4.** Soient  $\mathcal{I}$  un faisceau cohérent d'idéaux, avec  $\mathcal{I}_a$  premier,  $Y$  un sous-ensemble de  $V = \text{supp}(\mathcal{O}/\mathcal{I})$ , avec  $Y_a \neq \emptyset$ , et  $f$  une section de  $\mathcal{E}$  au voisinage de  $a$ , vérifiant  $\forall b \in Y : \hat{f}_b \in \hat{\mathcal{I}}_b$  ; alors, on a  $\hat{f}_a \in \hat{\mathcal{I}}_a$ .

Posons  $k = \dim \mathcal{O}_a/\mathcal{I}_a$  ; on sait que, en tout point  $b \in V$  voisin de  $a$ , on a encore  $k = \dim \mathcal{O}_b/\mathcal{I}_b$ , donc  $k = \dim F_b/\hat{\mathcal{I}}_b$ . Pour tout point  $b \in X$ , voisin de  $a$ , soit  $\mathcal{K}_b$  l'idéal de  $F_b$  engendré par  $\hat{\mathcal{I}}_b$  et  $\hat{f}_b$  ; on sait (Tougeron [1]) que la fonction  $b \mapsto \dim F_b/\mathcal{K}_b$  est semi-continue supérieurement au voisinage de  $a$  (en un point où  $\mathcal{K}_b = F_b$ , on pose par exemple  $\dim F_b/\mathcal{K}_b = -1$ ) ; par hypothèse, pour  $b \in Y$ , on a  $\mathcal{K}_b = \hat{\mathcal{I}}_b$ , donc, puisque  $Y$  est adhérent à  $a$ , on aura  $\dim F_a/\mathcal{K}_a \geq k$ .

D'après un théorème de Nagata-Zariski,  $\hat{\mathcal{I}}_a$  est premier (voir par exemple une démonstration due à Serre, dans Halgrange [2]) ; d'autre part, on a  $\dim F_a/\hat{\mathcal{I}}_a = k$ , et  $\mathcal{K}_a \supset \hat{\mathcal{I}}_a$  ; il en résulte qu'on a nécessairement  $\mathcal{K}_a = \hat{\mathcal{I}}_a$ , d'où  $\hat{f}_a \in \hat{\mathcal{I}}_a$ , ce qui démontre le lemme et achève la première étape.

Etape 2 : le cas général :

Soit  $a \in V$ , et soit  $\varphi$  une section de  $L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$ , au voisinage de  $a$ , vérifiant, pour tout  $b \in Y$  voisin de  $a$  :  $\hat{\varphi}_b = 0$ . Pour établir le théorème il suffit de montrer qu'on a  $\hat{\varphi}_a = 0$ . En raisonnant comme dans l'étape précédente, il suffit de traiter le cas où  $L_a$  est coprimaire pour un certain idéal  $\mathfrak{p}_a$ . Reprenons alors les notations de la proposition 2.1., fin de la démonstration. Nous allons démontrer, par récurrence descendante sur  $i$  ( $1 \leq i \leq p+1$ ), le résultat suivant :

LEMME 2.5. Il existe  $g_i$ , analytique au voisinage de  $a$ , avec  $g_{i,a} \notin \mathfrak{p}_a$ , possédant la propriété suivante : si  $\varphi$  est une section de  $\bar{L}_i \otimes \mathcal{E}$  au voisinage de  $a$ , vérifiant,  $\forall b \in Y : \hat{\varphi}_b = 0$ , on a  $g_i \varphi = 0$ .

Pour  $i = p+1$ , le résultat est trivial, puisque  $\bar{L}_{p+1} = 0$ . Supposons alors le résultat acquis pour  $i+1$ , et démontrons-le pour  $i$ ; soit  $\psi$  l'image de  $\varphi$  dans l'espace des sections de  $(\bar{L}_i/\bar{L}_{i+1}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} \simeq \mathcal{E}/\mathcal{Q}_i \mathcal{E}$ ; si  $\mathcal{Q}_i = \mathfrak{p}$ , par la première étape, on a  $\psi = 0$ , donc en fait  $\varphi$  est une section de  $\bar{L}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$  (noter que, par platitude de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{O}$ , l'application

$$\bar{L}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} \rightarrow \bar{L}_i \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$$

est injective; on peut donc considérer le premier comme un sous-faisceau du second); dans ce cas, le lemme est vrai avec  $g_i = g_{i+1}$ . Si au contraire  $\mathcal{Q}_{i,a} \neq \mathfrak{p}_a$ , il existe  $h$  analytique au voisinage de  $a$ , avec  $h_a \in \mathcal{Q}_{i,a}$  et  $h_a \notin \mathfrak{p}_a$ ; on aura  $h\psi = 0$  au voisinage de  $a$ , donc  $h\varphi$  est une section de  $\bar{L}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$  et le lemme sera vrai avec  $g_i = hg_{i+1}$ .

Achevons maintenant la démonstration : soit  $\varphi$  une section de  $L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$  au voisinage de  $a$ , vérifiant,  $\forall b \in Y, \hat{\varphi}_b = 0$ ; on a  $g_1 \varphi = 0$ , donc en particulier  $\hat{g}_{1,a} \hat{\varphi}_a = 0$ . Comme  $g_{1,a} \notin \mathfrak{p}_a$ , l'homothétie  $g_{1,a} : L_a \rightarrow L_a$  est injective; par suite (platitude de  $F_a$  sur  $\mathcal{O}_a$ ) l'homothétie  $\hat{g}_{1,a} : \hat{L}_a \rightarrow \hat{L}_a$  est aussi injective; par suite on a  $\hat{\varphi}_a = 0$ , ce qui démontre le théorème.

## BIBLIOGRAPHIE

- N. BOURBAKI [1] : "Algèbre commutative", chap. 3 et 4, Hermann, Paris (1962).  
 B. MALGRANGE [1] : "Ideals of differentiable functions", Oxford University Press, Bombay (1966).  
 B. MALGRANGE [2] : "Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques", Bull. Soc. Math. Fr. 91 (1963), p. 113-127.  
 J.C. TOUGHERON [1] : "Idéaux de fonctions différentiables", Ann. Inst. Fourier, 18-1 (1968), p. 177-240.

E I

RE