Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jindrich Nečas

Sur la régularité des solutions faibles des équations elliptiques non-linéaires

Séminaire Jean Leray (1967-1968), p. 20-57
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1967-1968____20_0>

SUR LA RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS FAIBLES DES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES NON-LINÉAIRES

par

Jindrich NEČAS (Prague)

§ 1. Introduction.

Considérons un système elliptique d'équations aux dérivées partielles pour le vecteur inconnu $u = (u_1, u_2, \ldots, u_\nu)$ et cherchons une solution faible appartenant au produit W des espaces de Sobolev : $W \equiv \prod_{r=1}^{\nu} W_m^{(\chi_r)}(\Omega)$, $i < m < \infty$, Ω étant un domaine borné de l'espace euclidien E_N. Comme d'habitude, on note

$$D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_N^{i_N}} .$$

Le système est de la forme

$$(1.1) \qquad \sum_{|i| \leqq \chi_r} (-1)^{|i|} D^i a_i^r(x, D^j u_s) = f_r , \qquad r = 1,2\ldots,\nu ,$$

ou sous forme intégrale

$$(1.2) \qquad \int_\Omega \sum_{r=1}^{\nu} \sum_{|i| \leqq \chi_r} D^i \varphi_r \, a_i^r(x, D^j u_s) dx = \int_\Omega \varphi_r f_r dx, \qquad \varphi_r \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

Considérons le problème de Dirichlet : on se donne encore $u^\circ \in W$ et on cherche u de W satisfaisant (1.1) ou la forme intégrale (1.2), tel que

$$\frac{\partial^\ell u_r}{\partial n^\ell} = \frac{\partial^\ell u_r^\circ}{\partial n^\ell}$$

sur la frontière $\partial\Omega$ pour $\ell = 0, 1, \ldots, \chi_r - 1$, $\frac{\partial}{\partial n}$ étant la dérivée selon la normale extérieure.

Les problèmes fondamentaux sont :

I. Existence, unicité, dépendance continue des données.

II. Régularité de la solution faible.

III. Existence des solutions très faibles et leur régularité.

En ce qui concerne la question I, la partie concernant l'existence et l'unicité est résolue d'une manière satisfaisante, cf. par exemple M.I. Višik [1], F.E. Browder [2], J. Leray-J.L. Lions [3].

Pour la question II, dont nous nous occuperons, on peut la considérer comme une question classique, formulée par D. Hilbert comme son 19e problème et étroitement liée avec la position du problème et par là avec la question I.

Si nous nous bornons à l'étude des solutions faibles, nous pouvons donner l'aperçu suivant de la résolution de ce problème, à savoir la démonstration que la solution appartient à $\prod_{r=1}^{\nu} C^{(\chi_r),\mu}(\Omega)$ s'il s'agit de la régularité à l'intérieur du domaine ou à

$$\prod_{r=1}^{\nu} {}^{(\chi_r),\mu}(\bar{\Omega})$$

s'il s'agit de la régularité jusqu'à la frontière :

[5] Ch.B. Morrey, 1939, $N = 2$, $\nu \geqq 1$ (pratiquement $\nu = 1$), $\chi_r = 1$, $m = 2$.

[4] E. De Giorgi, 1957, $N \geqq 2$, $\nu = 1$, $\chi = 1$, $m = 2$.

[7] O.A. Ladyženskaja-N.N. Uralceva 1959, $N \geqq 2$, $\nu = 1$, $\chi = 1$, $1 < m < \infty$

[7] O.A. Ladyženskaja-N.N. Uralceva 1959, $N \geqq 2$, $\nu \geqq 1$ (pratiquement $\nu = 1$), $\chi_r = 1$, $m = 2$.

[6] Ch.B. Morrey, 1960, $N \geqq 2$, $\nu = 1$, $\chi = 1$, $1 < m < \infty$.

[8] J. Nečas, 1966, $N = 2$, $\nu = 1$, $\chi \geqq 1$, $m = 2$.

[9] J. Nečas, 1967, $N = 2$, $\nu = 1$, $\chi \geqq 1$, $1 < m < \infty$.

Le succès de la résolution du problème pour une équation du deuxième ordre est basé sur le théorème de De Giorgi-Nash, cf. E. De Giorgi [4] ; voici la généralisation de ce théorème par G. Stampacchia, cf. [18] : si u est une solution faible de l'équation linéaire

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f \qquad \text{avec} \quad c\,|\xi|^2 \leqq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j ,$$

$$a_{ij} \in L_\infty(\Omega), \qquad f \in L_p \;, \quad p > \frac{N}{2} , \qquad \text{alors} \qquad u \in C^{(0),\mu}(\Omega) .$$

Revenons au système (1.1). Formellement, on obtient de (1.1), en dérivant :

$$(1.3) \qquad \sum_{|i|\leqq\chi_r} \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{|j|\leqq\chi_s} (-1)^{|i|} D^i\left(\frac{\partial a_i^r}{\partial D^j u_s} D^j \frac{\partial u_s}{\partial x_\ell}\right) = \frac{\partial f_r}{\partial x_\ell} - \sum_{|i|\leqq\chi_r} (-1)^{|i|} D^i \frac{\partial a_i^r}{\partial x_\ell}$$

ce qui est un système linéaire pour $\frac{\partial u_s}{\partial x_\ell}$. Pour $m = 2$, on a

$$\frac{\partial a_i^r}{\partial D^j u_s} \in L_\infty ,$$

alors dans le cas $\nu = 1$, $\chi = 1$, on peut utiliser le théorème de De Giorgi-Nash. Si $m \neq 2$, il suffit de savoir que les premières dérivées sont bornées. Pour $m \geqq 2$, on peut obtenir ceci à partir de (1.2) en posant

$$\varphi = \left|\frac{\partial u}{\partial x_\ell}\right|^\lambda \sigma$$

avec σ indéfiniment différentiable, $\sigma \geqq 0$, et en faisant tendre $\lambda \to \infty$; pour les détails cf. E.R. Buley [20] ou J. Nečas [19].

La méthode utilisée par Ch.B. Morrey dans son travail [5] est basée sur l'estimation suivante : si dist $(K_r(x_0), \partial\Omega) \equiv d > 0$ *), alors sous les hypothèses du travail en question, l'intégrale

$$\int_{K_r(x_0)} \sum_{|i|=2} \sum_{s=1}^{\nu} (D^i u_s)^2 dx \leqq c(d) r^\lambda \qquad 0 < \lambda \quad ;$$

il s'ensuit facilement que $u \in C^{(1),\mu}(\Omega)$ avec $\mu = \frac{\lambda}{2}$.

La même idée est utilisée dans le travail de l'auteur [8] ; dans nos conférences, nous reviendrons aux espaces L_p , $p > 2$ et utiliserons un analogue du théorème de De Giorgi-Nash valable pour le cas $\nu = 1$, $\chi \equiv k \geqq 1$: si $u \in W_2^{(k)}(\Omega)$ est une solution faible de l'équation

$$(1.4) \qquad \sum_{|i|=|j|=k} D^i(A_{ij} D^j u) = \sum_{|i|=k} D^i f_i \qquad \text{avec} \quad f_i \in L_p \ , \qquad p > 2 \ ,$$

si

$$\gamma_1 \sum_{|i|=k} \xi_i^2 \leqq \sum_{|i|=|j|=k} A_{ij} \xi_i \xi_j \leqq \gamma_2 \sum_{|i|=k} \xi_i^2$$

(et ici pour simplifier si $A_{ij} = A_{ji}$), alors $u \in W_{p_1}^{(K)}(\Omega')$, $\forall\ \Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$ avec p_1 satisfaisant $2 < p_1 \leqq p$. Malheureusement, on ne peut pas démontrer que $p_1 > N$ pour $N \geqq 3$, il existe un contre-exemple, cf. N.G. Meyers [22]. On voit que le cas $m = 2$, si on considère la régularité à l'intérieur du domaine, est résolu par ce théorème. Si $1 < m < \infty$, on peut démontrer une estimation <u>a priori</u> pour $C^{(K)}(\Omega')$ et à partir de ceci on revient à l'équation (1.4).

Nous nous occuperons dans nos conférences du cas $N = 2$, $\nu = 1$, $k \geqq 1$, $1 < m < \infty$. Pour les autres cas, cf. les livres déjà cités de Ch.B. Morrey [6] et de O.A. Ladyženskaja-N.N. Uralceva [7].

....

Après avoir rédigé ces conférences, j'ai pris connaissance des travaux de E. De Giorgi [23], E. Giusti-M. Miranda [24], Ch. B. Morrey [25] (qui ne sont pas encore tous publiés) qui complètent d'une manière essentielle l'aperçu ci-dessous. E. De Giorgi montre que la fonction $u = x|x|^\alpha$, avec

$$\alpha = -\frac{N}{2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(2N-2)^2+1}}\right] , \qquad N \geqq 3 ,$$

est une extrêmale appartenant à $[W_2^{(1)}]^N$ de la fonctionnelle

*) $K_r(x_0) \equiv \{x, |x-x_0| < r\}$.

$$\int_\Omega [((N-2)\sum_{h=1}^{N}\frac{\partial u_h}{\partial x_h} + N\sum_{h,k=1}^{N}\frac{x_k x_h}{|x|^2}\frac{\partial u_h}{\partial x_k})^2 + \sum_{h,k=1}^{N}(\frac{\partial u_h}{\partial x_k})^2]dx$$

et satisfait alors au système elliptique linéaire

$$\sum_{s=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}^{rs}\frac{\partial u^s}{\partial x_j}) = 0 , \qquad r = 1, 2,\dots,N$$

pour lequel la condition d'ellipticité

$$\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{r,s=1}^{N} a_{ij}^{rs}\xi_i^r\xi_j^s \geqq c\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(\xi_i^s)^2$$

est valable. Le vecteur $x|x|^\alpha$ n'est pas borné au voisinage de l'origine.

On voit aisément, comme cela est remarqué dans ce travail, que la fonction $f(x) = |x|^{\alpha+2}$ de $W_2^{(2)}$ n'est pas dans $C^{(1),\mu}$ au voisinage de l'origine, quoiqu'elle soit une extrêmale de la fonctionnelle

$$\int_\Omega [((N-2)\Delta f + N\sum_{h,k=1}^{N}\frac{x_h x_k}{|x|^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_h\partial x_k})^2 + \sum_{h,k=1}^{N}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_h})^2]dx.$$

$f(x)$ satisfait alors à une équation du quatrième ordre

$$\sum_{|i|=|j|=2} D^i(a_{ij}D^j f) = 0 ,$$

où la condition d'ellipticité :

$$\sum_{|i|=|j|=2} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqq c\sum_{|i|=2}\xi_i^2$$

est valable. Les contre-exemples de E. De Giorgi montrent que le procédé de linéarisation mentionné ci-dessus n'est pas applicable pour $\nu > 1$, $N \geqq 3$ ou $\nu \geqq 1$, $k \geqq 2$, $N \geqq 3$.

Une réponse partielle à ce qui se passe dans le cas non linéaire pour $\nu > 1$, $N \geqq 3$ et $\nu = 1$, $k \geqq 2$ est contenue dans le contre-exemple de E. Giusti-M.Miranda: le vecteur $u = \frac{x}{|x|}$ est une extrêmale pour $N \geqq 3$, appartenant à $[W_2^{(1)}]^N$, de la fonctionnelle

$$\int_\Omega [\sum_{i,j=1}^{N}(\frac{\partial v_j}{\partial x_i})^2 + \{\sum_{i,j=1}^{N}(\delta_{ij} + \frac{4}{N-2}\frac{v_i v_j}{1+|v|^2})\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\}^2]dx$$

et si on considère le problème de Dirichlet pour une boule $K_r(0)$ et pour $u^\circ = \frac{x}{|x|}$, le vecteur en question est sa solution unique pour N assez grand. L'extrêmale u satisfait au système non linéaire

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i^r(u, \frac{\partial u_s}{\partial x_j}) + a_r(\frac{\partial u_s}{\partial x_j}) = 0 , \qquad r = 1,2,\dots,N ,$$

où la condition d'ellipticité

$$\sum_{r,s=1}^{N} \sum_{i,j=1} \frac{\partial a_i^r}{\partial(\frac{\partial u_j}{\partial x_j})} \xi_i^r \xi_j^s \geqq c \sum_{r=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} (\xi_i^r)^2$$

est valable. D'autre part, on a

$$\left|\frac{\partial a_i^r}{\partial u_\ell}\right| \leqq c \sum_{s=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left|\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right|$$

qui est une condition plus faible que les nôtres, cf. § 2 et le livre [6].

En vertu des contre-exemples cités, il faut chercher une autre définition du problème de la régularité pour qu'on obtienne un résultat affirmatif dans le cas $\nu > 1$, $N \geqq 3$ (ou $h > 1$, $\nu \geqq 1$, $N \geqq 3$). Ceci est fait dans le travail de Ch. B. Morrey [25], où l'auteur considère les systèmes généraux mentionnés ci-dessus.

Le résultat principal : sous les conditions de croissance pour a_i^r, correspondantes aux nôtres et sous la condition d'ellipticité :

$$\sum_{i,j=1}^{\nu} \sum_{|\alpha|=\chi_i} \sum_{|\beta|=\chi_j} \frac{\partial a_\alpha^i}{\partial \zeta_\beta^j} (x, \zeta_\gamma^\ell) \xi_\alpha^i \xi_\beta^j \geqq c\, V^{m-2} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{|\alpha|=\chi_i} (\xi_\alpha^i)^2 ,$$

où

$$V = 1 + \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{|\alpha|=\chi_i} |\zeta_\alpha^i| ,$$

l'auteur démontre pour la solution faible de (1.1) avec $f_r \equiv 0$ que $u_i \epsilon C^{(\chi_i)}(D)$ avec $D = \Omega - Z$ où Z est un sous-ensemble localement compact de mesure nulle.

§ 2. Les hypothèses.

Le domaine Ω en question est à frontière lipschitzienne. Pour les estimations au voisinage de la frontière, on supposera la frontière $\partial\Omega$ indéfiniment continûment différentiable : $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. On désigne par $\mathcal{E}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions réelles, indéfiniment continûment différentiables dans $\bar{\Omega}$ et par $\mathcal{D}(\Omega)$ le sous-espace de $\mathcal{E}(\bar{\Omega})$ des fonctions à support compact. La notation usuelle

$$D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_N^{i_N}}$$

est utilisée. On introduit $W_m^{(k)}(\Omega)$, l'espace des fonctions réelles, dont les dérivées au sens des distributions jusqu'à l'ordre k sont de puissance m-ème sommable sur Ω, muni de la norme

$$\|u\|_{W_m^{(k)}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} |D^i u(x)|^m dx\Big)^{1/m} .$$

On note par $\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$. Désignons par $W_p^{(k)}(\Omega)$ pour k entier négatif, le dual de $\overset{\circ}{W}{}_{p'}^{(-k)}(\Omega)$ (toujours $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ dans la suite) avec la norme du dual. On désigne par $C^{(k)}(\Omega)$ l'espace des fonctions k-fois continûment différentiables dans Ω et par $C^{(k)}(\bar\Omega)$ l'espace des fonctions k-fois continûment différentiables dans $\bar\Omega$ avec la norme habituelle. On note encore par $C^{(k),\mu}(\bar\Omega)$ l'espace des fonctions, dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont μ-höldériennes dans $\bar\Omega$, $0<\mu\leq 1$, muni de la norme

$$\|u\|_{C^{(k),\mu}(\bar\Omega)} = \max_{x\in\bar\Omega} \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha u(x)| + \sup_{x\neq y,\, x,y\in\bar\Omega} \sum_{|\alpha|=k} \frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\mu} .$$

Nous utiliserons les théorèmes d'immersion de Sobolev: pour un exposé complet, cf. par exemple le livre [12] de l'auteur.

LEMME 2.1. <u>Soit</u> $\Omega\subset E_N$, $N\geq 2$, <u>un domaine à frontière lipschitzienne</u>. <u>Alors</u> $\overline{\mathcal{E}(\bar\Omega)} = W_m^{(k)}(\Omega)$. <u>Si</u> $km<N$, $W_m^{(k)}(\Omega)\subset L_q(\Omega)$ <u>algébriquement et topologiquement avec</u> $\frac{1}{q}=\frac{1}{m}-\frac{k}{N}$. <u>Si</u> $\frac{1}{q}>\frac{1}{m}-\frac{k}{N}$, <u>l'application identique de</u> $W_m^{(k)}(\Omega)$ <u>dans</u> $L_q(\Omega)$ <u>est complètement continue</u>. <u>Si</u> $km=N$, $W_m^{(k)}(\Omega)\subset L_q(\Omega)$ <u>algébriquement et topologiquement pour chaque</u> q, $1\leq q<\infty$ <u>et l'application identique de</u> $W_m^{(k)}(\Omega)$ <u>dans</u> $L_q(\Omega)$ <u>est complètement continue</u>. <u>Si</u> $km>N$ <u>et</u> $\mu=k-\frac{N}{m}$ <u>si</u> $k-\frac{N}{m}<1$, $\mu<1$ <u>si</u> $k-\frac{N}{m}=1$ <u>et</u> $\mu=1$ <u>si</u> $k-\frac{N}{m}>1$, <u>alors</u> $W_m^{(k)}(\Omega)\subset C^{(0),\mu}(\bar\Omega)$ <u>algébriquement et topologiquement</u>.

Désignons par $a_i(x,\zeta_j)$ les fonctions continues pour $x\in\bar\Omega$, $-\infty<\zeta_j<\infty$, $|j|\leq k$. Nous supposerons toujours dans la suite :

(2.1) $$|a_i(x,\zeta_j)| \leq c\Big(1+\sum_{j\in M}|\zeta_j|\Big)^{m-1}, \qquad 1<m<\infty ,$$

où M est un sous-ensemble des indices $|j|\leq k$, contenant les indices $|j|=k$. Soit pour $m\geq 2$:

(2.2) $$u_0\in W_m^{(k)}(\Omega) ,$$

pour $1<m<2$:

(2.3) $$u_0\in W_2^{(k)}(\Omega),$$

pour $m\geq 2$, $|i|\leq k$:

(2.4) $$f_i\in L_2(\Omega) ,$$

pour $1 < m < 2$:

(2.5) $$f_i \in L_{m'}(\Omega) , \qquad \frac{1}{m'} + \frac{1}{m} = 1 .$$

Désignons par $\rho(x) \equiv \text{dist}\,(x,\partial\Omega)$. Pour les estimations à l'intérieur du domaine, nous supposerons encore : si $m \geqq 2$,

(2.6) $$\int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}\right|^{p_0} \rho^{kp_0} dx < c , 2 < p_0 < \frac{2N}{N-2} ,$$

et pour $1 < m < 2$:

(2.7) $$\int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}\right|^{m'} \rho^{km'} dx < c .$$

Pour les estimations jusqu'à la frontière, nous supposerons si $m \geqq 2$:

(2.8) $$f_i \in W^{(1)}_{p_0}(\Omega), \qquad p_0 > 2 ,$$

(2.9) $$u_0 \in C^{(k),\mu_0}(\bar{\Omega}) \cap W^{(k+1)}_m(\Omega) \cap W^{(k+1)}_{p_1}(\Omega) , \qquad p_1 > p_0$$

et si $1 < m < 2$:

(2.10) $$f_i \in W^{(1)}_{m'}(\Omega)$$

et (2.9).

Une fonction u de $W^{(k)}_m(\Omega)$ sera la solution faible du problème de Dirichlet.

(2.11a) $$\sum_{|i|\leqq k} (-1)^{|i|} D^i a_i(x,D^j u) = \sum_{|i|\leqq k} (-1)^{|i|} D^i f_i$$

dans Ω ,

(2.11b) $$\frac{\partial^j u}{\partial n^j} = \frac{\partial^j u_0}{\partial n^j} , \qquad j = 0,1,\dots,k-1 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

(où $\frac{\partial^j}{\partial n^j}$ signifie la j-ème dérivée selon la normale extérieure à $\partial\Omega$) si pour chaque $v \in \overset{\circ}{W}{}^{(k)}_m(\Omega)$:

(2.12) $$\int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} D^i v\, a_i(x,D^j u)dx = \int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} D^i v f_i dx$$

et si

(2.13) $$u - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^{(k)}_m(\Omega) .$$

Désignons par $V = 1 + \sum_{\alpha\in M} |\zeta_\alpha|$. Si $m = 2$, on supposera :

(2.14) $$\sum_{|i|\leqq k} \zeta_i a_i(x, \zeta_j) \geqq c_1 \sum_{i\in M} \zeta_i^2 - c_2 ,$$

(On désigne les constantes positives par le même symbole c. Si nécessaire, on utilisera des indices. Les constantes ayant toujours la même signification dans ce travail, seront indiquées par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$) et on supposera l'existence des dérivées

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}, \quad \frac{\partial a_i}{\partial \zeta_j} \equiv a_{ij}$$

continues pour $x \in \bar{\Omega}$, $|\zeta_j| < \infty$. On supposera :

$$(2.15) \qquad \left|\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}(x, \zeta_j)\right| \leqq c\, V ,$$

$$(2.16) \qquad |a_{ij}(x, \zeta_\alpha)| \leqq c ,$$

$$(2.17a) \qquad \gamma_1 \sum_{|i|=k} \xi_i^2 \leqq \sum_{|i|,|j|\leqq k} a_{ij}(x, \zeta_\alpha)\xi_i\xi_j \leqq \gamma_2 \sum_{|i|\leqq k} \xi_i^2 ,$$

$$(2.17b) \qquad \left|\sum_{|i|=|j|=k} \tfrac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})\xi_i\eta_j\right| \leqq \vartheta\gamma_1 \Big(\sum_{|i|=k} \xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{|i|=k} \eta_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \vartheta < 1 .$$

Si $m \neq 2$, nous supposerons pour les coefficients $a_i(x, \zeta_j)$ une certaine propriété qui permettra de considérer une classe homotopique des opérateurs non-linéaires. Pour ceci, désignons par

$$V_{\lambda_\tau} = 1 + \lambda_\tau \sum_{\alpha \in M} |\zeta_\alpha|$$

et en posant $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\sigma)$:

$$V_\lambda = \prod_{i=1}^{\sigma} V_{\lambda_i} .$$

Le cas $m > 2$, <u>régularité à l'intérieur du domaine</u> : posons $\sigma = [\frac{m}{2}]$, $h = \frac{m-2}{\sigma}$. Nous supposerons l'existence de fonctions $(a_i(x, \zeta_j, \lambda)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\sigma)$, définies pour $x \in \bar{\Omega}$, $|\zeta_j| < \infty$, $0 \leqq \lambda_\tau \leqq 1$, continues dans leur domaine de définition ainsi que les dérivées

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}, \quad \frac{\partial a_i}{\partial \zeta_j} \equiv a_{ij}$$

et telles que $a_i(x,\zeta_j,0) = a_i(x,\zeta_j)$. Enfin, on supposera :

$$(2.18) \qquad \sum_{|i|\leqq k} a_i(x,\zeta_j,\lambda)\zeta_i \geqq c_1\, V_\lambda^{-h} \sum_{i \in M} |\zeta_i|^m - c_2 ,$$

$$(2.19) \qquad |a_i(x,\zeta_j,\lambda)| + \left|\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}(x,\zeta_j,\lambda)\right| \leqq c\, V^{m-1}\, V_\lambda^{-h} ,$$

$$(2.20) \qquad |a_{ij}(x,\zeta_\alpha,\lambda)| \leqq c\, V^{m-2}\, V_\lambda^{-h} ,$$

$$(2.21a)\qquad \gamma_1 V^{m-2} V_\lambda^{-h} \sum_{|i|=k} \xi_i^2 \leqq \sum_{|i|,|j|\leqq k} a_{ij}(x,\zeta_\alpha,\lambda)\xi_i\xi_j \leqq \gamma_2 V^{m-2} V_\lambda^{-h} \sum_{|i|\leqq k} \xi_i^2 ,$$

$$(2.21b)\qquad \Big|\sum_{|i|=|j|=k} \tfrac{1}{2}(a_{ij}(x,\zeta_\alpha,\lambda) - a_{ij}(x,\zeta_\alpha,\lambda))\xi_i\eta_j\Big|$$
$$\leqq \gamma_1 \theta \Big(\sum_{|i|=k} \xi_i^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{|i|=k} \eta_i^2\Big)^{\frac12} , \qquad \theta < 1 .$$

<u>Exemple</u> 1. Si nous cherchons le minimum de la fonctionnelle

$$\int_\Omega \Big(1 + \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha u)^2\Big)^{m/2} dx$$

dans la classe des fonctions satisfaisant (2.13), nous obtenons pour la solution, la condition (2.12) avec $f_i \equiv 0$ et avec

$$a_i(x,\zeta_j) = m\Big(1 + \sum_{|\alpha|=k} \zeta_\alpha^2\Big)^{\frac{m}{2}-1} \zeta_i .$$

Si nous posons

$$a_i(x,\zeta_j,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\zeta_i}\Big[\Big(1 + \sum_{|\alpha|=k} \zeta_\alpha^2\Big)^{\frac{m}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{\sigma} \Big(1 + \lambda_i^2 \sum_{|\alpha|=k} \zeta_\alpha^2\Big)^{-\frac{h}{2}}\Big] ,$$

nous obtenons les conditions (2.18) (2.21).

<u>Le cas</u> $1 < m < 2$, <u>régularité à l'intérieur du domaine</u> : nous supposons l'existence de fonctions $a_i(x,\zeta_j,\lambda)$ définies pour $x\in\bar\Omega$, $|\zeta_j| < \infty$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, continues dans leur domaine de définition ainsi que les dérivées

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell} , \ \frac{\partial a_i}{\partial \zeta_j} \equiv a_{ij} ,$$

telles que $a_i(x,\zeta_j,0) = a_i(x,\zeta_j)$ et telles que

$$(2.22)\qquad \sum_{|i|\leqq k} \zeta_i a_i(x,\zeta_j,\lambda) \geqq c_1 V_\lambda^{2-m} \sum_{i\in M} |\zeta_i|^m - c_2 ,$$

$$(2.23)\qquad |a_i(x,\zeta_j,\lambda)| + \Big|\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}(x,\zeta_j,\lambda)\Big| \leqq c\, V^{m-1} V_\lambda^{2-m} ,$$

$$(2.24)\qquad |a_{ij}(x,\zeta_\alpha,\lambda)| \leqq c\, V^{m-2} V_\lambda^{2-m} ,$$

$$(2.25a)\qquad \gamma_1 V^{m-2} V_\lambda^{2-m} \sum_{|i|=k} \xi_i^2 \leqq \sum_{|i|,|j|\leqq k} \xi_i^2 \leqq \sum_{|i|,|j|} a_{ij}(x,\zeta_\alpha,\lambda)\xi_i\xi_j$$
$$\leqq \gamma_2 V^{m-2} V_\lambda^{2-m} \sum_{|i|\leqq k} \xi_i^2 ,$$

(2.25b) $$a_{ij} = a_{ji}\ , \qquad |i| = |j| = k$$

Exemple 2. $a_i(x,\zeta_j)$ de l'exemple 1. Si nous posons

$$a_i(x,\zeta_j,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\zeta_i}\left[(1 + \sum_{|\alpha|=k} \zeta_\alpha^2)^{\frac{m}{2}}(1 + \lambda^2 \sum_{|\alpha|=k} \zeta_\alpha^2)^{1-\frac{m}{2}}\right] ,$$

nous obtenons (2.22), (2.25).

Pour la régularité de la solution jusqu'à la frontière, nous remplaçons les conditions sur les $a_i(x,\zeta_j,\lambda)$ par les suivantes : nous supposerons encore l'existence de fonctions $a_i(x,\zeta_j,\mu)$, définies pour $x\in\bar{\Omega}$, $|\zeta_j| < \infty$, $2 \leqq \mu \leqq m$ (ou $m \leqq \mu \leqq 2$ si $1 < m < 2$), continues dans leur domaine de définition avec les dérivées

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}\ ,\ \frac{\partial a_i}{\partial \zeta_j} \equiv a_{ij}\quad ,$$

telles que

$$a_i(x,\zeta_j,m) = a_i(x,\zeta_j)$$

et telles que

(2.26) $$\sum_{|i|\leqq k} \zeta_i a_i(x,\zeta_j,\mu) \geqq c_1 \sum_{|i|=k} |\zeta_i|^\mu - c_2\ ,$$

(2.27) $$|a_i(x,\zeta_j,\mu)| + \left|\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}(x,\zeta_j,\mu)\right| \leqq c\, V^{\mu-1}\quad ,$$

(2.28) $$|a_{ij}(x,\zeta_j,\mu)| \leqq c\, V^{\mu-2}\quad ,$$

(2.29a) $$\gamma_1 V^{\mu-2} \sum_{|i|=k} \xi_i^2 \leqq \sum_{|i|,|j|\leqq k} a_{ij}(x,\zeta_\alpha,\mu)\xi_i\xi_j \leqq \gamma_2 V^{\mu-2} \sum_{|i|\leqq k} \xi_i^2\ ,$$

(2.29b) $$\left|\sum_{|i|=|j|=k} \tfrac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})\xi_i\eta_j\right| \leqq \theta_1 \gamma_1 \Big(\sum_{|i|=k} \xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{|i|=k} \eta_i^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$m \geqq 2$ ($a_{ij} = a_{ji}$ pour $|i|=|j|=k$, $m < 2$).

Exemple 3. On prend a_i de l'exemple 1. Evidemment, il suffit de poser

$$a_i(x,\zeta_j,\mu) = \mu(1 + \sum_{|\alpha|=k} \zeta_\alpha^2)^{\frac{\mu}{2}-1}\zeta_i\ .$$

En ce qui concerne l'existence de la solution du problème (2.12), (2.13), on peut utiliser le théorème de Leray-Lions ou de F. Browder, cf. [3] et [2]. Pour notre but, le théorème suivant nous suffit, cas particulier du théorème de Leray-Lions.

LEMME 2.2. Soit V un espace de Banach, réflexif, séparable, $A(v)$ un opérateur borné de V dans V' (son dual), continu de tout sous-espace de V de dimension finie dans V' faible. On suppose la coercivité :

$$\lim_{\|v\|\to\infty} \frac{(v,A(v))}{\|v\|} = \infty , \tag{2.30}$$

où $(\, , \,)$ désigne la dualité entre V et V'. Alors si $A(v)$ est monotone $(v-u, A(v) - A(u)) \geqq 0$ (strictement monotone : $(v-u, A(v) - A(u)) > 0$ pour $u \neq v$), l'opérateur A est surjectif (biunivoque et A^{-1} est borné).

Pour compléter les résultats de Leray-Lions, nous démontrerons leur théorème sans supposer la séparabilité de V.

THÉORÈME 1 (Leray-Lions). Soit V un espace de Banach réel, réflexif, $A(v)$ un opérateur borné de V dans V', continu de tout sous-espace de V de dimension finie dans V' faible. On suppose (2.30). Alors s'il existe une application bornée de $V \times V$ dans V', soit $A(v,u)$, telle que $A(u,u) = A(u)$ pour $u \in V$ et vérifiant les conditions :

(i) pour chaque v de V l'application $v \to A(v,u)$ est continue de toute droite de V dans V' faible et pour $u,v \in V, (u-v, A(u,u) - A(v,u)) \geqq 0$,

(ii) si $u_n \rightharpoonup u$ dans V et si $(u_n-u, A(u_n,u_n) - A(u,u_n)) \to 0$, alors pour v de V : $A(v,u_n) \rightharpoonup A(v,u)$ dans V',

(iii) si $u_n \rightharpoonup u$ et $A(v,u_n) \rightharpoonup v'$ dans V', alors $(u_n,A(v,u_n)) \to (u,v')$, alors A est surjectif.

Démonstration. Soit $F \subset V$ un sous-ensemble de dimension finie, F' son adjoint et désignons par $(v,f)_F$ la dualité entre F, F'. Définissons A_F de F dans F' par $u,v \in F$: $(u,A_F v)_F = (u,A\,v)$. Si on introduit dans F et F' une base biorthogonale, soit $e_i, e'_j, i, j=1,2,\ldots,\chi$, alors

$$u = \sum_{i=1}^{\chi} x_i e_i \ , \qquad f = \sum_{j=1}^{\chi} y_j e'_j$$

et on peut identifier F, F' avec l'espace euclidien E_χ et A_F avec un opérateur T, continue de E_χ dans E_χ. On voit que $(x,Ty)_{E_\chi} = (u,A_F v)_F$, d'où

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{(x,Tx)}{\|x\|} = \infty .$$

Soit $f \in V'$, $(v,f_F)_F = (v,f)$ et $\eta \in E_\chi$, engendré par f_F . De la coercivité de T il s'ensuit l'existence de $R > 0$, tel que pour $\|x\| \geqq R$ $(x,Tx) - (x,\eta) > 0$. Il s'ensuit que la boule $\|x\| \leqq 2R$ se transforme en elle même par la transformation $x - \varepsilon(Tx-\eta)$, où $\varepsilon > 0$ est assez petit. D'après le théorème de Brower, il existe un point fixe, soit x_F , alors $Tx_F = \eta$. Désignons par u_F le point correspondant dans F. Nous avons alors pour v de F :

$$(v, Au_F) = (v, f) \ . \tag{2.31}$$

De (2.30) il s'ensuit que $\|u_F\| \leqq c$. Désignons par Λ l'ensemble de tous les sous-espaces de V, de dimension finie et par

$$V_{F_0} = \bigcup_{F_0 \subset F \in \Lambda} u_F$$

et par $\bar{V}_{F_0}$ sa fermeture dans la topologie faible. Evidemment, la famille des V_{F_0} possède la propriété des intersections finies. L'espace V étant réflexif, la boule unité est faiblement compacte d'après le théorème de Eberlein-Šmuljan. Il s'ensuit que

$$\bigcap_{F_0 \in \Lambda} \bar{V}_{F_0}$$

n'est pas vide, donc il existe

$$u_0 \in \bigcap_{F_0 \in \Lambda} \bar{V}_{F_0} \ .$$

Soit $v \in V$ et $F_0 \in \Lambda$, l'ensemble contenant v et u_0 . D'après un théorème de Kaplansky, V_{F_0} étant faiblement précompacte, il existe une suite u_n de V_{F_0} , telle que $u_n \rightharpoonup u_0$. Comme u_n est une suite bornée, $A(u_0, u_n)$ l'est aussi, alors on peut supposer que $A(u_0, u_n) \rightharpoonup u'$. Vérifions que

$$(u_n - u_0, A(u_n, u_n) - A(u_0, u_n)) \to 0 \ . \tag{2.32}$$

En effet, $(u_n, A(u_n, u_n)) = (u_n, f) \to (u_0, f)$, $(u_0 A(u_n, u_n)) = (u_0, f)$. D'après (iii): $(u_n, A(u_0, u_n)) \to (u_0, u')$ et enfin $(u_0, A(u_0, u_n)) \to (u_0, u')$; tout cela entraîne (2.32). Alors pour les v en question : $A(v, u_n) \rightharpoonup A(v, u_0)$ et d'après (iii) : $(u_n, A(v, u_n)) \to (u_0, A(v, u_0))$. On a

$$C_n \equiv (u_n - v, A(u_n, u_n) - A(v, u_n)) \to (u_0 - v, f - A(v, u_0)).$$

Mais d'après (i) $C_n \geqq 0$, donc

$$(u_0 - v, f - A(v, u_0)) \geqq 0 \tag{2.33}$$

pour chaque v de V. Si nous posons $v = u_0 - \lambda w, \lambda > 0$, $w \in V$, de (2.33) il s'ensuit que $(w, f - A(u_0 - \lambda w, u_0)) \geqq 0$ et en faisant tendre λ vers 0, on en déduit $(w, f - A(u_0)) \geqq 0$ pour chaque w de V, d'où l'assertion.

Il s'ensuit aisément, sous nos hypothèses, l'existence unique de la solution du problème (2.12), (2,13). En effet, définissons $T(w)$ de $\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)} \to (\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)})'$ en posant

$$(v,T(w)) = \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i v\, a_i(x,D^j u_\circ + D^j w)dx .$$

Posons

$$(v,f) = \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i v f_i dx .$$

L'opérateur T est continu de $\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}$ dans $(\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)})'$ et en vertu de (2.17) ou (2.21) ou (2.25), où l'on pose $\lambda = 0$, est strictement monotone et en vertu de (2.14) ou (2.18) ou (2.22), coercitif. Nous avons utilisé

Remarque 2.1.

$$\left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| = k} |D^\alpha u|^m dx\right)^{1/m}$$

est une norme équivalente dans $\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}$.

Remarquons que beaucoup d'estimations et d'énoncés qui suivront sont valables pour la dimension $N \geqq 2$ quoique le but du travail soit $N = 2$; nous les démontrerons dans ce cas pour N général.

§ 3. Lemmes auxiliaires et lemmes sur la solution faible des équations linéaires.

Considérons $\mathcal{O}$, un domaine borné à frontière $\partial\mathcal{O}$ indéfiniment différentiable, A_{ij}, $|i| = |j| = k$ des fonctions de L_∞ , réelles, telles que

$$(3.1) \qquad \gamma_1 \sum_{|i|=k} \xi_i^2 \leqq \sum_{|i|=|j|=k} A_{ij}\xi_i\xi_j \leqq \gamma_2 \sum_{|i|=k} \xi_i^2 ,$$

$$(3.2) \qquad \left| \sum_{|i|=|j|=k} \tfrac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})\xi_i\eta_j \right| \leqq \gamma_1 \theta \left(\sum_{|i|=k} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|i|=k} \eta_i^2\right)^{\frac{1}{2}} , \quad \theta < 1 .$$

Soient $f_i \in L_p(\mathcal{O})$, $|i| = k$, $p > 2$ et $\omega \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\mathcal{O})$, une solution faible de l'équation

$$(3.3) \qquad \sum_{|i|=|j|=k} (-1)^k D^i(A_{ij}\; D^j\omega) = (-1)^k \sum_{|i|=k} D^i f_i .$$

Soit $\rho \geqq 0$. Nous avons

THÉORÈME 2. <u>Soit</u> ω <u>une solution faible de</u> (3.3), ω <u>de</u> $\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\sigma)$. <u>Alors il existe deux constantes</u> $\gamma_3(\rho) > 1$, $\gamma_4(\rho) > 1$ <u>telles que pour</u> p <u>satisfaisant</u>

$$(3.4) \qquad p[1 - \log(2\gamma_2 - (1-\theta)\gamma_1) - \log(2\gamma_2 - 2(1-\theta)\gamma_1))/\log\gamma_3] \leqq 2,$$

<u>on a</u>

$$(3.5) \qquad \left(\int_0 \sum_{|i|=k} |D^i\omega|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \frac{2}{(1-\theta)\gamma_1} \gamma_4^{1-\frac{2}{p}} \left(\int_{\mathcal{O}} \sum_{|i|=k} |f_i|^p dx\right)^{1/p} .$$

Démonstration. Supposons d'abord $A_{ij}\in\mathcal{E}(\bar{\mathcal{O}})$ et soit $\delta_{ij}=1$ pour $i=j$ et $\delta_{ij}=0$ pour $i\neq j$, $|i|=|j|=k$ et $w\in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\mathcal{O})$ une solution faible de l'équation

$$\sum_{|i|=k}(-1)^k D^i(\delta_{ij}\quad D^j w)=\sum_{|i|=k}(-1)^k D^i g_i \tag{3.6}$$

avec $g_i\in L_p(\mathcal{O})$, $p=2+\rho$. Nous avons d'après un théorème du travail [10] :

$$\Big(\int_{\mathcal{O}}\sum_{|i|=k}|D^i w|^{2+\rho}dx\Big)^{\frac{1}{2+\rho}}\leq c_1(\rho)\Big(\int_{\mathcal{O}}\sum_{|i|=k}|g_i|^{2+\rho}dx\Big)^{\frac{1}{2+\rho}}. \tag{3.7}$$

On a trivialement

$$\Big(\int_{\mathcal{O}}\sum_{|i|=k}(D^i w)^2dx\Big)^{\frac12}\leq\Big(\int_{\mathcal{O}}\sum_{|i|=k}g_i^2dx\Big)^{\frac12}, \tag{3.8}$$

d'où, d'après le théorème de Riesz-Thorin, cf. par exemple A. Zygmund [11], nous obtenons pour $2\leq p\leq 2+\rho$:

$$\Big(\int_{\mathcal{O}}\sum_{|i|=k}|D^i w|^p dx\Big)^{\frac1p}\leq c_1(\rho)^{(1-\frac2p)/(1-\frac{2}{2+\rho})}\Big(\int_{\mathcal{O}}\sum_{|i|=k}|g_i|^p dx\Big)^{\frac1p}. \tag{3.9}$$

En supposant pour le moment $A_{ij}\in\mathcal{E}(\bar{\mathcal{O}})$, la solution ω de (3.6) appartient à $W_p^{(k)}(\mathcal{O})$ d'après le travail [10] déjà cité. Nous avons pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O})$:

$$\int_{\mathcal{O}}\sum_{|i|=|j|=k}\delta_{ij}D^i\varphi D^j\omega dx \tag{3.10}$$

$$=\int_{\mathcal{O}}\sum_{|i|=|j|=k}(\delta_{ij}-\gamma_2^{-1}A_{ij})D^i\varphi D^j\omega dx+\gamma_2^{-1}\int_{\mathcal{O}}\sum_{|i|=k}D^i\varphi f_i dx.$$

Nous avons

$$\Big(\int_{\mathcal{O}}\sum_{|i|=k}\Big|\sum_{|j|=k}(\delta_{ij}-\gamma_2^{-1}A_{ij})D^j\omega\Big|^p dx\Big)^{1/p}$$

$$=\sup_{\sum_{|i|=k}\|h_i\|^{p'}_{L_{p'}(\mathcal{O})}=1}\int_{\mathcal{O}}\sum_{|i|=|j|=k}(\delta_{ij}-\gamma_2^{-1}A_{ij})h_iD^j\omega dx$$

$$\leq\Big(1-\frac{1-\theta}{\gamma_2}\gamma_1\Big)\sup\int_{\mathcal{O}}\Big(\sum_{|i|=k}h_i^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{|i|=k}(D^i\omega)^2\Big)^{\frac12}dx$$

$$\leq\Big(1-\frac{(1-\theta)\gamma_1}{\gamma_2}\Big)\sup\Big(\int_{\mathcal{O}}\Big(\sum_{|i|=k}h_i^2\Big)^{\frac{p'}{2}}dx\Big)^{\frac{1}{p'}}\cdot\Big(\int_{\mathcal{O}}\Big(\sum_{|i|=k}(D^i\omega)^2\Big)^{\frac p2}dx\Big)^{\frac1p}$$

$$\leq\Big(1-\frac{(1-\theta)\gamma_1}{\gamma_2}\Big).c_2^{(p-2)/p}\Big(\int_{\mathcal{O}}\sum_{|i|=k}|D^i\omega|^p dx\Big)^{1/p},$$

alors on en tire, en tenant compte de (3.9) :

$$(3.11)\qquad \Big(\int_{\mathcal{O}} \sum_{|i|=k} |D^i\omega|^p dx\Big)^{1/p} \leq c_1(\rho)^{(1-\frac{2}{p})/(1-\frac{2}{2+\rho})} \gamma_2^{-1} \Big(\int_{\mathcal{O}} \sum_{|i|=k} |f_i|^p dx\Big)^{1/p}$$
$$+ c_1(\rho)^{(1-\frac{2}{p})/(1-\frac{2}{2+\rho})} c_2^{1-\frac{2}{p}(1-\frac{(1-\theta)\gamma_1}{\gamma_2})} . \Big(\int_{\mathcal{O}} \sum_{|i|=k} |D^i\omega|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} .$$

Si nous posons

$$\gamma_3 = c_1(\rho)^{1/(1-\frac{2}{2+\rho})} . c_2 \quad , \quad \gamma_4 = c_1(\rho)^{1/(1-\frac{2}{2+\rho})} ,$$

nous obtenons pour $2 \leqq p \leqq 2+\rho$, p satisfaisant (3.4) :

$$\gamma_3^{1-\frac{2}{p}(1-\frac{(1-\theta)\gamma_1}{\gamma_2})} \leqq 1 - \frac{1}{2}\frac{(1-\vartheta)\gamma_1}{\gamma_2} ,$$

d'où (3.5). Nous pouvons maintenant trouver $A^n_{ij} \in \mathcal{E}(\bar{\mathcal{O}})$ tel que $A^n_{ij} \to A_{ij}$ en mesure, $|A^n_{ij}| \leqq c$ et que la condition (3.1), (3.2) soit satisfaite. Soit ω_n la solution correspondant à A^n_{ij}. Du théorème, démontré dans le livre de l'auteur [12], il s'ensuit que $\omega_n \to \omega$ dans $W_2^{(k)}(\mathcal{O})$, et le théorème.

LEMME 3.1. <u>Soit</u> $1 < q < \infty$, $0 \leqq l \leqq k-1$. <u>Alors pour</u> $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathcal{O})$ <u>et</u> $|i| = l$ <u>on a</u> :

$$\int_{\mathcal{O}} D^i\varphi \, g \, dx = \int_{\mathcal{O}} \sum_{|j|=k} D^j\varphi \, g_j \, dx$$

<u>avec</u>

$$(3.12)\qquad \|g_j\|_{L_p} \leqq c \, \|g\|_{L_q} ,$$

<u>où</u>

$$\frac{1}{p} \geqq \frac{1}{q} - \frac{k-l}{N} \ \underline{\text{si}}\ (k-l)q < N \quad \underline{\text{et}} \quad 1 \leqq p < \infty \ \underline{\text{si}}\ (k-l)q > N .$$

<u>Démonstration</u>. Soit $u \in \mathring{W}_q^{(k)}(\mathcal{O}) \cap W_q^{(2k)}(\mathcal{O})$ la solution de l'équation

$$\sum_{|i|=2k} D^{2i}u = g$$

dans $\mathcal{O}$. On a d'après le travail [10] :

$$\|u\|_{W_q^{(2k)}(\mathcal{O})} \leqq c \, \|g\|_{L_q(\mathcal{O})} ;$$

si nous posons $(-1)^{k-\ell} D^{i+j}u = g_j$, nous obtenons en vertu du lemme 2.1 l'assertion.

LEMME 3.2. <u>Soit</u> $u \in W_p^{(1)}(\sigma)$, $p > N$. <u>Alors</u>

$$\|u\|_{c(\bar\sigma)} \leq c\left(\frac{p-1}{p-N}\right)^{1-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{N} \left(\int_\sigma \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^p + c\int_\sigma |u(x)|\,dx \; .$$

<u>Démonstration</u>. En vertu du lemme 2.1, nous pouvons supposer u de $\mathcal{E}(\bar\sigma)$. Grâce à une partition de l'unité et aux transformations régulières des cartes, on se ramène au cas où $\sigma = \{x, |x| < 1, x_N > 0\} \equiv P_1$ et à l'estimation

$$|u(0)| \leq c\left(\frac{p-1}{p-N}\right)^{1-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{P_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + c\int_{P_1} |u(x)|\,dx.$$

Nous avons

$$u(y) - u(0) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(ty)y_i\,dt \; ,$$

d'où

$$(3.13) \qquad \left|u(0) - (\operatorname{mes} P_1)^{-1}\int_{P_1} u(y)dy\right| \leq (\operatorname{mes} P_1)^{-1}\left(\int \sum_{i=1} \left(\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(ty)\right| |y_i|\,dt\right)dy.\right.$$

Posons $ty = z$; nous obtenons de (3.13) :

$$\left|u(0) - (\operatorname{mes} P_1)^{-1}\int_{P_1} u(y)dy\right|$$

$$\leq (\operatorname{mes} P_1)^{-1}\int_0^1 \frac{dt}{t^{1+N}}\int_{P_t} \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(z)\right| |z|\,dz$$

$$= (\operatorname{mes} P_1)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\int_{P_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(z)\right| |z|\,dz \int_{|z|}^1 \frac{dt}{t^{1+N}}$$

$$\leq \frac{2}{N \operatorname{mes} P_1}\sum_{i=1}^{N}\int_{P_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(z)\right| |z|^{1-N}dx$$

$$\leq c\left(\sum_{i=1}^{N}\int_{P_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(z)\right|^p dz\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 r^{\frac{(1-N)p}{(p-1)}+N-1}dr\right)^{1-\frac{1}{p}} ,$$

d'où la démonstration.

Nous utiliserons dans la suite une inégalité, démontrée dans un travail de l'auteur [13] :

LEMME 3.3. <u>Soit</u> Ω <u>à</u> $\partial\Omega$ <u>lipschitzienne</u>, $f \in W_p^{(\ell)}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, ℓ <u>un entier (positif ou négatif)</u>, ν <u>un entier positif</u>. <u>Alors</u>

$$\|f\|_{W_p^{(\ell)}} \leq c \sum_{|\alpha|=\nu} \|D^\alpha f\|_{W_p^{(\ell-\nu)}} + c\|f\|_{W_p^{(\ell-\nu)}} \; .$$

§ 4. Les estimations des dérivées d'ordre $k+1$ dans L_2.

Nous démontrerons un lemme étroitement lié aux théorèmes sur la régularité, du travail de l'auteur [14] ; cf. aussi M.I. Višik [1] etc. Considérons dans ce paragraphe $m \geqq 2$. Pour Ω, un domaine à frontière lipschitzienne, il est démontré dans les travaux de l'auteur [15], [16], l'existence d'une fonction $\sigma(x)$ de $\mathcal{E}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, équivalente à dist $(x,\partial\Omega)$ et d'une suite croissante de sous-domaines Ω_n de Ω, $\bar{\Omega}_n \subset \Omega$, telle que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega ,$$

chaque $\partial\Omega_n$ étant indéfiniment continûment différentiable et d'une suite de fonctions $\sigma_n \in \mathcal{E}(\Omega_n) \cap C(\bar{\Omega}_n)$ équivalentes à dist $(\Omega_n,\partial\Omega_n)$, telle que $\sigma_n(x) \to \sigma(x)$ pour $x \in \Omega$ et $|D^i\sigma_n| \leqq c|\sigma_n|^{1-|i|}$ avec c indépendant de n. Désignons par $h = (0,\dots,0,\tau 0,\dots,0)$ avec τ à la ℓ-ème place. Désignons par

$$\Delta_h u(x) = \tau^{-1}u(x+h) - \tau^{-1}u(x).$$

Nous avons, cf. J. Nečas [12] ou L. Nirenberg [17] :

LEMME 4.1. <u>Soit</u> Ω <u>un domaine borné</u>, $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$, $k \geqq 1$, $p \geqq 1$. <u>on a</u>

$$u \in W_p^{(k)}(\Omega) \Leftrightarrow \Delta_h u \in W_p^{(k-1)}(\Omega')$$

<u>pour chaque</u> Ω' <u>avec</u> $|h| < \text{dist}\,(\Omega',\partial\Omega)$ <u>et avec</u>

$$\|\Delta_h u\|_{W_p^{(k-1)}} \leqq c .$$

<u>De plus</u>

$$\|\Delta_h u\|_{W_p^{(k-1)}(\Omega')} \leqq c\|u\|_{W_p^{(k)}(\Omega)} ,$$

$$\|u\|_{W_p^{(k)}(\Omega)} \leqq c(\sup_{\Omega'} \|\Delta_h u\|_{W_p^{(k-1)}(\Omega')} + \|u\|_{W_p^{(k-1)}(\Omega)}) ,$$

$$\lim_{\tau \to 0} \Delta_h u = \frac{\partial u}{\partial x_\ell} \quad \underline{\text{dans}} \quad W_p^{(k-1)}(\Omega') .$$

THÉORÈME 3. <u>Supposons que les conditions</u> (2.18)-(2.21) <u>avec</u> $\lambda = 0$ <u>sont satisfaites</u>. <u>Supposons encore</u> (2.2), (2.5) ,

$$\int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}\right)^2 \rho^{2k} dx \leqq c, \qquad m \geqq 2.$$

<u>Alors pour la solution</u> u <u>du problème</u> (2.12), (2.13) <u>nous avons</u>

$$(4.1) \qquad \int_\Omega \rho^{2k}(1 + \sum_{\alpha \in M} |D^\alpha u(x)|)^{m-2} \sum_{|i| \leqq k+1} (D^i u(x))^2 dx \leqq c .$$

Démonstration. Posons pour $x\in\Omega_n$: $v(x) = \sigma_n^{2k}\Delta_h u(x)$ et pour $x\notin\Omega_n$: $v(x) \equiv 0$. On a $v\in \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$. Soit $w\in \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$ avec dist (supp $w,\partial\Omega) > 0$. On déduit de (2.12)

$$(4.2)\quad \int_\Omega \sum_{|i|,|j|\leqq k} \left(\int_0^1 a_{ij}(x+th,(1-t)D^\alpha u(x) + tD^\alpha u(x+h))dt\right)D^i w(x)D^j\Delta_h u(x)dx$$

$$+\int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} \left(\int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}(x+th,(1-t)D^\alpha u(x) + tD^\alpha u(x+h))dt\right)D^i w(x)dx$$

$$= \int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} D^i w(x)\Delta_h f_i(x)dx \,.$$

Posons

$$w = v,\quad J = \int_\Omega \sigma_n^{2k} \sum_{|i|=k} \left(\int_0^1 (1 + \sum_{\alpha\in M} |(1-t)D^\alpha u(x) + td^\alpha u(x+h)|)^{m-2}dt\right) .(D^i\Delta_h u(x))^2 dx \,.$$

De (4.2) on déduit l'inégalité :

$$(4.3)\quad J \leqq c_1 J^{\frac12}\|u\|^{\frac m2}_{W_m^{(k)}} + c_2\|u\|^m_{W_m^{(k)}} + c_3\left(\int_\Omega \sigma_n^{2k}\sum_{|i|\leqq k}(\Delta_h f_i(x))^2dx\right)^{\frac12}.(J^{\frac12}+\|u\|_{W_m^{(k)}}) ,$$

d'où

$$(4.4)\quad J^{\frac12} \leqq c_4\left(\|u\|^{\frac m2}_{W_m^{(k)}} + \left(\int_\Omega \sigma^{2k}\sum_{|i|\leqq k}(\Delta_h f_i(x))^2dx\right)^{\frac12} + \|u\|_{W_m^{(k)}}\right) .$$

Il s'ensuit, en vertu du lemme de Fatou et du lemme 4.1 :

$$\int_\Omega \sigma_n^{2k}(1 + \sum_{\alpha\in M}|D^\alpha u(x)|)^{m-2}\sum_{|i|\leqq k+1}(D^i u(x))^2 .dx \leqq c(n) \,.$$

Si nous faisons tendre $|h| \to 0$ dans (4.4) et après $n\to\infty$, nous obtenons le résultat.

CONSÉQUENCE 4.1. <u>Sous les conditions du théorème 3</u> :

$$\int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} \sigma^{\frac{2kN}{N-2}}|D^i u|^{\frac{mN}{N-2}}dx \leqq c,\qquad N \geqq 3 \,,$$

$$\int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} \sigma^{\frac{2kp}{m}}|D^i u|^p dx \leqq c,\qquad 1 \leqq p < \infty,\quad N = 2 \,.$$

CONSÉQUENCE 4.2. <u>On conserve les hypothèses du théorème</u> 3. <u>Alors</u> $\frac{\partial u}{\partial x_\ell}$, $\ell = 1,2,\ldots,N$, <u>satisfait à l'équation linéaire différentielle</u> :

$$(4.5)\quad \int_\Omega \sum_{|i|,|j|\leqq k} a_{ij}(x,D^\alpha u)D^i\varphi D^j\frac{\partial u}{\partial x_\ell}dx$$

$$= \int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} D^i\varphi\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}dx - \int_\Omega \sum_{|i|\leqq k}\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}(x,D^\alpha u)D^i\varphi\, dx \,.$$

En effet, il suffit de faire tendre $\tau \to 0$ dans (4.2) : on peut trouver une suite $\tau_n \to 0$ telle que toutes les fonctions sous l'intégrale dans (4.5) convergent presque partout. Si nous tenons compte de ce que les intégrales en question sont équicontinues, ce qui résulte de (4.4), nous pouvons faire le passage à la limite dans (4.2).

§ 5. Régularité à l'intérieur du domaine, le cas $m = 2$.

Désignons par $K_d = \{x, |x| < d\}$, $K(x_0) = \{x, |x-x_0| < d,\ 2d = \text{dist}\,(x_0, \partial\Omega)\}$, $L(x_0) = \{x, |x-x_0| < \frac{1}{2}d, d = \text{dist}\,(x_0, \partial\Omega)\}$. Nous supposons dans tout ce paragraphe (2.1), (2.2), (2.4), (2.6), (2.14), (2.15), (2.16), (2.17a), (2.17b).

Tirons d'abord quelques conséquences des énoncés démontrés au paragraphe 3 :

LEMME 5.1. Pour $u \in W_p^{(1)}(K_d)$, $p > N$, on a

$$(5.1) \qquad |u(0)| \leq c\, d^{1-\frac{N}{p}} \left(\frac{p-1}{p-N}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{K_d} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + c d^{-N} \int_{K_d} |u(x)|\,dx .$$

En effet, nous prenons pour $\mathcal{O}$ du lemme 3.2, la boule unité K_1 ; (5.1) s'obtient par homothétie.

LEMME 5.2. Soit $g \in L_q(K_d)$, $1 < q < \infty$, $0 \leq \ell \leq k-1$. Alors pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $|i| = \ell$ on a

$$\int_{K_d} D^i \varphi\, g\, dx = \int_{K_d} \sum_{|j|=k} D^j \varphi\, g_j\, dx$$

avec

$$(5.2) \qquad \|g_j\|_{L_p(K_d)} \leq c\, d^{k-\ell+\frac{N}{p}-\frac{N}{q}} \|g\|_{L_q(K_d)} ,$$

où $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} - \frac{(k-1)}{N}$ pour $(k-1)q < N$ et $1 \leq p < \infty$ pour $(k-1)q \geq N$. En effet, on prend de nouveau pour $\mathcal{O}$ du lemme 3.1, la boule unité K_1. (5.2) s'obtient par homothétie.

LEMME 5.3. Soit $\omega \in W_2^{(k)}(K_d)$ une solution faible de l'équation (3.3) dans K_d. Alors sous les conditions (3.1), (3.2) avec les notations du théorème 2, on a

$$(5.3) \quad \left(\int_{K_{\frac{d}{2}}} \sum_{|i|=k} |D^i \omega|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2}{(1-\theta)\gamma_1} \gamma_4^{1-\frac{2}{p}} c\Big[\left(\int_{K_d} \sum_{|i|=k} |f_i|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+ \gamma_2 \left(\int_{K_d} \sum_{|i|\leq k} d^{2|i|} (D^i \omega)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} . d^{-k+\frac{N}{p}-\frac{N}{2}}\Big]$$

pour $2 \leq p \leq \frac{2N}{N-2}$, p satisfaisant (3.4).

Démonstration. Il suffit de démontrer (5.3) pour $d = 1$ et après d'utiliser la transformation $\frac{x}{d} = y$. Dans ce but, on pose $w = \chi\omega$ avec $\chi \in \mathcal{D}(K_1)$ et $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq \frac{1}{2}$. Il résulte du lemme 5.2 que w satisfait à l'équation (3.3) avec $g_i \in L_p(K_1)$, pour lesquels

$$\Big(\int_{K_1} \sum_{|i|=k} |g_i|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq c\Big[\Big(\int_{K_1} \sum_{|i|=k} |f_i|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \gamma_2\Big(\int_{K_1} \sum_{|i|\leq k} (D^i\omega)^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] ,$$

d'où le lemme en utilisant (3.5) pour K_1.

Nous sommes maintenant capables de démontrer aisément :

LEMME 5.4. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(K(x_0))$, u la solution du problème (2.12), (3.13), alors

$$(5.4) \qquad \int_{K(x_0)} \sum_{|i|=|j|=k} a_{ij}(x, D^\alpha u) D^i\varphi D^j \frac{\partial u}{\partial x_\ell}\, dx = \int_{K(x_0)} \sum_{|i|=k} D^i\varphi g_i\, dx$$

avec

$$(5.5) \qquad \|g_i\|_{L_{p_0}(K(x_0))} \leq c\, d^{-k} ,$$

où

$$\text{dist}\,(x_0, \partial\Omega) = 2d .$$

En effet, on part de (4.5), on utilise (2.6) et (5.2) pour exprimer

$$\int_{K(x_0)} \sum_{|i|\leq k} D^i\varphi \frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}\, dx$$

moyennant g_i satisfaisant (5.5). Pour les termes

$$\int_{K(x_0)} \sum_{|i|\leq k} \frac{\partial a_i}{\partial x_\ell} D^i\varphi dx ,$$

on utilise l'estimation (2.15), la conséquence 4.1 et encore une fois (5.2). Pour les termes

$$\int_{K(x_0)} \sum_{\substack{|i|,|j|\leq k \\ |j|<k}} a_{ij} D^i\varphi\, D^j \frac{\partial u}{\partial x_\ell}\, dx ,$$

c'est la même chose : on utilise (2.16), la conséquence 4.1 et (5.2). Pour les termes

$$\int_{K(x_0)} \sum_{\substack{|i|,|j|\leq k \\ |j|=k,|i|<k}} a_{ij} D^i\varphi\, D^j \frac{\partial u}{\partial x_\ell}\, dx ,$$

on utilise (2.16), (4.1) et (5.2).

THÉORÈME 4. Sous les conditions mentionnées, pour $N = 2$ et pour la solution u du problème (2.12), (2.13), il existe $p_1 > 2$ tel que

$$\|u\|_{W^{(k+1)}_{p_1}(K(x_o))} \leqq c\, d^{-k-1}\,.,d = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{dist}\,(x_o,\partial\Omega)\,. \tag{5.6}$$

La fonction $D^i u, |i| \leqq k$ est μ höldérienne avec $\mu = 1 - \frac{2}{p_1}$ sur chaque compact de Ω.

Démonstration. L'inégalité (5.6) résulte du lemme 5.4, du théorème 2, de l'appartenance de $\frac{\partial u}{\partial x_\ell}$ à $W_2^{(k)}(\Omega)$ et du lemme 5.3, utilisé pour P_1 satisfaisant (3.4), compte tenu de (2.17a), (2.17b). Il faut encore tenir compte du lemme 2.1.

On désigne par

$$C_\chi^{(k)}(\Omega) = \{u\in C^{(k)}(\Omega), \sup_{d>0} d^\chi \|u\|_{C^{(k)}(\bar\Omega_d)} < \infty\}\,,$$

où

$$\Omega_d = \{x\in\Omega,\ \mathrm{dist}\,(x,\partial\Omega) > d\}\,.$$

On a

CONSÉQUENCE 5.1. Sous les hypothèses du théorème 4, $u\in C_{1+k}^{(k)}(\Omega)$. En effet, il suffit de tenir compte de (5.6), de l'appartenance de u à $W_2^{(k)}(\Omega)$ et de (5.1).

§ 6. Régularité à l'intérieur du domaine, le cas $m > 2$.

Nous obtenons immédiatement :

LEMME 6.1. Soit $f(d)$ une fonction réelle, non négative, définie pour $0 < d < d_o$ et telle que pour $\alpha \geqq 0$

$$\sup_{0<d<d_o} d^\alpha f(d) < \infty\,.$$

Soit pour $\chi \geqq 0$, $0 \leqq \lambda < 1$, $\alpha \leqq \frac{\chi}{1-\lambda}$:

$$f(2d) \leqq c_1\, d^{-\chi}\, f(d)^\lambda + c_2\, d^{-\chi}.$$

Alors pour $\beta \geqq \frac{\chi}{1-\lambda}$, on a

$$\sup_{0<d<d_o} d^\beta f(d) \leqq c(\beta,\chi,\lambda,c_1)\,.$$

Soit $u(\lambda)\in W^{(k)}_{m-Th}(\Omega)$, $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_T,0,\dots,0), \lambda_1>0,\dots,\lambda_T>0$, la solution unique du problème (2.12), (2.13), correspondant aux fonctions $a_i(x,\zeta_j,\lambda)$. Supposons dans ce paragraphe : (2.1), (2.2), (2.4), (2.6), (2.18)-(2.21).

Nous avons avec les notations du paragraphe 2 :

LEMME 6.2. Pour $u(\lambda)$:

$$(6.1a)\qquad \int_\Omega V^{m-(\tau-1)h}\, V_{\lambda_\tau}^{-h} dx \leqq c(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\tau-1}) ,$$

$$(6.1b)\qquad \int_\Omega (1 + \sum_{|\alpha|\leqq k} |D^\alpha u(x)|)^{m-(\tau-1)h}\, V_{\lambda_\tau}^{-h} dx \leqq c(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\tau-1}), \quad N = 2 .$$

En effet, pour $u(\lambda)$, on a

$$\int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} D^i(u-u_\circ) f_i \, dx = \int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} D^i(u-u_\circ) a_i(x, D^j u, \lambda) dx ,$$

d'où de (2.18)

$$(6.2)\qquad \int_\Omega V^{-(\tau-1)h}\, V_{\lambda_\tau}^{-h} \sum_{i\in M} |D^i u|^m dx \leqq c(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\tau-1})(\|u\|^m_{W_m^{(k)}} + 1$$

$$+ \|u_\circ\|_{W_m^{(k)}} (\int_\Omega V^{-(\tau-1)h}\, V_{\lambda_\tau}^{-h} \sum_{i\in M} |D^i u|^m dx)^{1-\frac{1}{m}}$$

$$+ \|u-u_\circ\|_{W_2^{(k)}} \sum_{|i|=k} \|f_i\|_{L_2}) ;$$

maintenant, il faut utiliser la remarque 2.1, alors compte tenu de (6.2) et de l'inégalité de Young :

$$ab \leqq \frac{1}{p}(\varepsilon a)^p + \frac{1}{p'}(\varepsilon^{-1} b)^{p'}, \qquad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1 :$$

$$\int_\Omega V^2 dx \leqq c(\lambda_1, \ldots, -\lambda_{\tau-1})(1 + \|u_\circ\|^m_{W_m^{(k)}} + (\int_\Omega V^2 dx)^{\frac{1}{2}} \sum_{|i|=k} \|f_i\|_{L_2}$$

$$+ \sum_{|i|=k} \|f_i\|_{L_2} \|u_\circ\|_{W_2^{(k)}}) ,$$

d'où $(\int_\Omega V^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leqq c(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\tau-1})$, on en déduit alors l'assertion.

On obtient encore

LEMME 6.3. Pour $u(\lambda)$, $N = 2$:

$$(6.3)\qquad \int_\Omega \rho^{2k}\, V^{m-2-(\tau-1)h}\, V_{\lambda_\tau}^{-h} \sum_{|i|=k+1} (D^i u(\lambda))^2 dx \leqq c(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\tau-1}).$$

Démonstration. On procède comme dans la démonstration du théorème 3. On sait d'après ce théorème que (6.3) est valable avec $c(\lambda)$. Maintenant, on pose avec $u = u(\lambda)$:

$$J = \int_\Omega \sigma_n^{2k}\Big(\int_0^1 \big(1 + \sum_{\alpha\in M} |(1-t)D^\alpha u(x) + tD^\alpha u(x+h)|\big)^{m-2-(\tau-1)h}$$

$$\cdot\big(1+\lambda_\tau \sum_{\alpha\in M} |(1-t)D^\alpha u(x) + tD^\alpha u(x+h)|\big)^{-h} dt \sum_{|i|=k} (D^i \Delta_h u(x))^2 dx \;.$$

Si nous notons dans cette démonstration

$$V = 1 + \sum_{\alpha\in M} |(1-t)D^\alpha u(x) + tD^\alpha u(x+h)|$$

et

$$V_{\lambda_\tau} = 1 + \lambda_\tau \sum_{\alpha\in M} |(1-t)D^\alpha u(x) + tD^\alpha u(x+h)| \;,$$

nous obtenons pour J l'inégalité

$$(6.4)\quad J \leqq c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})\Big[J^{\frac12}\Big(\int_{\Omega_n}\Big(\int_0^1 V^{m-2-(\tau-1)h} V_{\lambda_\tau}^{-h} dt\Big) \sum_{|\alpha|\leqq k+1} (D^\alpha \Delta_h u)^2 dx\Big)^{\frac12}$$

$$+ \int_{\Omega_n}\Big(\int_0^1 V^{m-2-(\tau-1)h} V_{\lambda_\tau}^{-h} dt\Big) \sum_{|\alpha|\leqq k-1} (D^\alpha \Delta_h u)^2 dx$$

$$+ J^{\frac12}\Big(\int_\Omega\Big(\int_0^1 V^{m-(\tau-1)h} V_{\lambda_\tau}^{-h} dt\Big) dx\Big)^{\frac12}$$

$$+ \Big(\int_\Omega\Big(\int_0^1 V^{m-2-(\tau-1)h} V_{\lambda_\tau}^{-h} dt\Big) \cdot \sum_{|\alpha|\leqq k-1} (D^\alpha \Delta_h u)^2 dx\Big)^{\frac12} \cdot \int_{\Omega_n}\Big(\int_0^1 V^{m-(\tau-1)h} V_{\lambda_\tau}^{-h} dt\Big) dx$$

$$+ J^{\frac12}\Big(\int_{\Omega_n} \sum_{|i|\leqq k} (\Delta_h f_i)^2 dx\Big)^{\frac12} + \Big(\int_{\Omega_n} \sum_{|\alpha|\leqq k-1} (D^\alpha \Delta_h u)^2 dx\Big)^{\frac12} \cdot \Big(\int_{\Omega_n} \sum_{|i|\leqq k} (\Delta_h f_i)^2 dx\Big)^{\frac12}\Big] .$$

Après avoir utilisé $2ab \leqq \varepsilon^2 a^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} b^2$, nous obtenons de 6.4 une estimation pour J. On peut faire tendre $\tau \to 0$, $(h = (0,\dots,\tau,0,\dots,0))$ et on obtient finalement (6.2) avec σ_n en vertu du lemme de Fatou et du lemme 6.2, du lemme 2.1 et de (6.1b). Après, il suffit de faire tendre $n \to \infty$.

Désignons par $W^{(k)}_{\infty,\chi} = \{u,\ \sup_{d>0} \|u\|_{W^{(k)}_\infty(\Omega d)} \cdot d^\chi < \infty\}$

LEMME 6.4. <u>Supposons</u> $u(\lambda)\in W^{(k)}_{\infty,\chi}(\Omega)$ <u>et posons</u> $A_d = 1 + \|u\|_{W^{(k)}_\infty(\Omega_d)}$. <u>Alors pour</u> $\varphi\in \mathfrak{D}(K(x_\circ))$, <u>on a</u>

$$(6.5)\quad \int_{K(x_\circ)} \sum_{|i|=|j|=k} a_{ij}(x,D^\alpha u,\lambda) D^i\varphi\, D^j \frac{\partial u}{\partial x_\ell} = \int_{K(x_\circ)} \sum_{|i|=k} D^i\varphi\, g_i\, dx$$

<u>avec</u>

$$\|g_i\|_{L_{p_\circ}(K(x_\circ))} \leqq c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1}) d^{-k} A_d^{m-2} \;.$$

Démonstration. Partons de (4.5). On raisonne maintenant comme dans la démonstration du lemme 5.4 : pour l'intégrale

$$\int_{K(x_0)} \sum_{|i|\leq k} D^i\varphi \frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}\, dx ,$$

c'est la même chose. Pour

$$\int_{K(x_0)} \sum_{|i|\leq k} \frac{\partial a_i}{\partial x_\ell} D^i\varphi\, dx ;$$

on estime

$$\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}\right| \leq c\, A_d^{m-2} V ,$$

on utilise la conséquence 4.1 avec $m = 2$, ce qui découle de (6.3) et de l'inégalité (5.2). Pour les autres intégrales, on procède comme dans la démonstration du lemme 5.4, en tenant compte de (6.3), et en utilisant l'estimation $|a_{ij}| \leq cV^{m-2}$, c.q.f.d.

LEMME 6.5. Si $u(\lambda)\epsilon W^{(k)}_{\chi,\infty}(\Omega)$, il existe $\gamma_5(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1}) > 0$ tel que pour $p = 2 + \gamma_5 A_d^{2-m+(\tau-1)h}$:

(6.6) $$\|u(\lambda)\|_{W_p^{(k+1)}(L(x_0))} \leq c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})d^{-k-1} A_d^{m-2} .$$

En effet, cela résulte du lemme précédent et du lemme 5.3, appliqué avec $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1$, $\tilde{\gamma}_2 = \gamma_2 \cdot A_d^{m-2-(\tau-1)h}$, compte tenu du lemme 6.2 et 6.3 et de la conséquence 4.1.

LEMME 6.6. Supposons

$$u(\lambda)\epsilon W^{(k)}_{\chi,\infty}(\Omega) \quad \text{avec } \chi = \frac{2(1+k)}{1-\frac{h}{2}} , \quad N = 2.$$

Alors en posant

$$\|u\|_{W^{(k)}_{\chi,\infty}(\Omega)} = \sup_{0<d} d^{\chi}\|u\|_{W^{(k)}_{\infty}(\Omega_d)} ,$$

on a

(6.7) $$\|u(\lambda)\|_{W^{(k)}_{\chi,\infty}(\Omega)} \leq c(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{\tau-1}) .$$

Démonstration. Posons $m(x) = (1 + \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha(u(\lambda)))^2)^{\frac{m}{4} - \tau\frac{h}{4}}$. Il résulte de (6.3) et (6.1) :

(6.8) $$\|m\|_{W_2^{(1)}(K(x_0))} \leq c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})d^{-k}$$

Maintenant, on tire de (6.6) :

$$(6.9)\qquad \Big(\int_{L(x_o)}\Big(\Big|\frac{\partial m}{\partial x_1}\Big|^p + \Big|\frac{\partial m}{\partial x_2}\Big|^p\Big)dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqq c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})d^{-k-1}\, A_d^{3(\frac{m}{2}-1)} .$$

Soit $\frac{1}{p_1} = \frac{a}{p} + \frac{b}{2}$, $a+b = 1$, $0 < a < 1$. Nous obtenons de (6.8), (6.9) :

$$(6.10)\qquad \Big(\int_{L(x_o)}\Big(\Big|\frac{\partial m}{\partial x_1}\Big|^{p_1} + \Big|\frac{\partial m}{\partial x_2}\Big|^{p_1}\Big)dx\Big)^{\frac{1}{p_1}} \leqq c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})d^{-k-1}\, A_d^{3a(\frac{m}{2}-1)} .$$

Nous avons avec γ_5 du lemme 6.5 :

$$(6.11)\qquad p_1 \geqq 2 + a\gamma_5\, A_d^{2-m+(\tau-1)h} .$$

Il résulte de (6.1)

$$(6.12)\qquad \frac{1}{d^2}\int_{L(x_o)} |m(x)|\,dx \leqq c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})d^{-1} ,$$

alors de l'inégalité (5.1), utilisée pour $L(x_o)$ et de (6.10)-(6.12), il s'ensuit :

$$(6.13)\qquad |m(x_o)| \leqq c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})a^{-1}d^{-k-1}\, A_d^{3a(\frac{m}{2}-1)+(m-2-(\tau-1)h)\frac{1}{2}} .$$

Maintenant, il résulte de (6.8) et du lemme 2.1 :

$$(6.14)\qquad \Big(\int_{K(x_o)}|m(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqq c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})d^{-k+\frac{2}{q}-1}$$

avec un $q > 2$ fixé. Il s'ensuit avec $\mu = \frac{m}{2} - \frac{\tau h}{2}$

$$(6.15)\qquad \Big(\int_{K(x_o)}\sum_{|\alpha|=k}|D^\alpha u(x)|^{\mu q}\,dx\Big)^{\frac{1}{\mu q}} \leqq c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})d^{(-k+\frac{2}{q}-1)\frac{1}{\mu}} .$$

On a évidemment en vertu du lemme 2.1

$$(6.16)\qquad \Big(\int_{K(x_o)}\sum_{|\alpha|=k-1}|D^\alpha u(x)|^s dx\Big)^{\frac{1}{s}} \leqq c(s,\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1}) \quad \text{pour} \quad 1 \leqq s < \infty,$$

on tire de (6.15), (6.16) et de (5.1) finalement

$$(6.17)\qquad \Big(1 + \sum_{|\alpha|=k-1}|D^\alpha u(x_o)|\Big)^{\mu} \leqq c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})d^{-(1+k)} .$$

(6.17) étant évident pour $|\alpha| < k-1$, en vertu du lemme 2.1, on obtient de (6.13), (6.17) finalement :

$$A_{2d}^{\frac{m}{2}-\tau\frac{h}{2}} \leqq c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})a^{-1}d^{-k-1}\, A_d^{\frac{m}{2}-(\tau-1)\frac{h}{2}-1+2a(m-2)} ,$$

d'où

$$A_{2d} \leq c(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}) a^{-\frac{1}{\mu}} d^{-\frac{1+k}{\mu}} A_d^{1-(1-\frac{h}{2})\frac{1}{\mu} + \frac{2a(m-2)}{\mu}} , \qquad \mu = \frac{m}{2} - \tau \frac{h}{2} .$$

Si nous prenons a tel que

$$1 - \frac{h}{2} + 2a(m-2) = \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{h}{2}) ,$$

nous obtenons l'assertion du lemme 6.1.

THÉORÈME 5. Soit $m > 2$, $N = 2$, u la solution du problème (2.12), (2.13). On suppose (2.1), (2.2), (2.4), (2.6), (2.18)-(2.21). On pose $\sigma = [\frac{m}{2}]$, $h = \frac{m-2}{\sigma}$, $d = \frac{1}{2}$ dist $(x_0, \partial\Omega)$, $L(x_0) = \{x, |x - x_0| < \frac{1}{2}d\}$, $A_d = 1 + \|u\|_{C^{(K)}(\bar{\Omega}_d)}$, $\Omega_d = \{x, \text{dist}\,(x, \partial\Omega) > d\}$. Alors

$$(6.18) \qquad \|u\|_{C^{(K)}(\bar{\Omega}_d)} \leq c\, d^{-(2(1+k))/(1-\frac{h}{2})} ,$$

il existe $c_1 > 0$ telle que si $p = 2 + c_1 A_d^{2-m}$, alors

$$(6.19) \qquad \|u\|_{W_p^{(k+1)}(L(x_0))} \leq c\, d^{-k-1-(2(1+k)(m-2))/(1-\frac{h}{2})} ,$$

et

$$(6.19)' \qquad u \in C^{(K),\mu}(\bar{\Omega}_d) , \qquad \mu = 1 - \frac{2}{p} .$$

Démonstration. Prenons $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\sigma)$ avec $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_\sigma > 0$. On a $m - \sigma h = 2$, alors d'après la conséquence 5.1,

$$u(\lambda) \in W^{(k)}_{\infty,\chi}(\Omega) \qquad \text{avec} \qquad \chi = \frac{2(1+k)}{1 - \frac{h}{2}} .$$

Faisons tendre $\lambda_{\sigma_n} \to 0$. En vertu de (6.1), (6.3), de la remarque 2.1 et du lemme 2.1, l'ensemble $u(\lambda_1, \dots, \lambda_{\sigma-1}, \lambda_{\sigma_n})$ est compact dans $W_m^{(k)}(\Omega')$ pour chaque $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Nous pouvons alors trouver une sous-suite (on la note encore λ_{σ_n} et on pose $\lambda^n = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\sigma_n})$, $u_n = u(\lambda_1, \dots, \lambda\sigma_n)$) convergente vers w dans $W_m^{(k)}(\Omega')$ et $D^\alpha u_n \to D^\alpha w$, $|\alpha| \leq k$ presque partout dans Ω. Nous avons pour $M \subset \Omega'$:

$$\int_M |a_i(x, D^j u_n, \lambda^n)|\, dx \leq c \int_M V^{m-1} dx \leq c(\Omega')\mu(M)^{\frac{1}{m}} .$$

Nous pouvons alors passer à la limite dans (2.12). Mais il résulte de (6.1) et du lemme de Fatou que $w \in W^{(k)}_{m-(\tau-1)h}$ et il résulte encore de (6.1) qu'on peut supposer $u_n \rightharpoonup w$ (convergence faible dans $W^{(k)}_{m-\tau h}$). Cela entraîne 2.13. En vertu de l'unicité de la solution du problème u en question, $w = u(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\sigma-1}, 0)$. Mais il résulte de 6.7 que $u(\lambda_1, \dots, \lambda_{\sigma-1}, 0) \in W^{(k)}_{\infty,\chi}(\Omega)$. Il suffit maintenant d'appliquer notre raisonnement à $u(\lambda_1, \dots, \lambda_{\sigma-1}, n, 0)$ et on obtient finalement pour la solution u

(6.20) $$\|u\|_{W^{(k)}_{\infty,\chi}} \leqq c \ .$$

Pour u, on a (4.5) et le lemme (6.4), d'où (6.6). Mais il résulte de (6.6) et de (6.20) l'inégalité (6.19) ; d'autre part, en vertu du lemme 2.1 : $u \in C^{(k)}_{\chi}(\Omega)$, d'où (6.18) et (6.19)''.

§ 7. Régularité à l'intérieur du domaine, le cas $1 < m < 2$.

Soit $u(\lambda) \in W_2^{(k)}(\Omega)$, $0 < \lambda \leqq 1$, la solution unique du problème (2.12), (2.13), correspondant aux coefficients $a_i(x, \zeta_j, \lambda)$. Nous supposerons dans ce paragraphe les conditions (2.1), (2.3), (2.5), (2.7), (2.22)-(2.25).

LEMME 7.1. Pour $u(\lambda)$:

(7.1a) $$\int_\Omega V^m V_\lambda^{2-m} dx \leqq c \ ,$$

(7.1b) $$\int_\Omega (1 + \sum_{|\alpha| \leqq k} |D^\alpha u|)^m V_\lambda^{2-m} dx \leqq c \ ,$$

(7.2) $$\int_\Omega \rho^{2k} V^{m-2} V_\lambda^{2-m} \sum_{|i|=k+1} (D^i u(\lambda))^2 dx \leqq c \ , \quad N = 2 \ .$$

Démonstration. On a

$$\int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i(u-u_0) f_i dx = \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i(u-u_0) a_i(x, D^j u, \lambda) dx \ ,$$

d'où, de (2.22)

$$\int_\Omega V_\lambda^{2-m} V^m dx \leqq c(1 + \|u_0\|_{W_2^{(k)}} (\int_\Omega V_\lambda^{2-m} V^m dx)^{\frac{1}{2}} + \|u_0\|_{W_m^{(k)}} \sum_{|i| \leqq k} \|f_i\|_{L_{m'}} + (\int_\Omega V_\lambda^{2-m} V^m dx)^{\frac{1}{m}} \sum_{|i| \leqq k} \|f_i\|_{L_{m'}} + (\int_\Omega V^m V_\lambda^{2-m} dx)^{\frac{2-m}{2}}) \ ,$$

d'où (7.1), compte tenu de l'inégalité de Young et de la remarque 2.1, Pour obtenir (7.1b), il faut tenir compte de l'inégalité, valable pour $N = 2$:

(7.3) $$\|u\|_{W^{(k-1)}_{(2m)/(2-m)}} \leqq \|u\|_{W^{(k)}_m} \ .$$

Pour démontrer (7.2), il suffit de s'apercevoir qu'on peut placer $\varphi = \sigma^{2k} \frac{\partial u}{\partial x_\ell}$ dans (4.5) (nous savons de (4.1) que $\sigma^{2k} \frac{\partial u}{\partial x_\ell} \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$). Si nous posons

$$J = \int_\Omega \sigma^{2k} V^{m-2} V_\lambda^{2-m} \sum_{|i|=k+1} (D^i u)^2 dx \ ,$$

nous obtenons de (4.5) :

$$J \leq c\, J^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega V^{m-2}\, V_\lambda^{2-m} \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha u)^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} + c\int_\Omega V^{m-2}\, V_\lambda^{2-m} \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha u)^2\, dx$$

$$+ c\Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha u|^m dx\Big)^{\frac{1}{m}} . \Big(\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} \Big|\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}\Big|^{m'} dx\Big)^{\frac{1}{m'}}$$

$$+ c J^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega V^m dx\Big)^{\frac{2-m}{2m}}\Big(\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} \Big|\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}\Big|^{m'} dx\Big)^{\frac{1}{m'}}$$

$$+ c . J^{\frac{1}{2}} \int_\Omega V^m . V_\lambda^{2-m} dx + c\int_\Omega V^{m-1} V_\lambda^{2-m} \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha u|\, dx$$

il faut maintenant tenir compte de (7.1), (7.1b) et de (7.3), d'où on en déduit (7.2).

Nous avons avec la notation du lemme 6.4 :

LEMME 7.2. <u>Pour</u> $\varphi \in \mathcal{D}(K(x_0))$, <u>on a</u> $(N = 2)$:

(7.4) $$\int_{K(x_0)} \sum_{|i|=|j|=k} a_{ij}(x, D^\alpha u, \lambda) D^i\varphi D^j \frac{\partial u}{\partial x_\ell}\, dx = \int_{K(x_0)} \sum_{|i|=k} D^i \varphi g_i\, dx$$

<u>avec</u>

(7.5) $$\|g_i\|_{L_{m'}(K(x_0))} \leq c\, d^{-k} A_d^{2-m} .$$

<u>Démonstration</u>. On part de (4.5). On raisonne maintenant comme dans la démonstration du lemme 5.4 : pour l'intégrale

$$\int_{K(x_0)} \sum_{|i|\leq k} D^i \varphi \frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}\, dx ,$$

c'est la même chose. Pour

(7.6) $$\int_{K(x_0)} \sum_{|i|\leq k} \frac{\partial a_i}{\partial x_\ell} D^i\varphi\, dx ,$$

on utilise

$$\Big|\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}\Big| \leq c\, V^{m-1} A_d^{2-m}$$

alors

$$\Big(\int_{K(x_0)} \Big|\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}\Big|^{m'} dx\Big)^{\frac{1}{m'}} \leq c\, A_d^{2-m} ;$$

pour estimer les intégrales

$$\int_{K(x_0)} \sum_{|i|+|j|<2k} a_{ij} D^i \varphi D^j \frac{\partial u}{\partial x_\ell}\, dx ,$$

on utilise l'inégalité (2.24), (7.2), le lemme 5.2 si $|j| = k$ et pour le cas $|j| < k$, on utilise l'estimation

$$|a_{ij}|\,\left|D^j \frac{\partial u}{\partial x_\ell}\right| \leq c\left|D^j \frac{\partial u}{\partial x_\ell}\right| \leq c\, A_d^{2-m}\Big(1 + \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha u|^{m-1}$$

et on raisonne comme pour (7.6), en utilisant pour $|i| < k$ le lemme 5.2.

Nous obtenons maintenant

LEMME 7.3. <u>Il existe</u> $\gamma_6 > 0$ <u>tel que pour</u> $p = 2 + \gamma_6 A_d^{m-2}$:

$$\|u(\lambda)\|_{W_p^{(k+1)}(L(x_0))} \leq c\, d^{-k-1} A_d^{2(2-m)} . \tag{7.6}$$

En effet, cela résulte du lemme précédent et du lemme 5.3, appliqué avec $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 A_d^{m-2}$, $\tilde{\gamma}_2 = \gamma_2$, compte tenu de (7.1) et de (7.2).

Nous avons maintenant :

LEMME 7.4. <u>Soit</u> $\chi = \frac{2(1+k)}{m-1}$. <u>Alors pour</u> $u(\lambda)$ <u>en question on a</u>

$$\|u(\lambda)\|_{C_\chi^{(k)}(\Omega)} \leq c .$$

<u>Démonstration</u>. Posons

$$m(x) = \Big(1 + \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha u(\lambda))^2\Big)^{\frac{m}{4}}$$

Il résulte de (7.1a), (7.1b) et (7.2) que

$$\|m\|_{W_2^{(1)}(K(x_0))} \leq c\, d^{-k} . \tag{7.7}$$

Nous avons avec p du lemme précédent (avec γ_6 assez petit).

$$\Big(\int_{L(x_0)} \Big(\Big|\frac{\partial m}{\partial x_1}\Big|^p + \Big|\frac{\partial m}{\partial x_2}\Big|^p\Big)dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq c\, d^{-k-1} A_d^{2(2-m)}. \tag{7.8}$$

Soit $\frac{1}{p_1} = \frac{a}{p} + \frac{b}{2}$, $a + b = 1$, $a > 0$. Nous obtenons de (7.8) et (7.7) :

$$\Big(\int_{L(x_0)} \Big(\Big|\frac{\partial m}{\partial x_1}\Big|^{p_1} + \Big|\frac{\partial m}{\partial x_2}\Big|^{p_1}\Big)dx\Big)^{\frac{1}{p_1}} \leq c\, d^{-k-1} A_d^{2a(2-m)} . \tag{7.9}$$

Puis, nous tirons de (7.1)

$$d^{-2} \int_{L(x_0)} |m(x)|\,dx \leq c\, d^{-1} ; \tag{7.10}$$

alors, on tire de l'inégalité (5.1) et de (7.9), (7.10) :

$$(7.11)\qquad |m(x_0)| \leqq c\, d^{-k-1}\, a^{-1}\, A_d^{(2-m)\frac{1}{2}+3a(2-m)} \quad ,$$

d'où

$$(7.12)\qquad A_{2d}^{\frac{m}{2}} \leqq c\, d^{-k-1}\, a^{-1} A_d^{1-\frac{m}{2}+3a(m-2)} \quad .$$

Si nous posons $a = \frac{m-1}{6(2-m)}$, nous obtenons

$$A_{2d} \leqq c\, d^{-\frac{2(1+k)}{m}}\, a^{-\frac{2}{m}}\, A_d^{1-\frac{m-1}{m}} \quad ,$$

on en déduit facilement l'assertion en vertu du lemme 6.1.

Nous avons finalement

THÉORÈME 6. <u>Soit</u> $1 < m < 2$, $N = 2$, u <u>la solution du problème</u> (2.12), (2.13), <u>On suppose</u> (2.1), (2.3), (2.5), (2.7), (2.22)-(2.25). <u>On pose</u> $d = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, $L(x_0) = \{x, |x-x_0| < \frac{1}{2} d\}$, $\Omega_d = \{x, \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > d\}$, $A_d = 1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar\Omega_d)}$. <u>Alors</u>

$$(7.12)\qquad \|u\|_{C^{(k)}(\Omega_d)} \leqq c\, d^{-\frac{2(1+k)}{1-m}} \quad .$$

<u>Il existe</u> $c > 0$ <u>tel que si</u> $p = 2 + c\, A_d^{2-m}$, <u>alors</u>

$$(7.13)\qquad \|u\|_{W_p^{(k+1)}(L(x_0))} \leqq c\, d^{-(1+k)-\frac{4(1+k)(2-m)}{m-1}}$$

<u>et</u>

$$(7.14)\qquad u \in C^{(k),\mu}(\bar\Omega_d) \qquad \text{avec} \qquad \mu = 1 - \frac{2}{p} \quad .$$

<u>Démonstration.</u> D'après le théorème 4, on a $u(\lambda) \in C_\chi^{(k)}(\Omega)$ avec $\chi = \frac{2(1+k)}{1-m}$. Mais il résulte de (7.6) et du lemme 7.4 que

$$(7.15)\qquad \|u(\lambda)\|_{W_p^{(k+1)}(L(x_0))} \leqq c\, d^{-(1+k)-\frac{4(1+k)(2-m)}{(m-1)}} \quad .$$

Il s'ensuit qu'on peut trouver une suite $\lambda_n \to 0$ telle que $u(\lambda_n) \to w$ dans $W_m^{(k)}(\Omega')$ pour chaque $\bar\Omega' \subset \Omega$, $D^\alpha u(\lambda_n) \to D^\alpha w$, $|\alpha| \leqq k$ presque partout dans Ω. On peut faire le passage à la limite $\lambda_n \to 0$ dans (2.12) et supposer que $u(\lambda_n) \to w$ dans $W_m^{(k)}(\Omega)$ et dans $W_p^{(k+1)}(\Omega_d)$. En vertu de l'unicité de la solution du problème en question, $w = u$ et on tire de (7.15) l'inégalité (7.13). Ceci nous donne (7.14), d'où (7.12) en vertu du lemme 7.4.

§ 8. Régularité jusqu'à la frontière, $m \geqq 2$, $N = 2$.

Nous supposons dans ce paragraphe $\partial\Omega$ indéfiniment continûment différentiable, (2.1), (2.8), (2.9), (2.26)-(2.29) et la condition :

(8.1) (2.26)-(2.29) sont invariantes par transformation orthonormale des cartes.

Nous pouvons décrire la frontière $\partial\Omega$ au voisinage de chaque point de $\partial\Omega$ à l'aide d'une fonction indéfiniment continûment différentiable. Pour fixer les idées, nous supposons définie une telle fonction dans un système de cartes cartésiennes (que nous notons encore x) :

$$x_N = a(x'), \quad x' = (x_1, \dots, x_{N-1}), \quad |x'| \leqq r , \tag{8.2}$$

avec a de $\mathcal{E}(\overline{K}_r)$ $(K_r = \{x'; |x'| < r\})$. Supposons que les points $|x'| \leqq r$, $a(x') < x_N < a(x')+r$ appartiennent à Ω, tandis que les points $|x'| \leqq r$, $a(x') - r < x_N < a(x')$ sont hors de Ω, et désignons l'ensemble $|x'| < r$, $a(x') < x_N < a(x')+r$ par V_r. Supposons que

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\partial a}{\partial x_i}(0)\right)^2 = 0 .$$

Dans V_r, définissons "les dérivées dans la direction parallèle à $\partial\Omega$" : pour $x \in V$, ce seront les dérivées dans le plan orthogonal à la direction

$$\left(- \frac{\partial a}{\partial x_1}(x'), \dots, - \frac{\partial a}{\partial x_{N+1}}(x'), 1\right).$$

Pour fixer les idées, nous choisissons ces directions en prenant pour elles :

$$\nu_\ell = \left(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, \frac{\partial a}{\partial x_\ell}(x')\right), \quad \ell = 1, 2, \dots, N-1 .$$

Posons

$$H(x) = \sum_{|i| \leqq k} \sum_{\ell=1}^{N-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_\ell}(D^i u) + \frac{\partial}{\partial x_N}(D^i u) \frac{\partial a}{\partial x_\ell}\right)^2 .$$

LEMME 8.1. Soit $\mu \geqq 2$ et $u(\mu)$ la solution du problème (2.12), (2.13), correspondant au paramètre μ. Supposons que

$$u(\mu) \in C^{(k)}(\overline{\Omega}) \cap W_2^{(k+1)}(\Omega) .$$

Alors

$$\int_\Omega V^\mu dx \leqq c , \tag{8.1a}$$

$$\int_{V_r} V^{\mu-2} H \, dx \leqq c . \tag{8.1b}$$

Démonstration. (8.1a) résulte immédiatement de (2.26). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(V_r)$ et définissons pour $x \in V_r$: $h(x) = (0, \dots, 0, \tau, 0, \dots, 0, a(x'+h') - a(x'))$ avec τ à la ℓ-ème place et $h' = (0, \dots, 0, \tau, 0, \dots, 0)$. Nous avons d'après (2.12)

$$\frac{1}{\tau}\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} (D^i\varphi(x + h(x)) - D^i\varphi(x))a_i(x,D^j u(x),\mu)dx$$
$$= \frac{1}{\tau}\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} (D^i\varphi(x+h(x)) - D_i\varphi(x)f_i(x)dx$$

et par le passage à la limite $\tau \to 0$, on obtient :

$$(8.2) \qquad \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_N}\frac{\partial a}{\partial x_\ell}\Big)\, a_i(x,D^j u,\mu)dx = \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_N}\frac{\partial a}{\partial x_\ell}\Big)f_i\, dx\,.$$

L'intégration par parties nous donne

$$(8.3) \qquad \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i\varphi\, a_{ij}\, D^j\frac{\partial u}{\partial x_\ell}dx + \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i\varphi a_{ij} D^j\Big(\frac{\partial u}{\partial x_N}\frac{\partial a}{\partial x_\ell}\Big)dx$$
$$+ \int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} D^\alpha\varphi b_x a_\beta dx + \int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\leq k} D^\alpha\varphi a_{\alpha\beta} D^\gamma u d_\gamma dx$$
$$+ \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i\varphi \frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}dx + \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i\varphi\frac{\partial a_i}{\partial x_N}\frac{\partial a}{\partial x_\ell}dx$$
$$= \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i\varphi \frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}dx + \int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} D^\alpha\varphi c_\alpha f_\beta\, dx\,, \qquad \text{où} \quad b_\alpha, c_\alpha d_\alpha \in \mathcal{E}(\bar\Omega)\,.$$

En vertu de l'hypothèse que $u\in C^{(k)}(\bar\Omega)\cap W_2^{(k+1)}(\Omega)$, nous pouvons prendre $\varphi\in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ et en particulier :

$$\varphi = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_\ell} - \frac{\partial u_0}{\partial x_\ell} + \Big(\frac{\partial u}{\partial x_N} - \frac{\partial u_0}{\partial x_N}\Big)\frac{\partial a}{\partial x_\ell}\Big)\gamma_r^{2k}.$$

Nous obtenons de (8.3), si nous posons

$$J = \int_\Omega \gamma_r^{2k} V^{\mu-2} H\, dx\ :$$

$$J \leq c\, J^{\frac{1}{2}} + c, \qquad \text{d'où} \qquad J \leq c$$

et l'assertion.

LEMME 8.2. <u>Supposons toujours</u> $u(\mu)\in C^{(k)}(\bar\Omega)\cap W_2^{(k+1)}(\Omega)$. <u>Alors pour</u> r <u>assez petit</u>

$$(8.4) \qquad \int_\Omega \gamma_r^{2k} V^{2(\mu-2)}\Big(\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x_N^{k+1}}\Big)^2 dx \leq c(r)(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar\Omega)})^{\mu-2}\,.$$

<u>Démonstration</u>. Désignons par

$$\omega(r) = \max_{x\in\bar K_r} \sum_{i=1}^{N-1} \Big|\frac{\partial a}{\partial x_i}(x')\Big|, \qquad (0,\dots,0,k-1) = \nu,$$

$\bar{\nu} = (0,\dots,0,k)$, $\bar{\bar{\nu}} = (0,\dots,0,k+1)$ et posons $g(x) = \frac{\partial}{\partial x_N}(\gamma_r^k a_{\bar{\nu}}(x,D^\alpha u))$.
Pour $|\alpha| = k-1$, $\alpha \neq \nu$, nous avons pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$(8.5) \qquad \int_\Omega D^\alpha \varphi g dx = \int_\Omega D^\beta \varphi \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\gamma_r^k a_{\bar{\nu}})dx$$

avec $\ell \leqq N-1$. Pour $\alpha = \bar{\nu}$, on a d'après (2.12) :

$$(8.6) \quad \int_\Omega D^{\bar{\nu}}(\varphi\gamma_r^k)a_{\bar{\nu}}\, dx = -\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqq k,\alpha\neq\nu} a_\alpha D^\alpha(\varphi\gamma_r^k)dx + \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqq k} D^\alpha(\varphi\gamma_r^k)f_\alpha dx .$$

Il résulte maintenant de (8.1), compte tenu des inégalités (2.26)-(2.29) et du lemme 3.3, en posant $J = \int_\Omega \gamma_r^{2k} V^{2(\mu-2)}(D^{\bar{\bar{\nu}}}u)^2 dx$:

$$J^{\frac{1}{2}} \leqq c_1\,\omega(r)J^{\frac{1}{2}} + c_2(r)(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})})^{\frac{\mu}{2}-1} ,$$

d'où 8.4.

On a évidemment :

CONSÉQUENCE 8.1. <u>Pour</u> $u(\mu)$, <u>on a</u>

$$(8.7) \qquad \int_\Omega V^{2(\mu-2)} \sum_{|\alpha|\leqq k+1}(D^\alpha u)^2 dx \leqq c(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})})^{\mu-2},$$

$$(8.8a) \qquad \left(\int_\Omega V^{(\mu-1)p}dx\right)^{1/p} \leqq c(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})})^{\frac{\mu}{2}-1}, \quad N = 2, \quad 1 \leqq p < \infty ,$$

$$(8.8b) \qquad \left(\int_\Omega V^{(\mu-1)\frac{2N}{N-2}}dx\right)^{\frac{N-2}{2N}} \leqq c(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})})^{\frac{\mu}{2}-1}, \quad N \geqq 3 .$$

LEMME 8.3. <u>Supposons</u> $u(\mu)\in C^{(k)}(\bar{\Omega}) \cap W_2^{(k+1)}(\Omega)$. <u>Alors il existe</u> $\gamma_5 > 0$ <u>tel que pour</u> $p = 2 + \gamma_5(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})})^{2-\mu}$, on a

$$(8.9) \qquad \left(\int_\Omega V^{p(\mu-2)} \sum_{|\alpha|\leqq k+1}|D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq c(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})})^{3(\frac{\mu}{2}-1)} .$$

<u>Démonstration</u>. Dans V_r, posons

$$\omega = \left(\frac{\partial u}{\partial x_\ell} + \frac{\partial u}{\partial x_N}\frac{\partial a}{\partial x_\ell}\right)\gamma_r^k .$$

Il résulte de (8.3), où nous posons pour φ : $\varphi\gamma_r^k$, que ω satisfait à une équation linéaire, à savoir en vertu de (8.1), (8.7), (8.8) et du lemme 3.1:

$$(8.9) \qquad \int_\Omega \sum_{|i|=|j|=k} a_{ij}D^i\varphi D^j\omega dx = \int_\Omega \sum_{|i|=k} D^i\varphi g_i dx$$

avec

$$\|g_i\|_{L_{p_0}(\Omega)} \leq c(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar\Omega)})^{\frac{\mu}{2}-1} .$$

Nous utilisons maintenant le théorème 2 pour

$$w = \omega - \gamma_r^k\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_\ell} + \frac{\partial u_0}{\partial x_N}\frac{\partial a}{\partial x_\ell}\right)$$

et obtenons, en posant $\tilde\gamma_1 = \gamma_1$, $\tilde\gamma_2 = \gamma_2(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar\Omega)})^{\mu-2}$ l'inégalité

(8.10)
$$\|\omega\|_{W_p^{(k)}} \leq c(r)(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar\Omega)})^{\frac{\mu}{2}-1} .$$

Maintenant, on procède comme dans la démonstration du lemme 8.2 : posons

$$g(x) = \frac{\partial}{\partial x_N}(\gamma_r^k a_{\bar\nu}(x, D^\alpha u,\mu)).$$

Il résulte de (8.5),(8.6),(8.10), compte tenu des inégalités (2.26), (2.29) et du lemme 3.3, en posant

$$J = \int_\Omega \gamma_r^{kp} V^{p(\mu-2)} |D^{\bar{\bar\nu}} u|^p dx :$$

(8.11)
$$J^{\frac{1}{p}} \leq c_1\,\omega(r) J^{\frac{1}{p}} + c_2(r)(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar\Omega)})^{3(\frac{\mu}{2}-1)} ,$$

d'où (8.9) en vertu de (8.10).

LEMME 8.4. <u>Supposons</u> $u(\mu)\in C^{(k)}(\bar\Omega) \cap W_2^{(k+1)}(\Omega)$, $N = 2$. <u>Alors</u>

(8.12)
$$\|u(\mu)\|_{C^{(k)}(\bar\Omega)} + \|u(\mu)\|_{W_2^{(k+1)}(\Omega)} \leq c$$

<u>et il existe</u> $q > 2$ <u>tel que</u>

(8.13)
$$\|u(\mu)\|_{W_q^{(k+1)}(\Omega)} \leq c .$$

<u>Démonstration</u>. Soit

$$m(x) = (1 + \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha u(\mu))^2)^{\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2}} .$$

Il suit de (8.7) que

(8.14)
$$\|m\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leq c(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar\Omega)})^{\frac{\mu}{2}-1} .$$

De (8.9) et de (8.8) il s'ensuit que

$$(8.15) \qquad \|m\|_{W_p^{(1)}(\Omega)} \leq c(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})})^{3(\frac{\mu}{2}-1)}$$

avec

$$p = 2 + \gamma_5(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})})^{2-\mu} .$$

Soit $\frac{1}{p_1} = \frac{a}{p} + \frac{b}{2}$, $a+b = 1$, $1 < a < 0$. On obtient :

$$p_1 \geq 2 + a\gamma_5(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})})^{2-\mu} .$$

Il résulte de (8.14), (8.15) et du lemme 3.2 :

$$(8.16) \qquad (1 + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})})^{\mu-1} \leq c(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})})^{\frac{3}{2}(\frac{\mu}{2}-1)+3a(\frac{\mu}{2}-1)} . a^{-1} .$$

D'autre part, en vertu de (8.1) :

$$1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})} \leq c(1 + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})}) ,$$

alors il s'ensuit, en vertu de (8.16), si nous posons $a = \frac{1}{3\mu}$:

$$(8.17) \qquad \|u(\mu)\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})} \leq c .$$

(8.12) résulte de 8.17 et de (8.7); (8.13) de (8.9).

THÉORÈME 7. Soit Ω un domaine borné à frontière indéfiniment continûment différentiable, $N = 2$ et supposons que les hypothèses (2.1), (2.8), (2.9), (2.26)-(2.29), (8.1) soient valables. Alors la solution u du problème de Dirichlet (2.12), (2.13) appartient à $W_{p_0}^{(k+1)}(\Omega)$ avec $p_0 > 2$, donc à $C^{(k),\mu}(\bar{\Omega})$ avec $\mu = 1 - \frac{2}{p_0}$.

Démonstration. Considérons d'abord le cas $m = 2$. Soit

$$a_i(x,\zeta_j,t) = (1-t)\delta_{ij}\zeta_j + ta_i(x,\zeta_j)$$

pour $0 \leq t \leq 1$ avec $\delta_{ij} = 0$ pour $|i| + |j| < 2k$ et $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, $|i| = |j| = k$. Evidemment, les conditions (2.26)-(2.29) sont valables uniformément par rapport à t ; soit $u(t)$ la solution du problème (2.12), (2.13). Pour $t = 0$, l'assertion est vraie en vertu des théorèmes bien connus pour les équations linéaires, cf. par exemple [10]. Désignons par N, l'ensemble des t pour lesquels (8.13) est valable avec $q = p_0$. N est fermé : si $t_n \to t_0$ et pour les t_n (8.13) est valable, il s'ensuit, en vertu du lemme 2.1, que $u(t_n)$

est un ensemble compact dans $W_m^{(k)}(\Omega)$. On peut en extraire une suite, encore notée $u(t_n)$, telle que $u(t_n) \to u$ dans $W_m^{(k)}(\Omega)$. Ils s'ensuit en vertu de l'unicité de la solution du problème pour t que $u(t_\circ) = u$, d'où l'énoncé. N est ouvert : en effet, soit $t_\circ \in N$ et désignons par A l'opérateur de $[W_{p_\circ}^{(1)}(\Omega)]^\chi$ dans $W_{p_\circ}^{(k+1)}(\Omega)$, où χ est le nombre des indices $|i| \leq k$, donnant la solution du problème. Soit $V = \{u, u-u_\circ \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)\}$ et désignons par B l'opérateur de $W_{p_\circ}^{(k+1)}(\Omega)$ dans $W_{p_\circ}^{(1)}(\Omega)$, défini par $(t_\circ - t)a_i(x, D^j u) + (t - t_\circ) \sum\limits_{|j|=k} \delta_{ij} D^j u$. Soit

$$U_1 = \{u \in W_{p_\circ}^{(k+1)}(\Omega) \cap V, \|u - u(t_\circ)\|_{W_{p_\circ}^{(k+1)}} \leq 1\} .$$

L'opérateur $ABu + u(t_\circ)$ pour $|t - t_\circ|$ assez petit transforme U_1 dans lui-même. D'autre part, il est faiblement continu $W_{p_\circ}^{(k+1)}$ étant un espace réflexif, séparable, on peut utiliser le théorème de Schauder "faible", cf. J. Schauder [21], d'où l'existence du point fixe u. Evidemment $u = u(t)$. Il faut encore voir que l'estimation (8.13) est valable avec $q = p_\circ$. Mais cette estimation est valable avec q du lemme précédent. Il s'ensuit que les coefficients a_{ij} dans (8.9)' sont höldériens. Il résulte alors du travail [10] que $\|\omega\|_{W_p^{(k+1)}} \leq c$. Mais l'application du procédé, basé sur le lemme 3.3 ci-dessus nous donne finalement l'estimation "a priori" (8.13) avec $p_\circ$. Il s'ensuit que $N = \langle 0, 1 \rangle$, d'où la démonstration dans le cas $m = 2$. Si $m > 2$, considérons $\mu \in \langle 2, m \rangle$ et les solutions $u(\mu)$. Mais pour $\mu = 2$ l'assertion est vraie. Maintenant, on raisonne comme ci-dessus, en posant $B = a_i(x, D^j u, \mu_\circ) - a_i(x, D u, \mu)$, d'où la démonstration.

Remarque. Sous les hypothèses mentionnées et encore avec $a_{ij} = a_{ji}$ pour $|i| = |j| = k$, on peut démontrer par la même méthode, avec les modifications correspondant au paragraphe 7, le théorème 7 pour $1 < m < 2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.I. VIŠIK. Quasilinear strongly elliptic systems of differential equations having divergence form (en russe), Trudy Mosk. Mat. Obšč. 12, 1963, 125-184.

[2] F.E. BROWDER. Problèmes non linéaires, Séminaire de Mathématiques supérieures, 1965, Presses de l'Université de Montréal, 1966.

[3] J. LERAY-J.L. LIONS. Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, Sém. sur les équat. aux dérivées part., Collège de France, vol. I(1°), 1964.

[4] E. DE GIORGI. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, Mem. Accad. Sci. Torino, 3, 1957, 25-43.

[5] J.B. MORREY. Existence and differentiability theorems for the solutions of of variational problems for multiple integrals. Bull. Amer. Math. Sci. 46, 439-458, 1940.

[6] J.B. MORREY. Multiple integrals in the calculus of variations, Springer 1966.

[7] O.A. LADYŽENSKAJA-N.N. URALCEVA. Linějnyje i kvazilinějnyje uravněnija ellipticeskovo tipa, Moscou, 1964.

[8[J. NEČAS. Proceedings of Equadiff II, Bratislava 1966.

[9] J. NEČAS. Sur la régularité des solutions variationnelles des équations elliptiques non-linéaires d'ordre 2k en deux dimensions, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, XXI, fasc. III, 1967, 427-457.

[10] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, Comm. Pure Appl. Math., vol. XII, 623-727, 1959.

[11] A. ZYGMUND. Trigonometrical series, Cambridge 1959.

[12] J. NEČAS. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Prague 1967.

[13] J. NEČAS. Sur les normes équivalentes dans $W_p^{(k)}$ et sur la coercitivité des formes formellement positives, Sémin. Math. Sup. Montréal 1965, Presses de l'Université de Montréal 1966.

[14] J. NEČAS. Sur la méthode variationnelle pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires du type elliptique ; l'existence et la régularité des solutions, C.M.U.C., Prague, 7, 3 1966, 301-317.

[15] J. NEČAS. Sur les domaines du type N (en russe), Czechoslovak Mathematical J., 12, 1962, 274-287.

[16] J. NEČAS. Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 16, 1962, 305-326.

[17] L. NIRENBERG. Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math., 8, 1955, 648-674.

[18] G. STAMPACCHIA. Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Collège de France, Sém. sur les équat. aux dérivées part., vol. III, nov. 1963-mai 1964.

[19] J. NEČAS. Les équations elliptiques non-linéaires, Ecole d'été, Tchécoslovaquie 1967, à paraître dans Časopis pro pěst. Matem. 1968.

[20] E. BULEY. The differentiability of solutions of certain variational problems for multiple integrals, Technical Report 16, University of Berkeley, 1960.

[21] J. SCHAUDER. Der Fixpunktsatz in Funktionalräume, Studia Math. II, 1930, 171-180.

[22] N.G. Meyers. On L_p estimates for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 17, 1963, 189-206.

[23] E. DE GIORGI. Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellitico.

[24] E. GIUSTI-M. MIRANDA. Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni.

[25] Ch.B. MORREY. Partial regularity results for non-linear elliptic systems, à paraître dans J. Mathemat. Mechanics.