Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

F. Trèves

Zones d'analyticité des solutions élémentaires

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1966-1967), p. 14-22
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1966-1967___1_14_0>

ZONES D'ANALYTICITÉ DES SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES

par F. TREVES

Je vais décrire rapidement certains résultats obtenus en collaboration avec Monsieur M. Zerner, du Département de Mathématiques de Nice. Ces résultats ne s'appliquent qu'à des opérateurs différentiels (sur $\mathbb{R}^n$) à coefficients constants. Il s'agit de montrer que, pour une classe de tels opérateurs, on peut construire des solutions élémentaires qui sont des fonctions analytiques en dehors d'un certain cône algébrique de $\mathbb{R}^n$ (distinct de $\mathbb{R}^n$ entier et dépendant, bien entendu !, de l'opérateur différentiel). Le résultat en question est bien connu dans le cas des opérateurs strictement (ou fortement) hyperboliques, grâce aux travaux de Leray, Mizohata (qui l'étendent aux systèmes à coefficients analytiques) : dans ce cas, le cône algébrique en dehors duquel la solution élémentaire est analytique n'est autre que le <u>cône bicaractéristique</u>. Le résultat est connu aussi dans le cas des opérateurs différentiels, en fait des systèmes à coefficients analytiques, paraboliques (au sens de Petrowsky) ; sur ce sujet, voir les travaux de Kotaké. Le cône algébrique "singulier" est dans ce dernier cas l'hyperplan $t = 0$. Ceci est encore vrai dans le cas de l'équation de Schrödinger, pour laquelle la solution élémentaire se construit directement de façon élémentaire. Enfin, d'après Gårding, il ne serait pas difficile de vérifier que tout opérateur différentiel de la forme $P(\partial/\partial x)$, où P est un polynôme homogène <u>réel</u> sur $\mathbb{R}^n$ dont le gradient est elliptique (i.e. à caractéristiques réelles simples), possède une solution élémentaire qui est analytique en dehors du cône bicaractéristique, c'est-à-dire du cône qui est la réunion des droites $x = t \text{ grad } P(\xi)$ $(t \in \mathbb{R})$ lorsque $\xi \in \mathbb{R}^n$ varie en vérifiant l'équation caractéristique $P(\xi) = 0$. C'est l'étude de ce dernier type de polynômes qui est à l'origine du travail que je vais décrire ; il s'est agi tout d'abord de supprimer la condition que P soit homogène. Nous verrons que le résultat est encore vrai (dans la définition des cônes caractéristiques et bicaractéristiques, il faut naturellement remplacer le polynôme P par sa <u>partie principale</u> P_m , c'est-à-dire la partie homogène de degré maximum, m, de P ; ainsi donc, et ceci dans toute la suite, le degré de P sera noté $\underline{m}$).

Enfin, il nous faut bien signaler que le résultat est aussi connu - depuis assez longtemps - dans le cas <u>elliptique</u> : ici, le cône, en dehors duquel les solutions élémentaires (dans leur totalité) sont analytiques, se réduit à l'origine.

Cette note se subdivise en quatre parties : 1°) énoncé du critère obtenu ; 2°) exemples d'applications ; 3°) esquisse de la démonstration ; 4°) conséquences de l'existence d'une solution élémentaire qui est analytique dans certaines zones.

1°. Enoncé du critère fondamental

Nous considérons un polynôme P à n variables, à coefficients complexes ; $P(\partial/\partial x)$ sera l'opérateur différentiel que l'on étudie. On considère aussi un second polynôme $Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, de degré d, homogène ; la variété des zéros réels de Q, $\{x \in \mathbb{R}^n ; Q(x) = 0\}$, sera le cône algébrique en dehors duquel la solution élémentaire construite sera analytique.

THÉORÈME 1. Supposons qu'il existe une application C^1, $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, bornée ainsi que toutes ses dérivées premières, avec $|v(\xi)| = 1$ si $|\xi| \geq 1$, et des constantes $\rho, \tau_0, \theta, c, C > 0$ telles que l'on ait, pour tous $\tau \geq \tau_0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq \rho\tau$,

(1) $$|P(\xi + i\tau v(\xi))| \geq c ,$$

(2) $$\left|Q\left(\tau \frac{\operatorname{grad} P(\xi+i\tau v(\xi))}{P(\xi+i\tau v(\xi))}\right)\right| \leq C\left(\frac{\tau}{\tau+|\xi|}\right)^{\theta} ,$$

(3) et pour tout n-uple β de type Q (voir ci-dessous), $\beta \neq 0$,

$$\tau^{|\beta|}\left|\frac{P^{(\beta)}(\xi+i\tau v(\xi))}{P(\xi+i\tau v(\xi))}\right| \leq C\left(\frac{\tau}{\tau+|\xi|}\right)^{\theta(|\beta|-1)} .$$

Dans ces conditions, le polynôme différentiel $P(D)$ possède une solution élémentaire qui est analytique dans l'ouvert

$$\{x \in \mathbb{R}^n ; Q(x) \neq 0\} .$$

Nous disons qu'un n-uple $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ est de type Q si $\beta_j = 0$ pour tout j tel que $Q(X)$ ne dépende pas de la variable X_j. La démonstration du théorème 1 va se faire par construction : on construira la solution élémentaire E de la façon suivante. On prendra $E = E_0 + h$, où h sera une fonction entière de type exponentiel, et E_0 la distribution définie par

(4) $$\langle E_0, \check{u} \rangle = \int_{S_\tau} \frac{\hat{u}(\zeta)}{P(\zeta)} \Phi_\tau(\zeta) d\zeta ,$$

où u est un élément arbitraire de $C_c^\infty(R^n)$, $\hat{u}$ sa transformée de Fourier, $\check{u}(x) = u(-x)$, τ un nombre réel $\geq \tau_0$,

$S_\tau = \{\zeta \in \mathbb{C}^n ; \operatorname{Im} \zeta = \tau v(\operatorname{Re} \zeta)\}$,

$\Phi_\tau(\zeta) = \phi(\tau^{-1} \operatorname{Re} \zeta)$, avec :

$\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(\xi) = 0$ si $|\xi| < \rho$, $\phi(\xi) = 1$ si $|\xi| > 2\rho$.

2°. Exemples d'applications

2°.1.- Opérateurs à partie principale réelle et à caractéristiques réelles simples

Dans ce cas, donc, $P_m(\xi)$ est réel pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $\operatorname{grad} P_m(\xi)$ ne s'annule (dans $\mathbb{R}^n$) que si $\xi = 0$. Montrons d'abord ce qu'il convient de prendre comme polynôme homogène Q. Un raisonnement élémentaire d'algèbre montre que, sous les hypothèses précédentes, la réunion des droites $t \operatorname{grad} P_m(\xi)$, lorsque $P_m(\xi) = 0$ (et $\xi \neq 0$), et de l'origine (car les droites précédentes peuvent ne pas exister !

c'est le cas elliptique), constitue un cône algébrique, donc l'ensemble des zéros réels d'un polynôme homogène (qu'on peut évidemment prendre à coefficients réels - comme c'est toujours le cas d'ailleurs, lorsqu'on veut appliquer le théorème 1) qui sera notre polynôme Q.

Quant à l'application v, on prendra

$$v(\xi) = \frac{\operatorname{grad} P_m(\xi)}{|\operatorname{grad} P_m(\xi)|} \quad \text{pour} \quad |\xi| \geqq 1 .$$

Le fait que les conditions (1), (2), (3) du th. 1 soient satisfaites découle de la propriété suivante, facile à vérifier :

(5) Il existe $c > 0$, $\rho \geqq 1$ tels que, pour tout $\tau \geqq 1$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geqq \rho\tau$,

$$|P(\xi + i\tau v(\xi))| \geqq c\tau(|\xi|+\tau)^{m-1}.$$

Bien entendu, le cône qui contient les singularités de la solution élémentaire construite, c'est-à-dire la réunion des droites $t \operatorname{grad} P_m(\xi)$, avec $P_m(\xi) = 0$, est le cône bicaractéristique de $P(D)$.

Ainsi se trouve couvert le cas strictement hyperbolique, les équations ultra-hyperboliques, ainsi que les elliptiques, même à coefficients complexes comme on le voit en remplaçant $P(D)$ par $P(D)\bar{P}(D)$.

2°.2.- <u>Polynômes différentiels semi-elliptiques</u>

Exceptionnellement, dans ce paragraphe, m désigne non pas un entier mais un n-uple $(m_1, \ldots, m_n)$ d'entiers $\geqq 0$; si p est un autre n-uple, on pose

$$|p : m| = \sum_{j=1}^{n} p_j/m_j ,$$

et on choisit m assez grand pour que

$$P(X) = \sum_{|p:m|\leqq 1} a_p X^p .$$

Si l'on peut de plus choisir m tel que $P_m(X) = \sum_{|p:m|=1} a_p X^p$ ait comme unique zéro réel l'origine, on dit que $P(D)$ est semi-elliptique ; m est déterminé sans ambiguïté puisqu'alors m_j est exactement le degré de P par rapport à X_j.

On posera $|\zeta|^m = |\zeta_1|^{m_1} + \ldots + |\zeta_n|^{m_n}$ ($\zeta \in \mathbb{C}^n$). Supposons que $P(D)$ soit semi-elliptique de "multi-degré" m ; alors, il existe des constantes $\rho, C > 0$ telles que, pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $|\xi|^m \geqq \rho|\eta|^m$, on ait :

$$(6) \qquad 1 + |\xi|^m + |\eta|^m \leqq C(1 + |P(\xi+i\eta)|).$$

Notons $d(\xi)$ le degré du polynôme $P(T\xi)$ par rapport à l'indéterminée T et V_P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ formé de 0 et des $\xi \neq 0$ tels que $d(\xi)$ <u>soit minimum sans être maximum</u>. Il résulte alors immédiatement du th. 1 et de (6) que $P(D)$ possède une solution élémentaire analytique dans le complémentaire de V_P.

Les polynômes différentiels elliptiques, paraboliques et antiparaboliques (au sens de Pétrowsky) sont semi-elliptiques. Tout polynôme différentiel semi-elliptique est hypoelliptique (voir Hörmander [1], Th. 4.1.8). Dans le cas parabolique ou anti-parabolique, le sous-espace vectoriel V_P est l'hyperplan $t = 0$.

2°.3. Le polynôme différentiel de Schrödinger

Il est bien connu que l'opérateur différentiel

$$\frac{1}{i}(\partial/\partial t) + (\partial/\partial x_1)^2 + \dots + (\partial/\partial x_n)^2$$

possède une solution élémentaire analytique pour $t \neq 0$, par exemple

$$E = i\left(\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n Y(t) \exp\left(\frac{|x|^2}{4it}\right) ,$$

où $Y = 0$ pour $t < 0$ et $Y = 1$ pour $t \geqq 0$. Convenons d'écrire x_0 au lieu de t, et ξ_0 pour la variable correspondante après transformation de Fourier. On peut vérifier (mais c'est plutôt pénible !) que les conditions (1), (2), (3) du th. 1 peuvent être satisfaites pour un choix convenable de v. Bien entendu, $Q(\xi) = \xi_0$. Bornons-nous à signaler qu'on peut prendre

$$v(\xi_0,\xi) = (a(\xi_0,\xi),\xi)\{a(\xi_0,\xi)^2 + |\xi|^2\}^{-\frac{1}{2}} ,$$

avec $a(\xi_0,\xi) = (1+\xi_0^2)^{\phi(\alpha)}$, $\alpha = \xi_0/(1+|\xi|^2)$, et ϕ une fonction C^∞ de α réel, $0 \leqq \phi \leqq 1$, $\phi(\alpha) = 0$ pour $\alpha \geqq 0$ et $\phi(\alpha) = 1$ pour $\alpha \leqq -1$.

3°. Principe de la démonstration du théorème 1

On se rapporte à la formule (4) qui a un sens, et définit bien une distributio sur $\mathbb{R}^n$, à cause de (1). On remarque que $u = P(D)v$,

$$< E_0,\check{u} > = \int_{S_\tau} \hat{v}(\zeta)\Phi_\tau(\zeta)d\zeta = v(0) - \int h_1(x)v(-x)dx,$$

où h_1 est une fonction entière de type exponentiel. En prenant pour h une solution, fonction entière de type exponentiel, de $P(D)h = h_1$, on voit que E_0+h est une solution élémentaire de $P(D)$. Il suffira donc de montrer que E_0 est analytique en dehors du cône d'équation $Q(x) = 0$. Pour cela, il suffira de prouve que, pour tout ouvert borné Ω de R^n, il existe des constantes $A,M,N \geqq 0$ et un entier $k \geqq 1$ tels que, pour tout n-uple p, $|p| \geqq N$, et toute fonction $u \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$(7)\qquad |<Q^{k|p|}D^pE_0,u>| \leqq M^{|p|+1}\, p!\int e^{A|p||x|}\, |u(x)|dx .$$

L'entier k sera choisi (voir p.15) de manière à vérifier $|p|\theta(k-4)/4 \geqq |p|+n+1$ pour tout n-uple p, $|p| \geqq n+1$.

Il faut souligner le fait que E_0 dépend du choix de τ ; pour bien marquer cela, on écrira $E_0(\tau)$. En réalité, nous choisirons τ une fois pour toutes (τ sera grand). En supposant $|p| > \tau$, on a, évidemment,

$$E_0(\tau) = E_0(|p|) + (E_0(\tau) - E_0(|p|)) .$$

A partir de cette remarque triviale, la démonstration s'effectue en deux étapes : on commence par prouver (à l'aide du th. de Stokes et de majorations évidentes) que si $\tau \geqq \tau'$,

$$|< E_\circ(\tau) - E_\circ(\tau'), D^p(Q^{|p|}u) >| \leqq M'^{|p|+1}(\tau')^{|p|+n+1} \int e^{2\pi\tau'|x|} |u(x)|dx,$$

où la constante M' ne dépend que de l'ouvert Ω et du nombre ρ qui définit Φ (voir th. 1). L'estimation précédente entraîne aussitôt que la différence $E_\circ(\tau) - E_\circ(|p|)$ vérifie une inégalité du type (7). Reste à prouver que ceci est vrai aussi pour $E_\circ(|p|)$. C'est la partie un peu "dure" de la démonstration. On pose désormais $t = |p|$. Par intégrations par partie (et à l'aide de la formule de Leibniz), on commence par établir l'identité suivante, où R est un polynôme arbitraire, $f(\zeta) = \zeta^p/P(\zeta)$:

$$(8) \qquad \int_{S_t} f(\zeta)[R(-D_\zeta)\hat{u}(\zeta)]\Phi_t(\zeta)d\zeta = I_\circ + \sum_{q\neq 0} I_q ,$$

où l'on a posé :

$$I_\circ = \int_{S_t} [R(D_\zeta)f(\zeta)]\hat{u}(\zeta)\Phi_t(\zeta)d\zeta ,$$

$$I_q = \frac{1}{q!}\int_{S_t} (-D_\zeta)^{q'}\{[R^{(q)}(D_\zeta)f(\zeta)]\hat{u}(\zeta)\}d\Phi_t \wedge d\zeta_1\wedge\ldots\wedge\widehat{d\zeta_j}\wedge\ldots\wedge d\zeta_n ,$$

où $q \neq 0$ et où j, entier compris entre 1 et n, et q' sont choisis une fois pour toutes de manière à vérifier $D^q = D^{q'}D_j$ (le chapeau dans le produit extérieur signifie, comme d'habitude, que le terme couvert doit être omis). La formule (8) est à peu près évidente ; on majore séparément les quantités $I_\circ$ et I_q pour $q \neq 0$. Ces dernières sont faciles à estimer, car le support de $d\Phi_t$ se projette dans un compact de l'espace réel ; bien entendu, le diamètre de ce compact dépend de $t = |p|$. Dans l'estimation de I_q, $q \neq 0$, on applique les formules de Cauchy en intégrant sur un n-cycle qui "tourne" à une distance εt du compact $S_t \cap (\operatorname{supp} d\Phi_t)$.

Reste à estimer $|I_\circ|$; c'est ici que les calculs deviennent un peu pénibles. On prend évidemment (comme on l'aura fait pour I_q, $q \neq 0$), $R = Q^{k|p|}$. Le fait que Q (et donc aussi R) est homogène intervient ici pour la première fois (mais de façon essentielle !) et nous permet d'appliquer un lemme qui donne l'expression, pour toute fonction $C^\infty g$ et tout polynôme homogène H à n variables, de $g\,H(D)(1/g)$:

$$g\,H(D)(\frac{1}{g}) = \sum_{|\alpha|\leqq k} U_\alpha^\varkappa(\frac{g^{(2)}}{g},\ldots,\frac{g^{(\nu)}}{g},\ldots)H^{(\alpha)}(\frac{g^{(1)}}{g}),$$

où $\varkappa$ est le degré de H, $g^{(\nu)}$ est le vecteur dont les composantes sont les $g^{(p)}$ avec $|p| = \nu$, et où les $U_\alpha^\varkappa$ sont des polynômes universels, c'est-à-dire ne dépendant que de $\varkappa$, α et du nombre de variables, soit n, mais non des coefficients de H ni de g. En outre, $U_\alpha^\varkappa(X^{(2)},\ldots,X^{(\nu)},\ldots)$ jouit de diverses propriétés d'homogénéité par rapport aux $X^{(\nu)}$, nommément

$$(9) \qquad U_\alpha^\varkappa(T\,X^{(2)},\ldots,TX^{(\nu)},\ldots) = T^{|\alpha|}U_\alpha^\varkappa(X^{(2)},\ldots,X^{(\nu)},\ldots).$$

On a de plus $U_0^\varkappa = (-1)^\varkappa \varkappa!$, $U_\alpha^\varkappa = 0$ si $|\alpha| = 1$, et

(10) $$\|U_\alpha^\varkappa\| \leqq e^{\varkappa n}(\varkappa - |\alpha| + 3^n)!,$$

où la norme d'un polynôme U, $\|U\|$, en un nombre quelconque de variables ζ_j est le maximum de $|U|$ sur le cube unité $|\zeta_j| \leqq 1$ de l'espace complexe.

On applique ces renseignements à la majoration, sur S_t, de

$$|R(D_\zeta)f(\zeta)| = |Q^{k|p|}(D_\zeta)(\zeta^p/P(\zeta))|.$$

On applique la formule de Leibniz à plusieurs reprises, et finalement on se ramène à majorer la valeur absolue de quantités complexes du genre (où l'on a posé $Q_1 = Q^k$, pour simplifier) :

$$Z_r = \Sigma\, c_\sigma^s\, U_\alpha^{kd|p|-r}\left(\frac{P^{(2)}}{P},\ldots\right)Q_1^{(\sigma_1)}\left(\frac{P^{(1)}}{P}\right)\ldots Q_1^{(\sigma_{|p|})}\left(\frac{P^{(1)}}{P}\right)$$

prise sur S_t ; dans la sommation précédente, $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_{|p|})$ est un $|p|$-uple de n-uples σ_j ; $c_\sigma^s = s!/(\sigma_1!\ldots\sigma_{|p|}!)$; $\alpha = s-r$; r est de type Q (voir p.4) et $\leqslant p$ (i.e., $r_j \leqq p_j$ pour tout $j = 1,\ldots,n$) ; la sommation s'effectue par rapport à s sur l'ensemble des n-uples de type Q de longueur $\leqq kd|p|$ ($d = \deg Q$), et par rapport à σ sur l'ensemble des $(\sigma_1,\ldots,\sigma_{|p|})$ vérifiant $\sigma_1+\ldots+\sigma_{|p|} = s$. Il ne reste plus qu'à appliquer (2), (3), (9) et (10) et à compter sur ses doigts: si la longueur d'un n-uple σ_j est $< k/2$, le polynôme $Q_1^{(\sigma_j)}$ aura au moins $k/2$ facteurs Q et on pourra appliquer (2). D'autre part, le nombre $\nu(\sigma)$ de n-uples σ_j (faisant partie de σ) de longueur $< k/2$ vérifie

$$|s| \geqq \frac{k}{2}(|p| - \nu(\sigma)).$$

Compte tenu de ceci, on obtient

(11) $$|Z_r| \leqq M_1^{|p|+1}\left(\frac{t}{t+|\xi|}\right)^{\theta|p|(k-4)/4} \Sigma c_\sigma^s (kd|p|-s+3^n)!\,t^{-kd|p|+r},$$

avec la même convention de sommation que dans la définition de Z_r. On impose $|p|\theta(k-4)/4 \geqq |p|+n+1$, ce qui fixe k ; enfin, on majore la somme, dans (11), en appliquant la formule de Stirling et en n'oubliant pas, fait essentiel !, que $t = |p|$. Ceci nous donne enfin :

$$\sup_{\zeta\in S_t} \{(1+|\xi|)^{n+1}\, |\zeta^{p-r}\, Z_r|\} \leqq M_2^{|p|+1}\, p! \qquad (\xi = \operatorname{Re}\zeta),$$

et par conséquent, ce que nous voulions :

$$\sup_{\zeta\in S_t} \{(1+|\xi|)^{n+1}|R(D_\zeta)(\frac{\zeta^p}{P(\zeta)})|\} \leqq M_3^{|p|+1} p!.$$

4°. Conséquences et compléments

Le fait qu'un polynôme différentiel $P(D)$ possède une solution élémentaire E qui soit une fonction analytique en dehors d'un certain ensemble algébrique a des conséquences intéressantes sur la régularité des solutions arbitraires. On sait ce qu'est le <u>support singulier</u> d'une distribution T (noté supp sing T) : c'est le plus petit fermé en dehors duquel T est une fonction C^∞. De même, introduisons le <u>support singulier analytique</u> de T, noté supp sing an T : c'est le plus petit fermé en dehors duquel T est une fonction analytique. On pourrait introduire les supports singuliers de T par rapport aux diverses classes de fonctions C^∞, par exemple, par rapport aux classes de Gevrey. On obtient facilement le théorème suivant (cf. Schwartz [1], Ch. V, th. XII) :

THÉORÈME 2. <u>Soit une distribution</u> T <u>dans un ouvert</u> Ω ; <u>soit</u> $x^\circ \in \Omega$ <u>arbitraire. On suppose qu'il existe une solution élémentaire</u> F <u>de</u> P(-D) <u>et un ouvert relativement compact</u> Ω' <u>de</u> Ω <u>contenant</u> x°, <u>tels que les faits suivants soient vrais</u> :

(12) P(D)T <u>est</u> C^∞ (<u>resp. analytique</u>) <u>dans</u> Ω' ;

(13) <u>les ensembles</u>

$$\text{supp sing } T \ \underline{\text{et}} \ \partial\Omega' \cap (x^\circ + \text{supp sing } F)$$
$$(\text{resp. supp sing an } T \ \underline{\text{et}} \ \partial\Omega' \cap (x^\circ + \text{supp sing an } F))$$

<u>sont disjoints</u>.

<u>Alors</u> T <u>est</u> C^∞ (<u>resp. analytique</u>) <u>au voisinage de</u> x°.

Comme cas particulier, on obtient le résultat bien connu que si P(-D) (ou P(D), ça revient au même) possède une solution élémentaire qui est C^∞ (resp. analytique) dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, P(D) est hypo-elliptique (resp. hypo-elliptique analytique, i.e., elliptique). Lorsque P(D) est quelconque (non nul) et que le support singulier (resp. le support singulier analytique) de T ne rencontre pas $\partial\Omega'$, si P(D)T est C^∞ (resp. analytique) dans Ω', il en est de même de T.

Supposons que la partie principale de P(D) soit à coefficients réels et que les caractéristiques réelles de P(D) soient toutes simples. Soit Γ le cône bicaractéristique réel de P(D). Alors, si P(D)T est C^∞ (resp. analytique) dans Ω' et si T l'est au voisinage de $\partial\Omega' \cap (x^\circ + \Gamma)$, T l'est aussi au voisinage de x° : on peut dire que la régularité se propage le long du cône bicaractéristique réel de l'infini (ou presque) jusqu'au sommet de ce cône.

Soit toujours P(D) à partie principale réelle, mais ne supposons pas nécessairement que toutes les caractéristiques réelles de P(D) soient simples. Considérons un vecteur caractéristique de P(D) qui est simple, soit $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$. On a donc $P_m(\xi) = 0$ et $\operatorname{grad} P_m(\xi) \neq 0$. Alors d'après Zerner il existe une solution u de l'équation homogène P(D)u = 0 dans tout l'espace, C^m dans $\mathbb{R}^n$ mais non C^{m+1}, C^∞ en dehors de la droite d'équation $x = t \operatorname{grad} P_m(\xi)$ $(t \in \mathbb{R}^1)$, et dont le support singulier est exactement égal à cette droite. Soit E une solution élémentaire quelconque de P(D) ; je dis que l'une au moins des deux demidroites $x = t \operatorname{grad} P_m(\xi)$, $t \geqq 0$, ou bien $t \leqq 0$, appartient au support singulier de E. Posons $F = \check{E}$; si mon assertion était fausse, je pourrais construire un ellipsoïde $\partial\Omega'$ dont la frontière ne rencontre la droite bicaractéristique ci-dessus qu'en deux points au voisinage desquels F est C^∞ ; mais il résulterait alors du th. 2 appliqué avec $T = u$, que u devrait être C^∞ au voisinage de 0, ce qui est absurde.

Il n'est pas exclu que des raisonnements de ce genre permettent de construire des polynômes différentiels $P(D)$ à caractéristiques réelles simples (mais non à partie principale réelle) dont aucune solution élémentaire n'a son support singulier contenu dans un ensemble algébrique - ce qui indiquerait les limites des extensions concevables du th. 1.

Signalons enfin le fait suivant : supposons que la partie principale de $P(D)$ soit réelle et que ses caractéristiques réelles soient toutes simples ; supposons de plus que $P(D)$ ne soit pas elliptique. Alors il existe au moins une solution élémentaire E de $P(D)$ telle que $\operatorname{supp\,sing} E = \mathbb{R}^n$. Cela résulte facilement des raisonnements de Zerner [1].

BIBLIOGRAPHIE

L. GÅRDING

[1] Transformation de Fourier des distributions homogènes, Bull. S.M.F., 89 (1961), p. 381.

T. KOTAKÉ

[1] Analyticité du noyau élémentaire de l'opérateur parabolique, C.N.R.S., Colloque sur les équations aux dérivées partielles, Paris (Juin 1962) p.53.

L. HÖRMANDER

[1] Linear partial differential operators, Springer, 1963.

J. LERAY

[1] Problème de Cauchy IV, Bull. S.M.F., 90 (1962), p. 39.

S. MIZOHATA

[1] Analyticité des solutions élémentaires du système hyperbolique à coefficients constants, Memoirs Coll. of Sciences, University of Kyoto, Series A (1959), p. 213.

L. SCHWARTZ

[1] Théorie des distributions, 3e éd., Hermann, Paris (1967).

F. TREVES

[1] Linear partial differential equations with constant coefficients, Gordon and Breach, New-York (1967).

M. ZERNER

[1] Solutions de l'équation des ondes présentant des singularités sur une droite, C. R. Acad. Sci. Paris, 250 (1960), p. 2980.