J. L. Lions

Résolution itérative d'inéquations variationnelles par décomposition et éclatement

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1966-1967), p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1966-1967___1_1_0>

RÉSOLUTION ITÉRATIVE D'INÉQUATIONS VARIATIONNELLES PAR DÉCOMPOSITION ET ÉCLATEMENT

par J.L. LIONS

La méthode itérative donnée ici est due à R. TEMAM et l'A. [12].

Le plan est le suivant :

On considère seulement ici le cas de formes bilinéaires continues sur un Hilbert. La méthode s'étend [13], au moins pour l'essentiel, à certains des problèmes d'inéquations variationnelles que l'on rencontre en théorie du contrôle optimal [9] ou dans les équations d'évolution [1] [8] [10].

1. Enoncé de la méthode itérative.

1.1. Rappel. Soit V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, et $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue sur V, coercive au sens

(1.1) $\quad a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2,\ \alpha > 0,\ v\in V,\ \|v\| =$ norme de v dans V.

Soit K un ensemble convexe fermé de V et soit L une forme linéaire continue sur V. Alors [19] (autre démonstration dans [11]),

THÉORÈME 1.1. *L'hypothèse (1.1) ayant lieu, il existe $u\in K$ unique tel que*

$$a(u,v-u) \geq L(v-u) \quad \forall\ v\in K . \tag{1.2}$$

Remarque 1.1.

En fait l'hypothèse (1.1) est inutilement restrictive pour la validité du théorème 1.1, qui est encore vrai en supposant $a(v,v) \geq 0$ et

$$\frac{a(v,v)}{\|v\|} \to +\infty \quad \text{si} \quad v\in K,\ \|v\| \to \infty \tag{1.3}$$

Cf. [1] [6].

Remarque 1.2.

Il a été montré dans [6], puis dans [2] [1], que l'énoncé (1.2) peut s'étendre à des formes $a(u,v)$ non linéaires en u, mais "monotones". Il est probable (mais non explicité, semble-t-il) que la méthode itérative proposée ci-après, s'étend (sous des hypothèses convenables...) à certains cas "monotones non linéaires".

Remarque 1.3.

Si $a(u,v) = a(v,u)\ \forall\ u,v \in V$, le théorème 1.1 est immédiat ; la solution u est l'unique élément de K qui minimise $a(v,v) - 2L(v)$.

Remarque 1.4.

Les résultats ci-après s'étendent au cas où l'on remplace $L(v-u) = L(v) - L(u)$ par $F(v) - F(u)$, $F \in \Gamma(V)$ au sens de Moreau[1].

1.2. Le problème.

On va supposer que

(1.4) $$V = \bigcap_{i=1}^{q} V_i \quad , \quad K = \bigcap_{i=1}^{q} K_i$$

(1.5) $$a(u,v) = \sum_{i=1}^{q} a_i(u,v)$$

et faire "éclater" le problème (1.2) en une série de problèmes chacun relatifs à $\{a_i, V_i, K_i\}$.

Précisons d'abord les hypothèses.

On se donne un espace de Hilbert H sur $\mathbb{R}$ avec

(1.6) $V \subset H$, V dense dans H, $V \to H$ continue

Soit $|\ |$ la norme sur H, et $(\ ,\ )$ le produit scalaire dans H.

Soit

(1.7) $$\begin{cases} V_i = \text{espace de Hilbert sur } \mathbb{R},\ V_i \subset H,\ V_i \text{ dense dans } H, \\ V_i \to H \text{ continue},\ \|\ \|_i = \text{norme dans } V_i\ ,\quad 1 \leq i \leq q\ . \end{cases}$$

On suppose

(1.8) $$V = \bigcap_{i=1}^{q} V_i\ ,\quad \|v\| \sim \Big(\sum_{i=1}^{q} \|v\|_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Ensuite soit

(1.9) $$\begin{cases} K_i = \text{convexe fermé de } V_i\ ,\quad 1 \leq i \leq q \\ K = \bigcap_{i=1}^{q} K_i\ . \end{cases}$$

Enfin

(1.10) $$\begin{cases} \text{dans (1.5), chaque } a_i \text{ est une forme bilinéaire continue sur } V_i\ \text{, avec} \\ a_i(v,v) \geq \alpha_i \|v\|_i^2\ ,\ \alpha_i > 0,\ \forall\ v \in V_i \end{cases}$$

---

(1) Séminaire Leray, 1966-67.

Remarque 1.5.

Il suffirait de la coercivité de a_i sur $K_i - K_i$..

Avant de donner la méthode itérative, donnons un exemple simple.

1.3. Un exemple simple.

Soit : Ω = ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ assez régulière ;

$$V = H^1(\Omega) = \{v \mid v, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1,\dots,n\} \ (^2) ,$$

$$H = L^2(\Omega), \ (f,g) = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx,$$

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + (u,v) ,$$

$$K = \{v \mid v \in H^1(\Omega), \ v \geqq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma \ (^3)\} .$$

On prendra alors [4]

$$V_i = \{v \mid v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\} ;$$

muni de la norme

$$\|v\|_i = \left(\int_\Omega [v^2 + (\frac{\partial v}{\partial x_i})^2] dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

c'est un espace de Hilbert et l'on a (1.7) (1.8).

Puis

(1.11) $\quad K_i$ = adhérence de K dans V_i [5].

Formellement

$$K_i = \{v \mid v \in V_i, \ v \geqq 0 \text{ sur la portion de } \Gamma \text{ où } v \text{ peut être défini}\}.$$

Par exemple si

$$\Omega =]-1,1[^n$$

on a :

$$K_i = \{v \mid v \in V_i, \ v(x_1,\dots,x_{i-1}, \pm 1, x_{i+1},\dots,x_n) \geqq 0\} .$$

Ensuite

$$a_i(u,v) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{n}(u,v)$$

et l'on a (1.5) (1.10).

Voir d'autres exemples au n°3.

---

(2) Espace de Sobolev classique.

(3) Cela a un sens et définit un convexe fermé de $H^1(\Omega)$ (en fait un cône).

(4) Naturellement une infinité d'autres "éclatements" sont possibles.

(5) Cela n'est pas toujours vérifié. Cf. Exemple 4.2.

1.4. La méthode itérative.

Soient ε, k deux paramètres > 0. Soit $u^\circ \in K_q$.

Supposons $u^{n+\frac{i-1}{q}} \in K_{i-1}$ $(1 \leqq i \leqq q)$ connu. On détermine $u^{n+i/q}$ comme la solution dans K_i de

$$(1.12) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{k}(u^{n+i/q} - u^{n+\frac{i-1}{q}}, v-u^{n+i/q}) + a_i(u^{n+i/q}, v-u^{n+i/q}) \geqq L_i(v-u^{n+i/q}) \\ \forall\, v \in K_i \end{cases}$$

où

$$(1.13) \quad \begin{cases} L_i = \text{forme linéaire continue sur } V_i , \\ L = \sum_{i=1}^{q} L_i \; (^6) \end{cases}$$

Remarque 1.6. La solution $u^{n+i/q}$ de (1.12) existe et est unique d'après le théorème 1.1.

On peut maintenant énoncer le

THÉORÈME 1.2. On suppose que (1.1) (1.4) ... (1.10) (1.13) ont lieu. On suppose que $\varepsilon, k \to 0$ avec

$$(1.14) \qquad \frac{k}{\varepsilon} \to 0 .$$

On suppose que N est un entier $\to +\infty$ avec

$$(1.15) \qquad Nk = T, \quad T \text{ fixé} > 0 .$$

Alors

$$(1.16) \qquad \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+i/q} \to u \text{ dans } V_i \text{ faible,}$$

où u est la solution de (1.2).

La démonstration est donnée au n° 3.

Remarque 1.7.

On donne dans [12] un résultat plus général correspondant à une discrétisation de la situation (en vue de l'Analyse Numérique de ces problèmes). Mais l'idée de la démonstration est la même que celle donnée au n°3.

Remarque 1.8.

Cf. [7] pour d'autres méthodes itératives.

2. Remarques heuristiques. Liens avec d'autres méthodes.

2.1. Une remarque sur le cas des équations.

Soit V' le dual de V, $V \subset H \subset V'$, et $A \in \mathcal{L}(V, V')$ l'opérateur défini par $a(u,v)$: $a(u,v) = (Au,v)$, $u \in V$, $v \in V$, $Au \in V'$ (et (Au,v) désignant le produit scalaire entre V' et V).

$(^6)$ Une telle décomposition existe toujours.

Pour L donné dans V', soit u la solution unique de

$$Au = L \quad (^7) \tag{2.1}$$

Associons à (2.1) <u>le problème d'évolution</u>

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dw_\varepsilon}{dt}(t) + Aw_\varepsilon(t) = L & (\varepsilon > 0) \\ w_\varepsilon(o) = u_o \ , \ u_o \text{ quelconque dans } V \text{ (ou } H). \end{cases} \tag{2.2}$$

Ce problème admet une solution unique, $w \in L^2(o,T ; V)$ et on vérifie facilement que

$$\frac{1}{T}\int_o^T w_\varepsilon(t)dt \to u \quad \text{dans } V \text{ lorsque } \varepsilon \to 0. \tag{2.3}$$

2.2. <u>Equations d'évolution et "splitting-up"</u>.

Le résultat (2.3) montre que, pour "approcher" u, "il suffit d'approcher" la solution d'une <u>équation d'évolution</u> de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = L \\ u(o) = u_o \text{ donné.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Une méthode <u>fondamentale</u> en analyse numérique est la suivante : supposons que $V = \bigcap_{i=1}^{q} V_i$ et que l'on ait (1.5) (et (1.10)), d'où avec des notations évidentes

$$A = \sum_{i=1}^{q} A_i \ . \tag{2.5}$$

Supposons également que (1.13) ait lieu.

Admettons u(t) "calculé approximativement" à l'instant

$$t_n = nk$$

et soit u^n cette "approximation". On va calculer l'approximation u^{n+1} au temps $(n+1)k$ en <u>décomposant</u> (splitting up) (2.4) <u>en</u> q <u>équations</u>, de la façon suivante : on considère :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} u^{n+i/q}(t) + A_i u^{n+i/q}(t) = L_i \quad \text{dans } [t_n, t_{n+1}] \\ u^{n+i/q}(t_n) = u^{n+\frac{i-1}{q}}(t_{n+1}) \end{cases} \tag{2.6}$$

et l'on prend

$$u^{n+1} = u^{n+1}(t_{n+1}) \ . \tag{2.7}$$

Cette méthode a été étudiée dans [14] [23] [20] [21]. Antérieurement des méthodes de ce genre, mais techniquement un peu différentes, avaient été introduites dans [3] [16] (méthodes de Directions Alternées).

2.3. <u>Le procédé itératif</u> (1.12) consiste à utiliser simultanément les idées des points 2.1, 2.2, à <u>discrétiser</u> en t l'équation correspondant à (2.6) et enfin à <u>remplacer les équations par des inéquations variationnelles</u>.

(7) Cela correspond à K = V dans le théorème 1.1.

On arrive ainsi à la formulation (1.12).

2.4. Raccord avec d'autres méthodes.

La méthode du "splitting up" évoquée en 2.2 est évidemment liée au théorème de Trotter [22] (cf. des variantes et applications récentes dans [4]) : si A et B sont générateurs infinitésimaux de semi groupes alors, sous des hypothèses convenables [22] [4] on a :

$$\exp t(A+B) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp \frac{t}{n} A \ \exp. \frac{t}{n} B\right)^n$$

3. Démonstration du théorème de convergence de la méthode itérative.

3.1. Estimations a priori.

On peut écrire (1.12) sous la forme équivalente

$$(3.1)\quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{k}\left(u^{n+i/q} - u^{n+\frac{i-1}{q}}, u^{n+i/q} - v\right) + a_i(u^{n+i/q}, u^{n+i/q}) \leq \\ \qquad \leq a_i(u^{n+i/q}, v) - L_i(v-u^{n+i/q}), \quad \forall\, v\in K_i . \end{cases}$$

Fixons v dans $K = \cap K_i$ dans (3.1). Posons

$$(3.2)\qquad \varphi^{n+i/q} = u^{n+i/q} - v .$$

On déduit de (3.1)

$$(3.3)\quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2k}\left[|\varphi^{n+i/q}|^2 - |\varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2 + |\varphi^{n+i/q} - \varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2\right] + \alpha_i\|u^{n+i/q}\|_i^2 \leq \\ \qquad \leq c(\|u^{n+i/q}\|_i + \|v-u^{n+i/q}\|_i) \end{cases}$$

où ici et dans la suite les c désignent des constantes diverses. On en déduit aussitôt

$$(3.4)\quad \varepsilon\left[|\varphi^{n+i/q}|^2 - |\varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2 + |\varphi^{n+i/q} - \varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2\right] + k\|u^{n+i/q}\|_i^2 \leq ck .$$

De (3.4) résulte d'abord que

$$\varepsilon\left(|\varphi^{n+i/q}|^2 - |\varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2\right) \leq ck .$$

Par sommation on en déduit

$$(3.5)\qquad \varepsilon\left(|\varphi^{n+i/q}|^2 - |\varphi^{o}|^2\right) \leq cqkn$$

On suppose $0 \leq n \leq N-1$. D'après (1.15) on a donc $kn \leq T$ et (3.5) entraîne

$$(3.6)\qquad \varepsilon|\varphi^{n+i/q}|^2 \leq c, \text{ d'où évidemment } \varepsilon|u^{n+i/q}|^2 \leq c .$$

Sommant en i de 1 à q puis en n de 1 à $N-1$ on déduit ensuite de (3.4) que

$$(3.7)\qquad \varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{q} |\varphi^{n+i/q} - \varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2 \leq c \ (^8)$$

(8) Evidemment $\varphi^{n+i/q} - \varphi^{n+(\frac{i-1}{q})} = u^{n+i/q} - u^{n+\frac{i-1}{q}}$.

(3.8) $$k \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{q} \|u^{n+i/q}\|_i^2 \leq c.$$

3.2. <u>Utilisation de</u> (3.6) (3.7) (3.8).

On passe du "discret" au "continu" en introduisant

(3.9) $u_{i,\varepsilon}(t) = u^{n+i/q}$ dans $[nk, (n+1)k[$, $0 \leq n \leq N-1$ (9)

<u>Alors</u> (3.6) <u>et</u> (3.8) <u>équivalent à</u>

(3.10) $$\sqrt{3}|u_{i,\varepsilon}(t)| \leq c \quad \text{p.p.}, \quad \forall\, i, \quad t \in [0,T]$$

(3.11) $u_{i,\varepsilon}$ demeure dans un borné de $L^2(0,T\,;\,V_i)$.

Par ailleurs (3.7) s'écrit encore

(3.12) $$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{q} k|u^{n+i/q} - u^{n+\frac{i-1}{q}}|^2 \leq c\,\frac{k}{\varepsilon}$$

Mais (3.12) s'écrit encore

(3.13) $$\sum_{i=1}^{q} \int_0^T |u_{i,\varepsilon}(t) - u_{i-1,\varepsilon}(t)|^2 dt \leq c\,\frac{k}{\varepsilon}$$

D'après (3.11) on peut extraire de ε une suite (encore notée ε !) telle que

(3.14) $u_{i,\varepsilon} \to w_i$ dans $L^2(0,T\,;\,V_i)$ faible.

Mais grâce à (3.13) et à l'hypothèse (1.14), on a :

(3.15) $$w_1 = w_2 = \ldots = w_q$$

et posons donc $w_i = w$ $\forall$ i.

On a donc démontré :

(3.16) $u_{i,\varepsilon} \to w$ dans $L^2(0,T;\,V_i)$ faible, w indépendant de i

(et donc $w \in L^2(0,T;\,V)$).

3.3. <u>La fonction</u> w <u>est p.p. à valeurs dans</u> K.

Soit $\mathcal{K}_i = \{v | v \in L^2(0,T;\,V_i|,\ v(t) \in K_i \text{ p.p.}\}$; $\mathcal{K}_i$ est un convexe fermé de $L^2(0,T;\,V_i)$, donc faiblement fermé ; comme $u^{n+i/q} \in K_i$ on a : $u_{i,\varepsilon} \in \mathcal{K}_i$ et donc $w \in \mathcal{K}_i$ donc

$$w \in \bigcap_{i=1}^{q} \mathcal{K}_i$$

d'où 3.3.

3.4. <u>On va dans ce point</u> 3.4 <u>montrer que</u>

(3.17) $w(t) = u$ p.p., u étant la solution de (1.2) (10) .

Pour cela, soit $\psi \in \mathcal{D}(]0,T[)$, $\psi \geq 0$; posons :

(3.18) $$\begin{cases} \psi^n = \dfrac{1}{k} \displaystyle\int_{nk}^{(n+1)k} \psi(s)ds \\ \\ \psi_k(t) = \psi^n \text{ dans } [nk,(n+1)k[. \end{cases}$$

(9) Noter que $u^{n+i/q}$ dépend évidemment de ε et k. Considérant ε comme le "paramètre fondamental", on a donc $u_{i,\varepsilon}(t)$ qui dépend de ε .

(10) Cela montrera que l'extraction d'une sous suite est inutile.

On multiplie (3.1), où l'on prend $v \in K$, par ψ^n et par k ; on en déduit

$$\frac{\varepsilon}{2}\psi^n(|\varphi^{n+i/q}|^2 - |\varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2) + \underline{\frac{\varepsilon}{2}\psi^n|\varphi^{n+i/q} - \varphi^{n+\frac{i-1}{q}}|^2} +$$

$$+ k\, a_i(u^{n+i/q},u^{n+i/q})\psi^n \leqq k\, a_i(u^{n+i/q},v)\psi^n - k\psi^n L_i(v - u^{n+i/q}).$$

Laissant tomber le terme souligné, et sommant en i puis en n, on en déduit

$$(3.19)\quad \begin{aligned} &\underline{\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\psi^n(|\varphi^{n+1}|^2 - |\varphi^n|^2)} + \sum_{i=1}^{q}\sum_{n=0}^{N-1} k\, a_i(u^{n+i/q},u^{n+i/q})\psi^n \leqq \\ &\leqq \sum_{i=1}^{q}\sum_{n=0}^{N-1} k\, a_i(u^{n+i/q},v)\psi^n - \sum_{i=1}^{q}\sum_{n=0}^{N-1} k\,\psi^n L_i(v - u^{n+i/q}). \end{aligned}$$

Le terme souligné dans (3.19) tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$. En effet il vaut

$$\frac{\varepsilon}{2}\sum_{1}^{N-1}(\psi^{n-1} - \psi^n)|\varphi^n|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\psi^{N-1}|\varphi^N|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\psi^\circ|\varphi^\circ|^2 ;$$

les deux derniers termes tendant vers 0 (avec (3.6) et $\psi^{N-1} \to 0$ car $\psi \in \mathcal{D}(]o,T[)$) et la somme est majorée par

$$c\,\varepsilon\sum_{n=1}^{N-1} k|\varphi^n|^2 \leqq c\,\varepsilon\int_0^T |u_{q,\varepsilon}(t) - v|^2 dt \to 0 \quad \text{comme} \quad \varepsilon .$$

On peut alors écrire (3.19) sous la forme :

$$(3.20)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{q}\int_0^T a_i(u_{i,\varepsilon}(t),u_{i,\varepsilon}(t))\psi_k(t)dt + O(\varepsilon) \leqq \\ \displaystyle\leqq \sum_{i=1}^{q}\int_0^T a_i(u_{i,\varepsilon}(t),v)\psi_k(t)dt - \sum_{i=1}^{q}\int_0^T L_i(v-u_{i,\varepsilon}(t))\psi_k(t)dt. \end{cases}$$

Mais

$$\int_0^T a_i(u_{i,\varepsilon}(t),u_{i,\varepsilon}(t))\psi_k(t)dt = \int_0^T a_i(u_{i,\varepsilon},u_{i,\varepsilon})(\psi_k - \psi)dt + \int_0^T a_i(u_{i,\varepsilon},u_{i,\varepsilon})\psi dt$$

donne avec (3.16)

$$\text{lim. inf.} \int_0^T a_i(u_{i,\varepsilon},u_{i,\varepsilon})\psi_k dt \geqq \int_0^T a_i(w,w)\psi dt$$

et grâce à (3.16) on déduit finalement de (3.20)

$$\sum_{i=1}^{q}\int_0^T a_i(w(t),w(t))\psi(t)dt \leqq \sum_{i=1}^{q}\int_0^T a_i(w(t),v)\psi(t)dt - \sum_{i=1}^{q}\int_0^T L_i(v-w(t))\psi(t)dt$$

ou encore

$$(3.21)\quad \int_0^T [a(w(t),v-w(t)) - L(v-w(t))]\psi(t)dt \geqq 0 \quad \forall\, \psi \in \mathcal{D}(]o,T[),\ \psi \geqq 0 \ \text{ et } \ \forall\, v \in K.$$

Donc, p.p.,

$$a(w(t),v-w(t)) \geqq L(v-w(t)) \qquad \forall\, v \in K$$

donc (puisque $w(t) \in K$ p.p.)

$$w(t) = u \text{ p.p.} \quad \text{C'est (3.17).}$$

3.5. Fin de la preuve.

De (3.16) et (3.17) on déduit que

$$\frac{1}{T}\int_0^T u_{i,\varepsilon}(t)dt \to u \quad \text{dans } V_i \text{ faible, } \forall\, i,$$

et cela n'est autre que (1.16).

4. Exemples.

4.1. Exemple 1.

Reprenons d'abord l'exemple du point 1.3.

Le problème (1.2) correspondant équivaut à celui-ci : trouver $u \in H^1(\Omega)$ satisfaisant à

$$(4.1)\quad \begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega \quad (\text{on prend } L(v) = \int_\Omega f\, v\, dx,\ f \in L^2(\Omega)) \\ u \geqq 0 \text{ sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \geqq 0 \text{ sur } \Gamma \quad (\frac{\partial}{\partial \nu} = \text{dérivée normale à } \Gamma \text{ dirigée vers l'extérieur de } \Omega) \\ u.\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ (^{11}) \end{cases}$$

Remarque 4.1.

Dans (4.1) $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ de sorte que $u.\frac{\partial u}{\partial \nu}$ a un sens.

Avec le choix de a_i et de K_i donnés en 1.3, le problème correspondant à (1.12) est (on prend

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

et pour qu'il n'y ait pas de confusion avec la dimension on appelle "p" l'indice d'itération) :

$$(4.2)\quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{k}\left(u^{p+i/n} - u^{p+\frac{i-1}{n}}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^{p+i/n} + u^{p+i/n} = f_i \\ u^{p+i/n} \geqq 0 \text{ sur } \Gamma_i = \{x \mid x \in \Gamma,\ \cos(\nu, x_i) \neq 0\} \\ \frac{\partial u^{p+i/n}}{\partial x_i} \cdot \cos(\nu, x_i) \geqq 0 \text{ sur } \Gamma \\ u^{p+i/n} \cdot \frac{\partial u^{p+i/n}}{\partial x_i} = 0 \text{ sur } \Gamma\ ; \end{cases}$$

On voit que le problème (4.2) est un problème en dimension 1, en la variable x_i , les x_j , $j \neq i$, jouant le rôle de paramètres.

4.2. Exemple 2.

Reprenons $a(u,v)$ comme en 1.3 :

$$(4.3)\quad a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + (u,v)$$

(11) Des exemples de ce type interviennent dans les applications. Cf. [5], [15], [17], [18].

(4.4) $$K = \{v | \; v \geqq 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

et décomposons Γ en q parties $\Gamma_1,\dots,\Gamma_q$:

(4.5) $$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_q$$

chaque Γ_i étant "régulier".

Prenons alors

(4.6) $$V_i = V = H^1(\Omega), \forall \; ;$$

(4.7) $$K_i = \{v | v \in V, \; v \geqq 0 \text{ sur } \Gamma_i\} \; (12)$$

et choisissons

(4.8) $$a_i(u,v) = \frac{1}{q} a(u,v) \quad \forall \; i \; ,$$

(4.9) $$f_i = \frac{1}{q} f, \qquad L(v) = \int_\Omega fv dx \; , \; f \in L^2(\Omega) \; .$$

Alors :

le problème initial est encore (4.1) ;

le problème itératif est :

(4.10) $$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{k} \left(u^{p+i/q} - u^{p+\frac{i-1}{q}}\right) - \frac{1}{q} \Delta u^{p+i/q} + \frac{1}{q} u^{p+i/q} = \frac{1}{q} f \\ \left\{ \begin{array}{l} u^{p+i/q} \geqq 0 \quad \text{sur } \Gamma_i \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u^{p+i/q} \geqq 0 \quad \text{sur } \Gamma_i \\ u^{p+i/q} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} u^{p+i/q} = 0 \text{ sur } \Gamma_i \end{array} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u^{p+i/q} = 0 \quad \text{sur } \Gamma - \Gamma_i \; . \end{cases}$$

<u>Remarque</u> 4.2.

On voit que "l'éclatement" de K en les K_i permet de "diminuer le nombre"(13) des <u>inégalités à la frontière</u>.

4.3. <u>Exemple</u> 3.

Reprenons $a(u,v)$, V comme en (4.3) et soit maintenant

(4.11) $K = \{v | \; 0 \leqq v \leqq g$ sur Γ, g donnée dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $g \geqq 0\}$.

Le problème initial (1.2) (avec $L(v) = \int_\Omega fv dx$, $f \in L^2(\Omega)$) est :

(4.12) $$- \Delta u + u = f$$

<u>et sur</u> Γ :

(12) Dans ce cas on n'a pas (1.11).

(13) Ce qui a un sens après discrétisation.

$$(4.13)\quad \begin{cases} u(x) = 0 \;,\; \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) \geqq 0 \\ \underline{\text{ou}} \\ u(x) = g(x) \;,\; \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) \leqq 0 \\ \underline{\text{ou}} \\ 0 < u(x) < g(x) \;,\; \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 \;. \end{cases}$$

Il est naturel de considérer K comme

$$(4.14)\quad \begin{cases} K = K_1 \cap K_2 \\ K_1 = \{v \mid v \geqq 0 \text{ sur } \Gamma\} \;,\; K_2 = \{v \mid v \leqq g \text{ sur } \Gamma\} \;. \end{cases}$$

On prend

$$a_i(u,v) = \tfrac{1}{2}\, a(u,v) \;,\; f_i = \tfrac{1}{2} f \qquad (q = 2)$$

et le problème itératif devient le suivant :

$$(4.15)\quad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{k}\,(u^{p+\frac{1}{2}} - u^p) + \tfrac{1}{2}(-\Delta u^{p+\frac{1}{2}} + u^{p+\frac{1}{2}}) = \tfrac{1}{2} f \\ u^{p+\frac{1}{2}} \geqq 0 \text{ sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial u^{p+\frac{1}{2}}}{\partial \nu} \geqq 0 \text{ sur } \Gamma \\ u^{p+\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{\partial u^{p+\frac{1}{2}}}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma \;; \end{cases}$$

<u>et</u>

$$(4.16)\quad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{k}\,(u^{p+1} - u^{p+\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{2}(-\Delta u^{p+1} + u^{p+1}) = \tfrac{1}{2} f \\ u^{p+1} \leqq g \text{ sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial u^{p+1}}{\partial \nu} \leqq 0 \text{ sur } \Gamma \\ (u^{p+1} - g)\, \dfrac{\partial u^{p+1}}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma \;. \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BREZIS. Thèse 3ème cycle, Paris, 1966.

[2] F. BROWDER. Non linear monotone operators... Bull. Amer. Math. Soc., 71, p.780-785.

[3] J. DOUGLAS Jr. On the numerical integration of $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$ by implicit methods. J. Siam (1955), p. 42-65.

[4] W.G. FARIS. The product formula for semi groups defined by Friedrichs extensions. A paraître.

[5] G. FICHERA. Problemi elastotatici con vincoli unilaterali. Memorie dell'Accad. Naz. dei Lincei, S. VIII, vol. VII (1964), p. 91-140.

[6] P. HARTMAN-G. STAMPACCHIA. On some non linear elliptic differential-functional equations. Acta Math. 115 (1966), p. 271-310.

[7] Y. HAUGAZEAU. C.R. Acad. Sc. Paris, Novembre 1966.

[8] J.L. LIONS. Remarks on evolution inequalities. Journal of the Maths. Soc. of Japan, 18 (1966), p. 331-342.

[9] J.L. LIONS. Sur le contrôle optimal... C.R. Acad. Sc. Paris, 2, 9, 16 Novembre 1966.

[10] J.L. LIONS-G. STAMPACCHIA. C.R. Acad. Sc. Paris, 261 (1965), p. 25-27.

[11] J.L. LIONS-G. STAMPACCHIA. A paraître aux Comm. Pure Applied Maths.

[12] J.L. LIONS-R. TEMAM. C.R. Acad. Sc. Paris, Octobre 1966.

[13] J.L. LIONS-R. TEMAM. A paraître.

[14] G.I. MARCHOUK. Méthodes numériques... (en russe). Novosibirsk, 1965.

[15] J.J. MOREAU. Principes extrémaux pour le problème de la naissance de la cavitation. Journal de Mécanique, 1967.

[16] D.W. PEACEMAN-M.M. RACHFORD. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. Journal SIAM (1955), p. 28-42.

[17] W. PRAGER. Unilateral constraints in mechanics of continua. Atti del Convegno Lagrangiano, Torino, Accad. delli Scienze (1964), p. 181-191.

[18] A. SIGNORINI. Questioni di elasticità non linearizzata e semi linearizzata. Rendic. Mat. 18 (1959), p. 95-139.

[19] G. STAMPACCHIA. C.R. Acad. Sc. Paris 258 (1964), 4413-4415.

[20] R. TEMAM. C.R. Acad. Sc. Paris, Janvier et Août 1966.

[21] R. TEMAM. Thèse, Paris 1967.