Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

André Martineau

Équations différentielles d'ordre infini

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1965-1966), p. 49-112
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1965-1966___2_49_0>

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE INFINI

par

André MARTINEAU

Dans le texte qui suit je développe en premier lieu l'article "Equations différentielles d'ordre fini" [16], texte d'une conférence donnée au deuxième colloque sur l'analyse fonctionnelle tenu à Liège en 1964.

Le but de cet article était, d'une part, de montrer que la méthode de plongement que j'avais employée dans la démonstration du théorème de l'indicatrice de croissance pour une fonction entière du type exponentiel [15] se généralisait aux espaces de fonctions entières d'ordre fini, et d'autre part d'expliciter quelques résultats sur les équations de convolution. Je corrigerai en passant le "lemme de décomposition" page 42 de [16] dont l'énoncé était manifestement incorrect.

En second lieu je donnerai des démonstrations directes des théorèmes de division dont j'ai besoin.

Enfin, pour les fonctions entières de type exponentiel je compléterai les résultats obtenus par l'introduction d'une transformation de Laplace que j'appellerai transformée de Laplace projective.

1. Notations et premières définitions

Dans la suite V désignera un espace vectoriel complexe de dimension finie. On notera V^n pour préciser que V est de dimension n. Et par choix d'un système de coordonnées on entendra un isomorphisme vectoriel (complexe) entre V et $\mathbb{C}^n$: si $z \in V$, nous écrirons alors $z = (z_1,\dots,z_n)$. On notera par V' l'espace vectoriel (complexe) dual de V. On désignera par fonction entière une fonction holomorphe sur V (resp. sur V').

Soit ρ une fonction continue sur V. On notera par $B_\rho(V)$ l'espace(*) des fonctions $(z \to f(z))$ telles que $|f(z) \exp(-\rho(z))|$ tende vers zéro à l'infini muni de la norme :

(1) $$\|f\|_\rho = \sup_{z \in V} |f(z).\exp(-\rho(z))| \quad ;$$

B_ρ est un espace de Banach. L'espace B_ρ peut être réduit à zéro ; en outre se pose le problème de savoir dans quelle mesure B_ρ dépend de ρ. Je reviendrai ailleurs sur ces questions.

Dans tout ce qui suit ρ va être très particulier.

a) Fonctions entières de type exponentiel

On se donne une norme réelle sur V c'est-à-dire une fonction ρ telle que $\rho(z) \geqslant 0$, $\rho(z) = 0 \Rightarrow z = 0$, $\rho(u_1 + u_2) \leqslant \rho(u_1) + \rho(u_2)$; $\rho(\lambda u) = \lambda\rho(u)$ pour tout $\lambda \geq 0$. On désigne par E^1 la réunion

(2) $$\bigcup_{A>0} B_{A\rho} = E^1 .$$

Un élément de E^1 sera dit fonction entière de type exponentiel.

(*) Dans la suite nous noterons B_ρ à la place de $B_\rho(V)$, etc..., quand aucune confusion ne sera possible.

Il revient au même de dire qu'une fonction entière est de type exponentiel s'il existe A et K tels que :

(3) $$|f(z)| \leqslant K.\exp (A.\rho(z))$$

où ρ est une norme réelle.

Il est clair que E^1 ne dépend pas du choix de ρ. De même l'espace :

(4) $$\bigcap_{A>0} B_{A\rho} = E_o^1$$

ne dépend pas du choix de la norme.

Un élément de cet espace sera dit fonction entière de type exponentiel zéro.

On est de même amené à introduire les espaces

(5) $$\bigcup_{A<R} B_{A\rho} = E^1_{R,\rho}$$

espace des fonctions entières de type exponentiel et de ρ-type inférieure à A et :

(6) $$\bigcap_{A>R} B_{A\rho} = E^1_{o,R,\rho}$$

l'espace des fonctions entières de type exponentiel et de ρ-type égal à A. Ces espaces dépendent de ρ. On est amené aux conventions naturelles $E^1_{o,o,\rho} = E^1_o$, $E^1_{\infty,\rho} = E^1$ ce qui nous permettra dans la suite de faire prendre à R les valeurs 0 et ∞ respectivement dans $E^1_{o,R,\rho}$ et dans $E^1_{R,\rho}$.

b) Fonctions entières d'ordre fini

Nous remplaçons la fonction $A\rho$ par $(A\rho)^k$ où $k \geqslant 1$ et nous noterons par E^k l'espace des fonctions entières d'ordre k et de type moyen, soit :

(7) $$E^k = \bigcup_{A>0} B_{(A\rho)^k}$$

et par E_0^k son sous-espace des fonctions de type zéro soit :

(8) $$E_0^k = \bigcap_{A>0} B_{(A\rho)^k} .$$

Ces deux espaces ne dépendent pas du choix de ρ . Nous désignerons par $E_{R,\rho}^k$ l'espace des fonctions entières d'ordre k et de ρ-type inférieur à R soit :

(9) $$E_{R,\rho}^k = \bigcup_{A<R} B_{(A\rho)^k}$$

puis par $E_{o,R,\rho}^k$ l'espace des fonctions d'ordre k et de ρ-type égal à R soit :

(10) $$E_{o,R,\rho}^k = \bigcap_{A>R} B_{(A\rho)^k} .$$

On a donc : $E_{o,o,\rho}^k = E_o^k$ et $E_{\infty,\rho}^k = E^k$.

c) <u>Fonctions d'ordre infini</u>

Nous poserons, et ceci sera justifié dans l'avenir, E^∞ pour l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de V , E_o^∞ pour l'espace des fonctions entières, $E_{o,R,\rho}^\infty$ pour l'espace des fonctions holomorphes dans l'ouvert $\rho(z) < R^{-1}$, $E_{R,\rho}^\infty$ pour l'espace des fonctions holomorphes au voisinage du compact $\rho(z) \leqslant R^{-1}$.

2. Nature vectorielle topologique des espaces de fonctions entières

LEMME 1. *Si* $A < A'$ *l'application identique de* $B_{(A\rho)^k}$ *dans* $B_{(A'\rho)^k}$ *est compacte.*

Démonstration. Supposons d'abord $k \neq \infty$. La boule unité β de $B_{(A\rho)^k}$ est compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de V d'après un théorème de M. Paul Montel. Si f_n est une suite d'éléments de cette boule on peut donc en extraire une sous-suite $f_{n'}$, convergeant vers f_o où $f_o \in \beta$ uniformément sur tout compact. Mais $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe R_o tel que $\rho(z) > R_o$ entraîne :

$$\exp\left((A\rho(z))^k - (A'\rho(z))^k\right) < \varepsilon/2 \tag{11}$$

et R_o étant fixé il existe n_o tel que $n'>n_o$ entraîne

$$|f_{n'}(z) - f_{n_o}(z)| < \varepsilon$$

pour tout z tel que $\rho(z) \leqslant R_o$. Donc

$$|f_{n'}(z) - f_{n_o}(z)| \leqslant \sup\Big(\sup_{|z| \leqslant R_o} |f_{n'}(z) - f_{n_o}(z)| + \ldots$$

$$\ldots + \sup_{|z|>R_o} \left(|f_{n'}(z) - f_{n_o}(z)| . e^{-(A\rho(z))^k} . e^{(A\rho(z))^k - (A'\rho(z))^k}\right) \leqslant \varepsilon .$$

Donc les $f_{n'}$ convergent dans $B_{(A'\rho)^n}$ vers f_o. Le lemme est démontré pour $k \neq \infty$. Pour $k = \infty$ il se réduit à la propriété déjà rappelée de Montel. c.q.f.d.

On peut munir l'espace $E^k_{R,o}$ de la topologie de la limite inductive des $B_{(A\rho)^k}$ où $A < R$. De même, $E^k_{o,R,\rho}$ sera muni de la topologie de la limite projective des $B_{(A\rho)^k}$. Si $k \neq \infty$ il est immédiat de constater que ces topologies sont plus fines que celle de la convergence uniforme sur tout compact, donc que la topologie de la convergence simple.

D'après le théorème du graphe fermé de Köthe-Grothendieck [8] il en résulte que les topologies introduites sont les seules topologies d'espaces $\mathcal{L} - \mathcal{F}$ plus fines que la topologie de la convergence simple dont peuvent être munis ces espaces. Pour $k = \infty$ et les espaces $E^{\infty}_{R,\rho}$ (resp. $E^{\infty}_{o,R,\rho}$) on considère la topologie de la convergence simple des coefficients des séries de Taylor des éléments de $E^{\infty}_{R,\rho}$ (resp. $E^{\infty}_{o,R,\rho}$) en tout point de l'ensemble $\rho(z) \leqslant R^{-1}$ (resp. $\rho(z) < R^{-1}$), topologie moins fine et séparée qui rend naturelles, vu le théorème du graphe fermé, les topologies introduites (on aurait pu faire de même dans les autres cas).

Dorénavant ce sont ces topologies que nous considérerons.

PROPOSITION 1. <u>Les espaces</u> E^k, $E^k_{R,\rho}$ <u>sont des duals de Fréchet-Schwartz, les espaces</u> E^k_o , $E^k_{o,R,\rho}$ <u>sont des Fréchet-Schwartz.</u>

<u>Démonstration</u>. La terminologie adoptée est celle de l'article de Grothendieck [7]. Je renvoie à cet article pour la théorie de ces espaces. La propriété découle du lemme, cf. [7].

<u>Remarque</u>. Il est aisé de renforcer le lemme et de montrer que l'application de $B'_{(A\rho)k}$ dans $B_{(A'\rho)k}$ est nucléaire. Donc nos espaces sont même des espaces nucléaires [8] ce qui d'ailleurs ne m'est d'aucune utilité dans la suite.

3. <u>Représentation des éléments du dual d'un espace de fonctions entières.</u>

Soit $k \neq \infty$. Désignons par $C^k_{A,\rho}$ l'espace des fonctions g continues sur V et telles que $|g(z).\exp(-A\rho(z))^k|$ tende vers zéro à l'infini muni de la norme

$$g \to \sup_{z\in V} |(g.e^{-(A\rho)^k})(z)| \ .$$

C'est un espace de Banach. Alors nous désignerons par $F^k_{o,R,\rho}$ l'espace :

(12) $$\bigcap_{A>R} C^k_{A,\rho}$$

muni de la topologie de la limite projective des $C^k_{A,\rho}$. C'est un espace de Fréchet dont je vais déterminer le dual. Le dual de l'espace $C^k_{A,\rho}$ est formé des mesures μ sur V telles que $\mu e^{(A\rho(z))^k}$ soit une mesure bornée. En effet si C_o est l'espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini, dont le dual est justement l'espace des mesures bornées, l'application $C_o \to C_{B,\rho}$ définie par $g \to g\, e^{(A\rho)^k}$ est un isomorphisme métrique dont le transposé envoie $C'_{B,\rho}$ sur le dual de C_o. Les fonctions continues à support compact sont denses dans $C_{B,\rho}$ comme on le voit par une troncature, donc le dual $C'_{B,\rho}$ de cet espace est un ensemble de mesures et l'application transposée est $\mu \to \mu.e^{(A\rho)^k}$. Ceci démontre l'assertion.

Il vient alors le

LEMME 2. <u>Soit</u> $k \neq \infty$. <u>Le dual de</u> $F^k_{o,R,\rho}$ <u>est constitué des mesures</u> μ <u>qui satisfont à la propriété : il existe</u> $A > R$ <u>tel que</u> $\mu.e^{(A\rho)^k}$ <u>soit une mesure bornée</u>.

<u>Démonstration</u>. Il suffit d'appliquer, vu ce que nous venons de démontrer, et notant que le dual de $F^k_{o,R,\rho}$ est un espace de mesures, le corollaire 2 de la proposition 10 § 2 chap. IV de Bourbaki [3].

L'espace $E^k_{o,R,o}$ apparaît comme un sous-espace fermé de $F^k_{o,R,\rho}$ car il est déjà fermé dans ce dernier pour la topologie moins fine de la convergence uniforme sur tout compact. Donc une application du théorème de Hahn-

Banach nous donne la

PROPOSITION 2. Soit $k \neq \infty$. Tout élément T du dual de $E^k_{o,R,\rho}$ peut être représenté par une mesure μ telle que $|\mu|.\exp(B\rho)^k$ soit bornée pour un $B > R$ au moins, c'est-à-dire que pour toute $f \in E^k_{o,R,\rho}$ on a :

$$T(f) = \int f(z)\, d\,\mu(z)$$

et réciproquement.

Pour $k = \infty$ tout élément T du dual de $E^\infty_{o,R,\rho}$ peut être représenté par une mesure μ à support compact dans l'ouvert $\rho(z) < R^{-1}$.

Pour la représentation du dual $E^k_{R,\rho}$ on a la

PROPOSITION 3. Tout élément T du dual de $E^k_{R,\rho}$ $(k \neq \infty)$ peut être représenté par une mesure μ telle que $|\mu| \exp(B\rho)^k$ soit bornée pour tout $B < R$.

Démonstration. La restriction de T à $B_{(A\rho)^k}$ où $A < R$ est continue donc provient d'une forme linéaire continue μ_A sur $C_{(A\rho)^k}$. Convenons d'appeler mesure de Cauchy une mesure de la forme

$$(13) \qquad g \to \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\nu(z_o)} g(z)\, d\, z \qquad (dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n)$$

où $\nu(z_o)$ est la frontière distinguée d'un polycylindre de centre z_o.

On a le

LEMME 3 (Morera). Soit $k \neq \infty$. Les mesures de Cauchy forment un ensemble total dans le sous-espace $(B_{(A\rho)^k})^o$ (orthogonal de $B_{(A\rho)^k}$) de $C'_{(A\rho)^k}$.

Démonstration. Pour cela il suffit de voir que si $\mu(f) = 0$ pour toute mesure de Cauchy μ alors f est holomorphe ce qui est précisément le théorème de Morera. C.q.f.d.

Nous appliquons maintenant le procédé de Mittag-Leffler. Si $A_1,\dots,A_n,\dots$ est une suite strictement croissante de nombres réels telle que $\lim_n A_n = R$ et si on note par $\| \ \|_n$ la norme dans $C\{_{(A_n\rho)}k$ on remarque que $\| \ \|_{n+1} \geqslant \| \ \|_n$ dans $C\{_{(A_n\rho)}k$. Ayant trouvé μ_1 qui représente T sur $B_{(A_1\rho)}k$ puis μ_2' sur $B_{(A_2\rho)}k$, la mesure $(\mu_2' - \mu_1)$ est orthogonale à $B_{(A_1\rho)}k$ donc on peut lui ajouter une combinaison linéaire finie de mesures de Cauchy ν_2 telle que :

(14) $$\|\mu_2' - \mu_1 - \nu_2\|_1 < \tfrac{1}{2} \quad .$$

On posera $\mu_2 = \mu_2' - \nu_2$; $\mu_1,\dots,\mu_{n-1}$ ayant été choisies en sorte que :

(15) $$\|\mu_{n-1} - \mu_{n-2}\|_{n-2} < \frac{1}{2^{n-2}}$$

on pourra trouver μ_n' telle que μ_n' représente T dans $B_{(A_n\rho)}k$. Donc on peut trouver ν_n combinaison linéaire finie de mesures de Cauchy telle que :

(16) $$\|\mu_n' - \nu_n - \mu_{n-1}\|_{n-1} < \frac{1}{2^{n-1}}\ , \text{ etc...}$$

Alors $\lim_{n\to\infty} \mu_n$ existe dans chaque espace $C\{_{(A_n\rho)}k$. Si μ est la mesure limite elle répond à la question. C.q.f.d.

Je ne vois pas la possibilité d'une telle propriété pour $k = \infty$.

4. La série de Taylor

Soit $f\in E^k_{o,R,\rho}$ (resp. $f\in E^k_{R,\rho}$) et considérons sa série de Taylor à l'origine

(17) $$\mathcal{C}(f) = \sum_\alpha a_\alpha . z^\alpha \quad \text{(considérée en tant que série formelle).}$$

Posons :

(18) $$P_n(f;z) = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha . z^\alpha$$

$$(\text{On a } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$$

alors on a la

PROPOSITION 4. Supposons que $\rho(\lambda.z) = |\lambda|.\rho(z)$ pour tout λ complexe. La série de terme général $P_n(f;z)$, si $f \in E^k_{o,R,\rho}$, converge vers f dans cet espace. On a plus précisément; si $f \in B_{(A\rho)k}$ sa série converge absolument dans tout $B_{(A'\rho)k}$ où $A' > A$, ce qui entraîne que si $f \in E^k_{R,\rho}$ la série $\sum_n P_n(f;z)$ converge vers f dans cet espace.

Variante. $V = \mathbb{C}^n$. Une norme ρ est dite Reinhardt si

$$\rho(e^{i\vartheta_1}.u_1, \ldots, e^{i\vartheta_n}.u_n) = \rho(u_1, \ldots, u_n).$$

Si ρ est de Reinhardt la série de Taylor de $f \in E^k_{o,R,\rho}$ converge dans cet espace vers f (resp. la série de Taylor de $f \in E^k_{\rho,R}$ converge dans cet espace vers f).

Cette proposition admet le corollaire

COROLLAIRE. Les polynômes sont denses dans E^k, (resp. E^k_o) .

Démonstration. Prendre pour ρ une norme complexe et appliquer la proposition.

Remarquons que cette propriété a lieu en général dans tous nos espaces sous les seules hypothèses du début pour ρ, mais je ne le démontrerai pas ici.

Démonstration de la proposition. On considère la fonction

(19) $$g(z;\zeta) = f(\zeta.z) \quad .$$

Il vient la formule :

(20) $$P_n(f;z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} g(z;\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} \quad .$$

Supposons que $f \in B_{(A\rho)^k}$ c'est-à-dire en particulier que

(21) $$\sup_{z \in V} |f(z).\exp - (A\rho(z))^k| \leq M < +\infty \quad .$$

Ceci nous donne :

(22) $$|g(z;\zeta)| \leq M(A) \exp (A\rho(z))^k$$

et posant $R = \rho(z)$ il vient :

(23) $$\sup_{\rho(z)=R} |P_n(f;z)| \leq M(A).\exp (A\ R)^k$$

parce que $\rho(e^{i\Theta}z) = \rho(z)$, d'où :

(24) $$\sup_{z} \sup_{\rho(z)=R} \left|\frac{P_n(f;z)}{(\rho(z))^n}\right| \leq M(A) \frac{\exp(A\ R)^k}{R^n} \quad .$$

LEMME 4. <u>Le minimum de la fonction</u> $R \rightarrow \frac{\exp(A\ R)^k}{R^n}$ <u>est atteint pour</u> $R = (\frac{n}{k})^{1/k}.\frac{1}{A}$. <u>Il vaut</u> :

$$(\frac{e\ k\ A^k}{n})^{1/k} \quad .$$

Ce type de raisonnement est classique:[13] chap. II § 5.

Posons :

(25) $$u_n = \sup_{z} \frac{|P_n(f;z)|}{(\rho(z))^n}$$

et soit

(26) $$\Theta = \overline{\lim}((\frac{n}{e\ k})^{1/k}.u_n^{1/n})$$

LEMME 5. $f \in E^k_{o,A,\rho}$ équivaut à $\Theta = A$.

Démonstration. $f \in B_{(A'\rho)^k}$ pour tout $A' > A$ d'où par le lemme précédent

$$\Theta \leqslant A' \quad \text{pour tout} \quad A' > A ,$$

car on a :

(27) $$\left(\frac{n}{e.k}\right)^{1/k}.u_n^{1/n} \leqslant M(A')^{1/n}.A' \quad .$$

Dans l'autre sens, supposons que $\Theta \leqslant A$. Alors à partir d'un certain rang, A' étant donné supérieur à Θ et si $\Theta < A'' < A'$ on a :

(28) $$u_n^{1/n} \leqslant \left(\frac{e.k}{n}\right)^{1/k}.A''$$

d'où

(29) $$|u_n| \leqslant \left(\left(\frac{e.k}{n}\right)^{n/k}.(A'')^n = \left(\frac{e.k(A'')^k}{n}\right)^{n/k}\right).$$

Calculons la norme

(30) $$\sup_n |P_n(f;z).\exp - (A'\rho(z))^n| = \lambda_n \quad .$$

On a :

$$\lambda_n \leqslant \left(\frac{e.k(A'')^k}{n}\right)^{n/k}.R^n.\exp - (A'R)^k$$

et utilisant le lemme 4

(31) $$R^n.\exp - (A'R)^k \leqslant \left(\frac{n}{e.k(A')^k}\right)^{k/n}$$

d'où

(32) $$\lambda_n \leqslant \left(\frac{A''}{A'}\right)^n$$ pour n assez grand, ce qui montre que la série converge.

Elle converge donc vers une fonction $f(z)$ telle que

$$\sup |f(z).\exp - (A'\rho)^k(z)| < + \infty$$

et $A' > A$ étant arbitraire $f.\exp - (A'\rho)^k$ tend vers zéro à l'infini.

<u>Démonstration de la variante</u>. On suppose donc que $V = \mathbb{C}^n$ et que ρ est une norme de Reinhardt. On pose

(33) $$v_\alpha = \sup_{\rho(z)=1} |z|^\alpha$$

puis

(34) $$\tau = \overline{\lim_{\alpha}} \left(\left(\frac{|\alpha|}{e.k}\right)^{1/\alpha} . v_\alpha^{1/|\alpha|} . |a_\alpha|^{1/|\alpha|} \right) .$$

Alors $f \in E^k_{o,A,\rho}$ équivaut à $\tau = A$.

En effet, on a :

(35) $$u_n \leqslant \Phi(n) . \sup_{|\alpha|=n} v_\alpha . |a_\alpha|$$

où $\Phi(n)$ est le cardinal de l'ensemble des α tels que $|\alpha| = n$; $\Phi(n)$ est un polynôme de la variable n.

Donc,

(36) $$\left(\frac{n}{e.k}\right)^{1/k} u_n^{1/k} \leqslant \left(\frac{n}{e.k}\right)^{1/k} . \Phi(n)^{1/n} \sup_{|\alpha|=1} v_\alpha^{1/n} . |a_\alpha|^{1/n}$$

d'où

$$\Theta \leqslant \tau .$$

Dans l'autre sens, appliquons la formule de Cauchy à $P_n(z) = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha z^\alpha$. Il vient :

(37) $$a_\alpha = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \underset{\substack{|z_1|=A_1 \ \ldots \ |z_n|=A_n \\ \rho(A_1, \ldots, A_n) = 1}}{\int \cdots\cdots\cdots \int} \frac{P_n(z)}{z^{\alpha+1}} dz$$

d'où :

(38) $$|a_\alpha| \leqslant \frac{u_n}{v_\alpha} \qquad \text{soit} \qquad |a_\alpha v_\alpha| \leqslant u_n$$

d'où $\tau = \Theta$ ce qui montre l'égalité de τ et de Θ dans le cas d'une norme de Reinhardt.

Enfin, cette même inégalité montre que la norme de $a_\alpha . z^\alpha$ dans un espace $B_{\rho,R}$ où ρ est de Reinhardt est inférieure à celle de $P_{|\alpha|}(f;z)$ donc est majorée par une série de puissances convergente. Le nombre des α tels que $|\alpha| = n$ étant un polynôme de n cette série est sommable, donc sa somme est égale à

$$\sum_n \Big(\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha . z^\alpha \Big) = f \qquad \text{c.q.f.d.}$$

<u>Majoration des coefficients.</u> <u>On a les majorations</u>

(39) <u>Si</u> $f \in B_{A,\rho}$ <u>on a</u> : $|u_n| \leqslant \|f\|_{A,\rho} \left(\frac{e.k.A^k}{n}\right)^{n/k}$

<u>Si</u> ρ <u>est en outre une norme de Reinhardt</u>

(40) $$|a_\alpha| \leqslant \|f\|_{A,\rho} . \left(\frac{e.k.A^k}{|\alpha|}\right)^{|\alpha|/k} . \frac{1}{v_\alpha} .$$

5. Application diagonale et convolution

Considérons l'application définie pour toutes les fonctions de V à valeurs dans l'espace des fonctions définies sur $V \times V$ et que je noterai Δ

(41) $$\Delta : (z \to f(z)) \longrightarrow ((u,v) \to f(u+v)) .$$

L'application Δ peut aussi être définie par la formule (41) pour les germes de fonctions définies au voisinage de l'origine de V et de $V \times V$.

PROPOSITION 5. <u>L'application</u> Δ <u>applique</u> $E^k(V)$ <u>dans</u> $E^k(V \times V)$ <u>qu'on peut identifier à</u> $E^k(V) \hat{\otimes}_\varepsilon E^k(V)$.

<u>Démonstration.</u> Le cas de $k = \infty$ est bien connu, cf. par exemple [17] p.88.

Dans la suite nous supposons $k \neq \infty$.

1) Si ρ est une norme sur V nous considèrerons sur $V \times V$ la norme $\sigma(u,v) = \rho(u) + \rho(v)$.

(42) $$|f(u + v) \leqslant M.\exp\,(A\rho(u + v))^k$$
$$\leqslant M.\exp\,(A(\rho(u) + \rho(v)))^k$$
$$\leqslant M.\exp\,(A\sigma(u,v))^k \;.$$

La définition de E^k ne dépendant pas de la norme choisie, la première assertion est démontrée.

2) Le produit tensoriel ε est stable par passage à un sous-espace [8], [20], [21]. On sait que $C_o(V \times V) \simeq C_o(V) \hat{\otimes}_\varepsilon C_o(V)$ [20] exposé. L'espace $C^k_{A,\rho}(V)$ s'envoyant isométriquement sur $C_o(V)$ par l'application $f \to f.e^{-(A\rho)^k}$, en appliquant le résultat précédent on trouve

(43) $$C^k_{A,\rho}(V) \hat{\otimes}_\varepsilon C^k_{B,\rho}(V) \simeq C^k_{\sigma_{A,B}}(V \times V)$$

où

(44) $$(\sigma_{A,B}(u,v))^k = (A\rho(u))^k + (B\rho(v))^k \;.$$

Donc, $B^k_{A,\rho}$ étant fermé dans $C^k_{A,\rho}$ quel que soit A,ρ , on en déduit :

$$B^k_{A,\rho}(V) \hat{\otimes}_\varepsilon B^k_{B,\rho}(V) \simeq B^k_{\sigma_{A,B}}(V \times V) \;.$$

En passant à la limite inductive, ce qui est possible, notre espace étant complet [8], on obtient le résultat. C.q.f.d.

L'identification de $E^k(V \times V)$ avec $E^k(V) \hat{\otimes}_\varepsilon E^k(V)$ combinée à Δ nous permet de définir la convolution ; Δ devient une application linéaire continue de $E^k(V)$ dans $E^k(V) \hat{\otimes}_\varepsilon E^k(V)$.

L'application transposée ${}^t\Delta$ envoie les applications bilinéaires intégrales sur $E^k(V)$ dans $E^k(V)$ en particulier les tenseurs élémentaires $T \otimes U$ dans $E^k(V)$. Par définition on posera :

(45) $$T * U = {}^t\Delta(T \otimes U)$$

soit :

(46) $$(T * U)(f) = (T \otimes U)(\Delta f).$$

L'espace $(E^k(V))'$ apparaît comme une algèbre commutative et unitaire. En outre comme $E^k(V) \subset E^h(V)$ si $k \leqslant h$, l'inclusion étant dense, et comme Δ définie sur $E^k(V)$ est la restriction à cet ensemble de Δ définie sur $E^h(V)$, $(E^h(V))'$ est une sous-algèbre de $(E^k(V))'$. Notons de même que $(C^k(V))'$ est une algèbre et que la représentation est un homomorphisme d'algèbre, toujours parce que Δ est le même.

De façon analogue, on vérifiera :

l'application Δ envoie $E_o^k(V)$ dans $E_o^k(V \times V)$ qu'on peut identifier à $E_o^k(V) \hat{\otimes}_\varepsilon E_o^k(V)$. On en déduit que si

$$T \in (E_o^k(V))' \ , \quad U \in (E_o^k(V))'$$

et si on pose :

(47) $$T * U = {}^t\Delta(T \otimes U)$$

$(E_o^k(V))'$ devient une algèbre commutative et unitaire ;

$(E^k(V))'$ est sous-algèbre de $(E_o^k(V))'$.

6. L'isomorphisme de Fourier-Borel

L'espace E^1 ou, si $k > 1$, les espaces $E^k_{R,\rho}$ et $E^k_{o,R,\rho}$ pour tout $R \geqslant 0$ contiennent les fonctions exponentielles $(z \to \exp < z,u >)$ où u

parcourt le dual V' de V, $< z,u >$ désignant la valeur de u sur z. L'espace $E^1_{R,\rho}$ ne contient, lui, que les exponentielles u telles que :

(48) $$\sup_{\substack{z \\ \rho(z)<1}} (\operatorname{Re} < z,u >) < R$$

donc l'ensemble $\rho'(u) < R$ où ρ' désigne la norme duale de ρ. Nous dirons que nous sommes dans le cas (2). La situation précédente sera le cas (1).

De toute façon pour toute $T \in (E^k_{R,\rho})'$ on peut définir $T_z(\exp < z,u >)$ quand $(z \to \exp < z,u >)$ appartient à l'espace, et si μ_T est une mesure représentant T et satisfaisant aux conclusions de la proposition 3 on aura :

$$T_z(\exp < z,u >) = \int d\,\mu_T . \exp < z,u > = \mathcal{F}T(u) .$$

Dans le cas (1) la fonction $u \to \mathcal{F}T(u)$ est une fonction holomorphe entière de u. Dans le cas (2) elle est holomorphe définie dans l'ouvert $\rho'(u) < 1$. Posons $R' = 1/R$, et si $R = 0$ $R' = \infty$, $R = \infty$ $R' = 0$. Soit k' le complément de k c'est-à-dire si $k \neq 1$ k' défini par $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$ et si $k = 1$ $k' = \infty$ si $k = \infty$ $k' = 1$.

On a le

THÉORÈME 1. ρ <u>étant une norme complexe, la transformation de Fourier-Borel établit un isomorphisme entre</u> $(E^k_{R,\rho}(V))'$ <u>et</u> $E^{k'}_{o,(\lambda(k).R)'\rho'}(V')$ <u>où</u> $\lambda(k) = \frac{1}{(k-1)^{(k-1)/k}}$.

<u>Pour</u> $k = 1$ <u>il est inutile de supposer que</u> ρ <u>est une norme complexe</u> (c'est le théorème de l'indicatrice de Pólya).

La démonstration du théorème de l'indicatrice de Pólya sera donnée par une méthode nouvelle plus loin. Pour d'autres démonstrations cf. [15], [9].

C'est aussi une conséquence du "Fundamental principle" de M. Ehrenpreis [5]. Donc jusqu'à nouvel ordre je suppose que ρ est une norme complexe.

On a le

LEMME 6. L'application $T \to \mathcal{F}T$ (dite transformation de Fourier-Borel) est injective de $(E^k_{R,\rho}(V))'$ dans $E^{k'}_{o,(\lambda(k).R)',\rho'}(V')$ (resp. de $(E^k_{o,R,\rho}(V))'$ dans $E^{k'}_{(\lambda(k).R)',\rho'}(V')$).

Démonstration. Les polynômes sont denses dans $E^k_{R,\rho}$, donc il en est de même des combinaisons linéaires des fonctions exponentielles telles que $\rho'(u) < R$ (dériver en u et faire $u = 0$!). Ceci assure la biunivocité de la correspondance.

Pour le cas de $E^k_{o,R,\rho}(V)$ on note que

$$E^k_{o,R,\rho}(V) = \bigcap_{A>R} (E^k_{A,\rho}(V))$$

et on définit la transformation de Fourier-Borel de

$$(E^k_{o,R,\rho}(V))' = \bigcup_{A>R} (E^k_{A,\rho}(V))'$$

par la définition précédente. Elle est donc injective de $(E^k_{o,R,\rho}(V))'$ dans

$$\bigcup_{A>R} (E^{k'}_{o,(\lambda(k).A)',\rho'}(V')) = E^{k'}_{(\lambda(k).A)',\rho'}(V')$$

si l'assertion a été démontrée dans le premier cas que je vais considérer maintenant jusqu'à la fin.

Soit μ représentant T. D'après la proposition 2, si $k \neq \infty$ dans le premier cas il est possible de choisir pour tout $B < R$ μ en sorte que $|\mu| \exp (B\rho)^k$ soit bornée. Considérons l'intégrale

(49) $$\int_V \exp < z,u > .d\mu(z) = \mathcal{F}T(u) .$$

Toute dérivée partielle en u donne une intégrale absolument convergente, donc $\mathcal{F}T$ est holomorphe.

On peut écrire :

(50) $$\mathcal{F}T(u) = \int_V \exp(< z,u > - (B\rho(z))^k).\exp (B\rho(z))^k.d\mu(z) .$$

La mesure $\nu = \mu.\exp (B\rho)^k$ est de masse bornée K et il faut évaluer :

(51) $$\max_z \mathrm{Re}(< z,u > - (B\rho(z))^k) = J(u)$$

si

$$\rho(z) = R, \max_{z,\rho(z)=R} \mathrm{Re} < z,u > = R.\rho'(u)$$

où ρ' est la norme duale, d'où :

(52) $$J(u) = \max_R (R\rho'(u) - (B.R)^k) = (\frac{\rho'(u)}{B})^{k/k-1} . \frac{k-1}{k^{k/k-1}}$$

si $k \neq 1, \infty$.

On peut écrire :

$$J(u) = (\rho'(u)B^{-1} \frac{(k-1)^{k-1/k}}{k})^{k/k-1}$$

donc :

(53) $$|\mathcal{F}T(u)| \leqslant K \exp (\rho'(u).B^{-1} \frac{(k-1)^{k-1/k}}{k})^{k/k-1} .$$

La constante B étant arbitraire inférieure à R.

Si nous posons :

(54) $$\lambda(k) = \frac{k}{(k-1)^{k-1/k}}$$

on a bien

$$\mathcal{F}T \in E^{k'}_{o,(\lambda(k).R)',\rho'}(V') .$$

Lorsque $k = 1$ l'intégrale converge quand $\rho'(u) < B$ donc $\mathcal{F}T$ est holomorphe pour $\rho'(u) < \frac{1}{R}$, c'est-à-dire avec les conventions précédentes, appartient à $E^{\infty}_{o,R',\rho'}(V')$. Notons que

$$\lim_{k \to 1} \frac{(k-1)^{k-1/k}}{k} = 1$$

ce qui montre que la formule est ainsi prolongée de façon naturelle pour $k = 1$.

Si $k = \infty$, pour tout $B < R$ il existe une mesure μ à support compact dans l'ouvert $\rho(z) < B^{-1}$ telles que $\mathcal{F}T(u) = \int \exp < z,u > d\mu(z)$ d'où :

$$|\mathcal{F}T(u)| \leqslant \|\mu\| \exp \left(\sup_{\rho(z) \leqslant B^{-1}} \operatorname{Re} < z,u > \right)$$

soit :

$$(55) \qquad |\mathcal{F}T(u)| \leqslant \|\mu\| . \exp (B^{-1} . \rho'(u)).$$

La formule se prolonge à nouveau de façon naturelle. Remarquons que $\lambda(k)$ atteint son maximum pour $k = 2$ et vaut alors 2. Le lemme est démontré.

LEMME 7. <u>Si</u> W <u>est un espace vectoriel quotient de</u> V <u>par une application linéaire continue</u> u, <u>et si</u> σ <u>est la norme quotient de</u> ρ, $E^k_{R,\sigma}(W)$ (<u>resp.</u> $E^k_{o,R,\sigma}(W)$) <u>s'identifie à un sous-espace fermé de</u> $E^k_{R,\rho}(V)$ (<u>resp.</u> $E^k_{o,R,\rho}(V)$) <u>par l'application</u> $f \to f\circ u$ <u>à savoir le sous-espace des fonctions constantes sur les fibres de</u> u.

<u>Démonstration</u>. Le sous-espace des fonctions constantes sur les fibres de u est fermé dans $E^k_{R,\sigma}(V)$ (resp. $E^k_{o,R,\sigma}(V)$) car il est déjà fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de V dans la situation $k \neq \infty$, où, dans le dernier cas, pour les topologies décrites juste avant la proposition 1.

Considérons d'abord $k \neq \infty$. Soit f constante sur les fibres de u et telle que $|f(z)| \leqslant K \exp (B\rho(z))^k$. Alors si $g(t)$ est la fonction définie sur W par $g(t) = f(z)$ où $u(z) = t$, on a :

(56) $$|g(t)| \leqslant K.\exp (B(\inf_{u(z)=t} \rho(z)))^k \leqslant K.\exp (B\sigma(t))^k .$$

Dans l'autre sens, si $f = g \circ u$ et si $|g(t)| \leqslant L.\exp (C\sigma(t))$ on a :

(57) $$|f(z)| = |g(t)| \leqslant L.\exp (C\sigma(t))^k \leqslant K.\exp (C\rho(z))^k$$

puisque $\rho(z) \geqslant \sigma(t)$. Il est clair que le lemme 7 résulte de ces inégalités.

Ensuite si $k = \infty$ cela résulte de ce que si f est constante sur les fibres de u et si f est holomorphe pour $\rho(z) < R^{-1}$ alors g est holomorphe pour $\sigma(t) < R^{-1}$.

LEMME 8. Le théorème 1 est vrai pour $V = \mathbb{C}^n$, $\|z\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$, $\|z\|_\infty = \sup_j |z_j|$.

Démonstration. Rappelons que lorsqu'on pose $V = \mathbb{C}^n$ on identifie V' à $\mathbb{C}^n$ la forme bilinéaire de dualité $< z,u >$ devenant $\sum_j z_j.u_j$. Dans ces conditions la norme duale de $\| \|_1$ est la norme $\| \|_\infty$.

Il suffit de démontrer le théorème avec les espaces $E^k_{R,\rho}$ et $\rho = \| \|_1$ ou $\rho = \| \|_\infty$.

Soit $z \to \exp < z,u >$ une exponentielle de l'espace $E^k_{R,\rho}$. La série $\sum_\alpha \frac{z^\alpha u^\alpha}{\alpha!}$ est sommable dans cet espace fonctionnel donc

$$T(\exp < z,u >) = \sum_\alpha T(z^\alpha) \frac{u^\alpha}{\alpha!} .$$

Nous posons $c_\alpha = T(z^\alpha)$. La série de Taylor de $\mathcal{F}T$ est donc :

(58) $$\sum_\alpha c_\alpha \frac{u^\alpha}{\alpha!} = \sum_\alpha b_\alpha.u^\alpha .$$

Soit $f \in E^k_{R,\rho}$ de série de Taylor $\sum_\alpha a_\alpha . z^\alpha$ absolument sommable, donc sommable, dans l'espace fonctionnel vers f d'après la proposition 5. En conséquence :

(59) $$T(f) = \sum_\alpha T(a_\alpha . z^\alpha) = \sum_\alpha \alpha! \; a_\alpha . b_\alpha$$

la famille des nombres $\alpha \to \alpha! \; a_\alpha . b_\alpha$ étant sommable. Réciproquement si b_α est une suite de nombres tels que pour toute $f \in E^k_{R,\rho}$, $f = \sum_\alpha a_\alpha . z^\alpha$ la famille des nombres $(a! \; a_\alpha . b_\alpha)$ est sommable, il est clair que $f \to \sum_\alpha \alpha! \; a_\alpha . b_\alpha$ définit une forme linéaire sur $E^k_{R,\rho}$. La continuité résultera des inégalités qui vont suivre. La transformée de Fourier-Borel de cette forme linéaire continue est donc par (59) et (58) la fonction de série de Taylor à l'origine $\sum_\alpha b_\alpha . u^\alpha$.

Majorons maintenant les b_α sous la seule hypothèse de convergence de toutes les séries $\sum \alpha! \; a_\alpha . b_\alpha$. D'après le lemme 5 appliqué avec la norme $\| \; \|_1$ il faut calculer v_α.

$$(z_1 + \ldots + z_n)^{|\alpha|} = \sum_{\alpha = |\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} . z^\alpha$$

d'où

$$\sup_{\|z\|_1 = 1} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} . |z|^\alpha \leqslant 1$$

et

(60) $$v_\alpha \leqslant \frac{\alpha!}{|\alpha|!} .$$

D'autre part :

(61) $$v_\alpha \geqslant \frac{\alpha!}{|\alpha|! \; \Phi(n)} .$$

En conséquence dans le calcul du type on peut remplacer v_α par $\frac{\alpha!}{|\alpha|!}$.

Le type τ d'une fonction f de E^k par rapport à la norme $\| \; \|_1$ sera donc donné par :

(62) $$\tau(f) = \overline{\lim}\ \left(\frac{|\alpha|}{e.k}\right)^{1/k} \frac{\alpha!}{|\alpha|!} \cdot |a_\alpha|^{1/|\alpha|}.$$

Si $f \in E_R^k$ cela veut dire qu'il existe un A_o tel que pour tout A tel que $A_o < A < R$ on a $\tau(f) < A$. Donc dès que $|\alpha|$ est assez grand on a :

(63) $$|a_\alpha| \leqslant A^{|\alpha|}\left(\frac{e.k}{|\alpha|}\right)^{|\alpha|/k} \cdot \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

d'après la formule (62).

La série $\Sigma\ \alpha!\ a_\alpha . b_\alpha$ est sommable donc il existe une constante telle que $|\alpha!\ a_\alpha . b_\alpha| < M$ d'où $|b_\alpha| \leqslant |\alpha!\ a_\alpha|^{-1}$. Or on peut prendre :

$$a_\alpha = A^{|\alpha|}\left(\frac{e.k}{|\alpha|}\right)^{|\alpha|/k} \cdot \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

puisque $A < R$, car avec ce choix la série $\Sigma a_\alpha . z^\alpha$ a pour somme d'après le lemme 5 un élément de $E^k_{R,\|\ \|_1}$. Ceci nous donne :

(64) $$|b_\alpha| \leqslant M . A^{-|\alpha|}\left(\frac{|\alpha|}{e.k}\right)^{|\alpha|/k} \cdot \frac{1}{|\alpha|!}$$

et

(65) $$|b_\alpha|^{1/|\alpha|} \leqslant M^{1/|\alpha|} . A^{-1}\left(\frac{|\alpha|}{e.k}\right)^{1/k} \cdot \frac{1}{(|\alpha|!)^{1/|\alpha|}} .$$

On a la formule de Stirling :

$$|\alpha|! = \left(\frac{|\alpha|}{e}\right)^{|\alpha|} . \sqrt{2\pi|\alpha|} . e^{\frac{-\delta(|\alpha|)}{12}}$$

où $0 \leqslant \delta(|\alpha|) \leqslant 1$ [2]

on tire :

(66) $$|b_\alpha|^{1/|\alpha|} \leqslant M^{1/|\alpha|} . \left(\sqrt{2\pi|\alpha|} . e^{\frac{\delta(|\alpha|)^{1/|\alpha|}}{12}}\right) .$$

$$\left[\frac{|\alpha|}{e.(1-1/k)^{-1}}\right]^{(-1+1/k)} . k^{1/k} . (1-1/k)^{-(1-1/k)} .$$

On a bien :

$$\lambda(k)^{-1} = \frac{k^{1/k}}{(1-1/k)^{1-1/k}} .$$

L'inégalité (66) ayant lieu quel que soit $A < R$ il s'ensuit que

$$\sum_\alpha b_\alpha . z^\alpha \in E^{k'}_{o,(\lambda(k)R)^{-1},\quad \infty} .$$

Réciproquement si $\sum_\alpha b_\alpha . z^\alpha \in E^{k'}_{o,(\lambda(k).R)^{-1}},\| \|_\infty$ ceci veut dire que pour tout $A < R$ on a :

(67) $$|b_\alpha| \leqslant M(A) \left(\frac{e.k'(\lambda(k)A)^{-k'}}{|\alpha|}\right)^{|\alpha|/k'} .$$

Si $f = \sum_\alpha a_\alpha . z^\alpha$ appartient à $B_{A',\| \|_1}$ on a :

(68) $$|a_\alpha| \leqslant \|f\|_{A,\| \|_1} \left(\frac{e.k.A^k}{|\alpha|}\right)^{|\alpha|/k} . \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

donc la série de terme général $|\alpha!\ a_\alpha . b_\alpha|$ a son terme majoré par

$$M(A).\|f\|_{A',\rho} \left(\frac{e}{|\alpha|}\right)^{|\alpha|} . |\alpha|!\left(\frac{A}{A'}\right)^{|\alpha|}$$

donc :

$$|\Sigma\alpha!\ a_\alpha . b_\alpha| \leqslant M(A).\|f\|_{A,\| \|_1} \sum_\alpha \sqrt{2\pi|\alpha|} . \left(\frac{A}{A'}\right)^{|\alpha|}$$

(69) $$|\Sigma\alpha!\ a_\alpha . b_\alpha| \leqslant K.M(A).\|f\|_{A',\| \|_1} .$$

Ce qui montre que la forme linéaire ainsi définie est continue sur chaque $B_{A',\| \|_1}$ donc sur $E^k_{A,\| \|_1}$ donc que l'application de Fourier-Borel envoie le dual de $E^k_{R,\| \|_1}$ sur $E^{k'}_{o,(\lambda(k)R)^{-1},\| \|_\infty}$.

De façon analogue on verra qu'elle envoie le dual de $E^k_{R,\| \|_\infty}$ sur $E^{k'}_{o,(\lambda(k)R)^{-1},\| \|_\infty}$. Le lemme 8 est démontré.

Notons qu'il était évidemment possible de commencer par les inégalités (67) à (69) puis d'appliquer le lemme 6. Mais nous avons voulu montrer en outre la propriété que si la série $\Sigma\alpha!\, a_\alpha . b_\alpha$ converge pour toute $f \in E^k_{R,\rho}$ où ρ est une norme de Reinhardt, alors les b_α sont les coefficients de Taylor de la transformée de Fourier-Borel d'un élément du dual de cet espace. Quant à la notion de convergence pour la série elle est indifférente car on peut toujours remplacer a_α par $|a_\alpha| . \frac{\bar{b}_\alpha}{|b_\alpha|}$ donc la série doit toujours être sommable.

LEMME 9. Soit u une application linéaire injective de V dans W, deux espaces normés complexes de dimension finie. On suppose que si σ est la norme de V, ρ celle de W, $\rho(u(e)) = \sigma(e)$ pour tout e de V.

Soit u' l'application transposée, surjective de W' sur V'. Si $T \in (E^k_{o,R,\sigma})'$ (resp. $T \in (E^k_{R,\sigma})'$) on définit $u(T)$ par $u(T)(f) = T(f \circ u$ pour toute $f \in E^k_{o,R,\rho}$ (resp. $f \in E^k_{R,\rho}$). On a la formule :

$$\mathcal{F}(u(T)) = \mathcal{F}(T) \circ u' . \tag{70}$$

Démonstration. Pour tout $f' \in F'$

$$\mathcal{F}(u(T))(f') = u(T)(f \to \exp < f,f' >) = T(\exp < u(f),f' >)$$
$$= T(e \to \exp < e,u'(f') > = \mathcal{F}T \circ u'(f')$$

C.q.f.d.

LEMME 10. Mêmes hypothèses qu'au lemme 9, c'est-à-dire que $V \subset W$ est un sous-espace vectoriel normé de W. L'application de restriction de $E^k_{R,\rho}(W)$ (resp. $E^k_{o,R,\rho}(W)$) à V est surjective sur $E^k_{R,\sigma}(V)$ (resp. $E^k_{o,R,\sigma}(V$

Démonstration. On peut utiliser les résultats de M. Hörmander [9] mais ce lemme est de nature très élémentaire. On va utiliser le résultat suivant bien classique quand $n = 1$.

LEMME 11. *A f holomorphe au voisinage de l'origine de W et de série de Taylor $\sum_{\alpha} a_{\alpha}.z^{\alpha}$ on associe la série de Taylor*

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{|\alpha|}{k.e}\right)^k.a_{\alpha}.z^{\alpha} = \Theta_k(f).$$

Soit ρ une norme complexe. Si $f\in E^k_{o,R,\rho}(W)$ (resp. $f\in E^k_{R,\rho}(W)$) $\Theta_k(f)$ regroupée en série de polynômes homogènes $\sum_n \left(\frac{n}{k.e}\right)^k.P_n(f;z)$ converge dans $E^{\infty}_{o,R,\rho}(W)$ (resp. dans $E^{\infty}_{R,\rho}(W)$) vers $S_k(f)$. L'application $f \to S_k(f)$ établit un isomorphisme entre $E^k_{o,R,\rho}(W)$ et $E^{\infty}_{o,R,\rho}(W)$ (resp. entre $E^k_{R,\rho}(W)$ et $E^{\infty}_{R,\rho}(W)$) qui commute avec l'opération de restriction à un sous-espace complexe de W ; S_k ne dépend pas du choix d'un système de coordonnées.

Démonstration. Si $f\in E^k_{o,R,\rho}$

(71) $$u_n \leqslant \|f\|_{A,\rho} \left(\frac{e.k}{n}A^k\right)^{n/k} \text{ pour tout } A > R$$

d'après (39), donc :

(72) $$\left|\left(\frac{n}{k.e}\right)^k.u_n\right| \leqslant \|f\|_{A,\rho}.A^n \quad \text{pour tout } A > R$$

donc :

$$\sum_n \left(\frac{n}{k.e}\right)^k.P_n(f;z)$$

est une série convergeant uniformément absolument sur tout compact de l'ouvert $\rho(z) > R^{-1}$. Réciproquement si une série $\sum_n Q_n(z)$ de polynômes homogènes converge uniformément sur tout compact de l'ouvert $\rho(z) < R^{-1}$

on a :

(73) $$\sup_{\rho(z)\leqslant 1} |Q_n(z)| \leqslant M(A).A^n \quad \text{pour tout} \quad A > R .$$

Donc la série de polynômes $P_n(f;z) = (\frac{k.e}{n})^k Q_n$ converge dans $E^k_{o,R,\rho}$. Ceci démontre l'isomorphisme dans le premier cas. Il en est exactement de même dans l'autre cas. Enfin la restriction de $P_n(f;z)$ à V si V est une sous-variété complexe de W est la partie homogène de degré n du développement de la restriction de f à V. Il en résulte la commutation de l'opération de restriction avec S_k. Un polynôme homogène de degré n, P, est caractérisé par le fait suivant: $P(\lambda . z) = \lambda^n P(z)$, parmi les fonctions entières et $S_k(P) = (\frac{n}{k.e})^k . P$ ne dépend pas du choix d'un système de coordonnées. Ceci reste vrai pour toute fonction : C.q.f.d.

<u>Démonstration du lemme</u> 10. Appliquant S_k on est ramené au fait suivant bien connu (H. Cartan) : si Ω est un ouvert convexe (resp. un compact convexe) de W espace vectoriel complexe de dimension finie et si V est un sous-espace linéaire de W, la restriction à $V \cap \Omega$ de $H(W)$ est égale à l'espace des fonctions holomorphes dans l'ouvert $V \cap \Omega$ de la variété V.

On peut donner une démonstration élémentaire de cette propriété basée sur la représentation intégrale de M. J. Leray (formule 110) du moins dans les hypothèses que nous venons d'adopter.

LEMME 12. <u>Soit</u> $V \subset W$, <u>sous-espace vectoriel normé de</u> W <u>espace vectoriel complexe de dimension finie</u>. <u>On note par</u> ρ <u>la norme de</u> V, <u>par</u> σ <u>celle de</u> W. <u>Les polynômes nuls sur</u> V <u>sont denses dans le sous-espace des fonctions de</u> $E^k_{R,\sigma}(W)$ (<u>resp</u>. $E^k_{o,R,\sigma}(W)$) <u>nulles sur</u> V.

Démonstration. Il suffit de démontrer ce lemme quand V est un hyperplan. On choisit des coordonnées et on suppose que V est de la forme $z_n = 0$. Si f entière s'annule sur V elle est de la forme $f = z_n . g$. Il reste à voir que $g \in E^k_{R,\sigma}(W)$ (resp. $g \in E^k_{o,R,\sigma}(W)$). Soit $\Phi(\zeta)$ holomorphe au voisinage du disque $|\zeta| \leqslant 1$. Par l'inégalité de Schwarz on sait que :

$$(74) \qquad |\Phi(\zeta)| \leqslant |\zeta| . \sup_{|\zeta'|=1} |\Phi(\zeta')| .$$

Donc, appliquant ceci à $\Phi(\zeta) = f(z_1,\ldots,z_{n-1}, \zeta.z_n)$ on a :

$$(75) \qquad |g(z)| \leqslant \sup_{|\zeta'|=1} |f(z_1,\ldots,\zeta'.z_n)| \leqslant K \exp (A(\rho(z) + \alpha))^k$$

si

$$|f(z)| \leqslant K \exp (A\rho(z))^k, \quad \text{où} \quad \alpha = \sup_{|\zeta'|=1} \rho((0,\ldots,0,\zeta'))$$

ce qui assure évidemment que g appartient au même espace fonctionnel que f. Maintenant g est limite d'une suite P_n de polynômes dans $E^k_{R,\sigma}(W)$ (resp. $E^k_{o,R,\sigma}(W)$) (Proposition 4) donc $f = \lim_{n \to \infty} z_n . P_n$. C.q.f.d.

LEMME 13. Soit $V \subset W$ sous-espace vectoriel normé de W espace vectoriel complexe de dimension finie, ρ, σ les normes de V et W. Soit u l'injection de V dans W. Alors $\Theta \in (E^k_{R,\sigma}(W))'$ (resp. $\Theta \in (E^k_{o,R,\sigma}(W))'$) est de la forme $\Theta = u(T)$ où $T \in (E^k_{R,\rho}(V))'$ (resp. $T \in (E^k_{o,R,\rho}(V))'$) si et seulement si $\mathcal{F}\Theta$ est constante sur les fibres de u'. Il revient au même de dire que $\Theta(f) = 0$ pour toute fonction f de $E^k_{R,\rho}(W)$ (resp. de $E^k_{o,R,\rho}(W)$) et nulle sur V.

Démonstration. Notons par r l'application de restriction, qui admet $(T \to u(T))$ comme transposée. L'application est surjective d'après le lemme 8, donc u a une image fermée car nos espaces sont simultanément des $(\mathcal{D}\mathcal{S})$ ou des $(\mathcal{F}\mathcal{S})$ [7]. En conséquence cette image est connue par son orthogonal, à savoir le noyau de r. Il reste à voir que $\Theta(f) = 0$ pour toute f telle que $r(f) = 0$ équivaut à $\mathcal{F}\Theta$ est constante sur les fibres de u'. Or $\Theta(f) = 0$ si et seulement si d'après le lemme 12 $\Theta(p) = 0$ pour tout polynôme p nul sur V.

Si on choisit un système de coordonnées $(z_1, \dots, z_n)$, V étant définie par $z_n = \dots = z_{n-k+1} = 0$, alors $\mathcal{F}\Theta$ ne dépend pas des dernières coordonnées. Réciproquement si $\mathcal{F}\Theta$ ne dépend pas des dernières coordonnées cela signifie que sa série de Taylor à l'origine ne dépend pas des k dernières variables, ce qui d'après la formule (58) et la définition des c_α signifie que Θ est orthogonale à tous les polynômes z^α où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, l'un des α_j pour $j \geqslant n - k + 1$ étant différent de zéro, donc est orthogonale à tout polynôme s'annulant sur V. C.q.f.d.

<u>Démonstration du théorème</u> 1. Soit ρ une norme complexe, on peut trouver ρ_1 norme quotient d'une norme $\sum_{i=1}^{N} |z_i|$ aussi voisine qu'on peut de ρ, telle, par exemple, que $\rho \leqslant \rho_1 \leqslant (1+\varepsilon)\rho$, cf. [15].

Nous notons l'ensemble de telles normes ρ_1 par $\mathcal{P}$. Soit q l'application surjective de l'espace $(\mathbb{C}^N, \| \|_1)$ sur l'espace (V, ρ_1), de passage au quotient et soit q' sa transposée, injective de (V', ρ_1') dans $(\mathbb{C}^N, \| \|_\infty)$.

D'après le lemme 8 la transformation de Fourier-Borel établit un isomorphisme entre $E^k_{R, \| \|_1}(\mathbb{C}^N)$ et $(E^{k'}_{o,(\lambda(k).R)', \| \|_\infty}(\mathbb{C}^N))'$. D'après le lemme 7 $E^k_{R,\rho_1}(V)$ s'identifie à l'ensemble des fonctions de $E^k_{R,\| \|_1}(\mathbb{C}^N)$

constantes sur les fibres de q. Soit f un élément de cet espace. Il existe un élément Θ de $(E^{k'}_{o,(\lambda(k).R)',\|\ \|_\infty}(\mathbb{C}^N))'$ tel que $\mathcal{F}\Theta = f$. Alors nous savons que Θ est de la forme $q'(T)$ où $T\in E^{k'}_{o,(\lambda(k).R)',\rho_1'}(V')$ grâce au lemme 13. Enfin grâce à la formule du lemme 9 on a $f = \mathcal{F}T \circ q$, ce qui montre que $\mathcal{F}$ est injective de $(E^{k'}_{o,(\lambda(k).R)',\rho_1'}(V'))'$ sur $E^k_{R,\rho_1}(V)$. Le théorème est démontré avec ρ_1'. Sa validité en résulte pour toute norme complexe car, par exemple, du cas déjà démontré, on déduit :

(76) $$(E^k_{o,R,\rho})' = \bigcup_{\substack{\sigma\in\mathcal{P}\\ \sigma\geq\rho}} E^{k'}_{(\lambda(k).R)',\sigma'} = E^{k'}_{(\lambda(k).R)',\rho'} \,.$$

Tous les autres cas s'en déduisent de façon analogue. C.q.f.d.

COROLLAIRE. "Représentation de Pólya"

a) si $f\in E^k_{o,R,\rho}(V)$ il existe une mesure μ définie sur V' telle que pour tout $A < (\lambda(k)R)'$, $|\mu|.\exp\,(A\rho'(u))^k$ soit bornée et telle que :

(77) $$f(z) = \int_{V'} \exp < z,u > d\mu(u) \qquad \text{si} \quad k \neq \infty$$

b) sans hypothèse sur k si $f\in E^k_{R,\rho}(V)$ il existe une mesure μ définie sur V', telle que $|\mu|\ \exp\,(A\rho'(u))^k$ soit bornée pour un A supérieur à $(\lambda(k)\ R)'$ et telle que :

(78) $$f(z) = \int_{V'} \exp < z,u > d\mu(u) \,.$$

Démonstration. On utilise les propositions 2 et 3 sur la représentation du dual de

$$E^{k'}_{(\lambda(k).R)',\rho'}(V')\ (\text{resp. de } E^{k'}_{o,(\lambda(k).R)'.\rho'})$$

puis le théorème 1. C.q.f.d.

Dans l'article [16], j'ai énoncé un lemme de décomposition, page 42, manifestement erroné. Il est aisé de le reformuler de façon raisonnable. Je m'inspirais du classique lemme de décomposition de A.J. Macintyre, [2] page 80.

LEMME 14 (Macintyre). <u>Supposons</u> V' <u>recouvert par des cônes convexes</u> $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ <u>de sommet de l'origine et d'intérieurs non vides. Soit</u> Γ_j° <u>le cône dual c'est-à-dire le cône des</u> z <u>tels que</u> $\operatorname{Re} < z,u > \leqslant 0$ <u>pour tout</u> $u \in \Gamma_j$; <u>on notera de façon plus générale par</u> Γ_j^α <u>le cône défini par</u> :

$$\Gamma_j^\alpha = \{z \,|\, \operatorname{Re} < z,u > \leqslant \alpha\rho'(u)\,\rho(z) \ \forall\, u \in \Gamma_j\} \ . \tag{79}$$

Soit maintenant $f \in E^k_{R,\rho}(V)$ (resp. $f \in E^k_{o,R,\rho}(V)$). Il existe des fonctions f_j telles que :

1) $f = \sum_j f_j$

2) $f_j \in E^k_{R,\rho}(V)$ (resp. $f_j \in E^k_{o,R,\rho}(V)$)

3) f_j <u>est bornée sur</u> Γ_j°. <u>Plus généralement si</u> $k \neq 1,\infty$,

$$|f_j(z)| \leqslant K_j(B) \exp\, (\lambda(k').\alpha.B.\rho(z))^k \tag{80}$$

<u>pour tout</u> $B > R$ <u>dans le second cas</u>;

$$|f_j(z)| \leqslant k_j(B) \exp\, ((\lambda(k').\alpha.B).\rho(z))^k \tag{81}$$

<u>pour un</u> $B < R$ <u>dans le premier cas</u>.

<u>Lorsque</u> $k = 1$ (81) <u>reste valable et on l'appliquera aux deux situations</u>.

<u>Quand</u> $k = \infty$ <u>on doit interpréter comme suit</u> :

<u>Dans le second cas</u> f_j <u>est holomorphe outre l'ouvert</u> $\rho(z) < R$ <u>dans</u>

l'intérieur de l'ensemble $\Gamma_j^\alpha \cap \{\rho(z) \leqslant 1/R\alpha\}$ et dans l'intérieur de Γ_j°.

Dans le premier cas, elle est holomorphe outre au voisinage du compact $\rho(z) \leqslant R$, dans un voisinage de chacun des compacts $\Gamma_j^\alpha \cap \{\rho(z) \leqslant 1/R\alpha\}$.

Démonstration. Il est commode d'utiliser la représentation de Pólya contrairement au plan de [16].

On a $f = \mathcal{F}\, T$ où $T \in (E^{k'}_{(\lambda(k).R)',\rho'}(V))'$ (resp. $T \in (E^{k'}_{o,(\lambda(k).R)',\rho'}(V'))'$)
Si $k' = \infty$ donc $k \neq 1$, il est possible dans le second cas de trouver des μ_j, μ_j telle que son support soit dans Γ_j et telle que $|\mu_j|.\exp(A\rho'(u))^k$ soit bornée pour tout $A < (\lambda(k).R)^{-1}$, telle enfin que $\mu = \sum_j \mu_j$ représente T. Nous considérons alors

$$f_j = \int \exp < z,u > d\mu_j(u) .$$

Pour $z \in \Gamma_j^\alpha$ on a $\mathrm{Re} < z,u > < \alpha.\rho(z).\rho'(u)$. Cette intégrale, si $k' \neq 1$ donc $k \neq \infty$ définit une fonction entière.

On a, pour tout $A < (\lambda(k).R)'$

$$(82) \quad |f_j(z)| \leqslant \exp \sup\,(\alpha\rho(z)\,\rho'(u) - (A\rho'(u))^{k'})\ \|\mu_j.\exp\,(A\rho'(u))^{k'}\|$$

soit

$$(83) \qquad |f_j(z))| \leqslant K_j(A).\exp\,((\frac{\alpha\rho(z)}{A})^k(\frac{1}{k'})^{1/k'-1}.(1 - 1/k'))$$

$$\leqslant K_j(A)\ \exp\,(\frac{\alpha\lambda(k')^{-1}}{A}\,\rho(z))^k \quad .$$

Lorsque $k = \infty$, on voit que l'intégrale converge lorsque

$$\alpha\rho(z)\,\rho'(u) - A\rho'(u) = (\alpha\rho(z) - A)\rho'(u)$$

reste négatif donc pour

$$\rho(z) < \frac{A}{\alpha} < \frac{1}{R\alpha} \quad \text{dans le cône } \Gamma_j^\alpha .$$

Les autres cas se traitent par des modifications évidentes. La raison de la différence de $k = 1$ avec k fini tient à la proposition 3. C.q.f.d.

7. Théorèmes de division

Je vais donner ici une méthode basée sur un argument dû à Avanissian [1], argument qui fut d'ailleurs initialement inspiré par B. Malgrange. La méthode que j'avais décrite en [16] utilisait, à une variable la théorie des produits canoniques [2], puis, pour passer au cas de plusieurs variables la structure des indicatrices de croissance. Le progrès dans la simplification est substantiel.

Si g est une fonction définie dans le plan complexe (je n'ai pas dit une fonction holomorphe !) nous noterons $M(g;z_0,r)$ la moyenne de g sur le disque de centre z_0 et de rayon r par rapport à la mesure de Lebesgue.

LEMME 15 (module minimum). Soit $G(\zeta)$ une fonction entière d'une variable complexe ζ et satisfaisant à une majoration.

$$|G(\zeta)| \leqslant K.\exp (A(\zeta))^k, \quad G(0) \neq 0 .$$

Alors, pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$M(\log |G| \; ; z;\lambda \, |z|) \geqslant (\frac{1+\lambda}{\lambda})^2 \, G(0) + \dots + (1 - (\frac{1+\lambda}{\lambda})^2)[A'(1+\lambda)(z)]^k \tag{84}$$

pour tout $A' > A$ et $|z|$ assez grand, précisément $|z| \geqslant z_0(K,A')$ où $z_0(K,A') = (\frac{\log(\sup(k,1))}{A'^k - A^k})^{1/k}$.

Démonstration. Posons $\gamma = \log |G|$. Pour $A' > A$ et si

$$|z| \geqslant (\sup(\frac{\log K}{A'^k - A^k} , 0))^{1/k}$$

on a :

(85) $$\gamma - (A' \ |z|^k) < 0 .$$

Supposons ceci réalisé et posons $R = (1 + \lambda).|z|$ où $\lambda > 0$, puis

(86) $$\gamma' = \gamma - (A'.R)^k$$

on a l'inégalité :

(87) $$R^2.M(\gamma';0;R) \leqslant (\lambda \ |z|)^2.M(\gamma';z;|\lambda.z|)$$

car on intègre une fonction négative.

D'autre part γ' est une fonction sous-harmonique, donc on a :

(88) $$R^2(\log |G(0)| - (A'.R)^k \leqslant R^2.M(\gamma';0;R) .$$

Il vient donc :

(89) $$\lambda^2[M(\gamma;z;\lambda|z|) - (A'.R)^k] \geqslant (1 + \lambda)^2(\log |G(0)| - (A'.R)^k)$$

d'où :

(90) $$M(\gamma;z;\lambda \ |z|) \geqslant (\tfrac{1+\lambda}{\lambda})^2 \log |G(0)| + (1 - (\tfrac{1+\lambda}{\lambda}))^2((1 + \lambda)A' \ |z|)^k$$

C.q.f.d.

THÉORÈME 2 [1]. <u>Soit</u> F <u>entière dans le plan complexe</u>. <u>On suppose</u> $|F(z)| \leqslant K \exp (A \ |z|)^k$. <u>Soit</u> G <u>entière telle que</u> F/G <u>soit entière</u>, $G(0) \neq 0$, <u>et telle que</u> $|G(z)| \leqslant L$ <u>exp</u> $(B(z))^k$. <u>Pour tout</u> $A'> A$, $B'> B$ <u>et</u> $|z| \geqslant$ <u>sup</u>$(z_o(K,A'), z_o(L,B'))$ <u>on a l'inégalité</u> :

(90)' $$|F/G(z)| \leqslant |G(0)|^{-(\frac{1+\lambda}{\lambda})^2} \exp([(A'(1 + \lambda))^k + ((1 + \lambda)B')^k((\tfrac{1+\lambda}{\lambda})^2-1)]^{1/k}|z$$

<u>Démonstration</u>. La fonction F/G étant entière, $\log |F/G|$ est sous-harmonique, donc :

(91) $$\log |F/G(z)| \leqslant M(\log |F/G| \ ; z,\lambda \ |z|)$$

Et il vient :

(92) $M(\log |F/G| \; ; z,\lambda \; |z|) \leqslant M(\log|F|; \; z; \; \lambda|z|) - M(\log|G|; \; z,\lambda|z|)$.

Ceci nous donne, d'après le lemme 15, pour $|z| \geqslant \sup\,(z_0(K,A'),z_0(L,B'))$:

(90)" $$\log |F/G(z)| \leqslant ((A'(1+\lambda))^k + ((\frac{1+\lambda}{\lambda})^2 - 1)^2(B'(1+\lambda))^k).|z|^k$$

$$- (\frac{1+\lambda}{\lambda})^2 \log |G(0)| \qquad \text{C.q.f.d.}$$

COROLLAIRE 1. <u>Soient</u> F <u>et</u> G <u>deux fonctions entières définies sur</u> V, <u>d'ordre fini</u> k <u>et de types</u> A <u>et</u> B <u>relativement à une norme complexe</u> ρ. <u>Si</u> F/G <u>est entière, c'est une fonction entière d'ordre fini</u> k <u>et de type inférieur à</u> :

(93) $$\inf_\lambda [(A(1+\lambda))^k + (B(1+\lambda))^k((\frac{1+\lambda}{\lambda})^2 - 1)]^{1/k} .$$

<u>En particulier si</u> B = 0, <u>le type de</u> F/G <u>est égal à</u> A.

<u>Démonstration</u>. On a des majorations

$$|F(z)| \leqslant K(A') \exp\,(A'\rho(z))^k, \quad |G(z)| \leqslant L(B') \exp\,(B'\rho(z))^k$$

pour tout $A' > A$, $B' > B$. Soit z_0 un point où $G(z_0) \neq 0$. On a :

(94) $$\rho(z) - \rho(z_0) \leqslant \rho(z + z_0) \leqslant \rho(z) + \rho(z_0)$$

donc :

(95) $$\lim_{\rho(z)\to\infty} \frac{\rho(z+z_0)}{\rho(z)} = 1 \quad .$$

Donc les fonctions $F(z-z_0)$ et $G(z-z_0)$ sont d'ordre k et de types inférieurs à A et B par rapport à ρ. Posons (c'est la méthode de Malgrange [13]) :

$$(96) \qquad \begin{aligned} f_z(\zeta) &= F(\zeta.(z-z_o)) \\ & \qquad\qquad\qquad \rho(z-z_o) = 1 \\ g_z(\zeta) &= G(\zeta.(z-z_o)) \quad . \end{aligned}$$

On a pour tout couple $A' > A$, $B' > B$, ζ assez grand mais uniformément en z

$$(97) \qquad \begin{aligned} |f_z(\zeta)| &\leqslant K'(A').\exp\,(A'|\zeta|)^k \\ |g_z(\zeta)| &\leqslant L'(B').\exp\,(B'\,|\zeta|)^k \,. \end{aligned}$$

Donc, d'après l'inégalité (93),

$$(98) \quad \log|f_z(\zeta)/g_z(\zeta)| \leqslant ((A'(1+\lambda))^k + ((\tfrac{1+\lambda}{\lambda})^2 - 1)(B'(1+\lambda))^k)|\zeta|^k$$
$$- (\tfrac{1+\lambda}{\lambda})^2 \log|G_{z_o}(0)|$$

pour $|\zeta| \geqslant (z_o(K',A'),\ z_o(L',B'))$.

Donc $F(z-z_o)/G(z-z_o)$ est de type inférieur ou égal à :

$$(A'(1+\lambda))^k + (B'(1+\lambda))^k((\tfrac{1+\lambda}{\lambda})^2 - 1))^{1/k}$$

quel que soit $A' > A$, $B' > B$, $\lambda > 0$. Il en est de même pour $F/G(z)$.

Notons par $\alpha(H)$ le type d'une fonction H.

Si $B = 0$, λ étant fixé ainsi que A', il résulte de (93) que $\alpha(F/G) \leqslant A'(1+\lambda)$ donc (99) $\alpha(F/G) \leqslant A$.

Mais on a clairement :

$$(100) \qquad \alpha(G.(F/G))^k \leqslant \alpha(F/G)^k + \alpha(G)^k$$

d'où l'inégalité, c.q.f.d.

Ce théorème a été démontré pour la première fois à n variables par B. Malgrange (type exponentiel) et L. Ehrenpreis (ordre fini) sous la forme : le quotient de deux fonctions entières d'ordre fini et type moyen est une fonction entière d'ordre fini et type moyen. Le cas très utile de $B = 0$ pour une variable est un théorème de G. Pólya [18] cf. [2] p.191.

Pour une démonstration sous la forme Malgrange-Ehrenpreis de ce théorème basée à n variables sur la généralisation des produits canoniques cf. [10].

8. Applications aux équations de convolution

Considérons l'espace $E^k(V)$(resp. $E^k_o(V)$). Son dual, comme nous l'avons vu, est une algèbre de convolution.

Soit $T \in (E^k(V))'$ (resp. $T \in (E^k_o(V))'$).

Nous nous proposons de montrer que les résultats précédents ont des conséquences importantes pour l'équation linéaire $\check{T} * X = Y$ où $X \in E^k$ (resp. $X \in E^k_o$)$Y \in E^k$(resp. $Y \in E^k_o$). L'opérateur $X \to \check{T} * X$ est évidemment défini par la relation :

(101) $$< \check{T} * X, \Theta > = < X, T * \Theta > .$$

L'application transposée de $X \to \check{T} * X$ est alors par définition l'application $\Theta \to T * \Theta$ de $(E^k(V))'$ dans $(E^k(V))'$ (resp. de $(E^k_o(V))'$ dans $(E^k_o(V))'$). La méthode que nous suivons est celle de Schwartz [19], [13].

Utilisons l'isomorphisme de Fourier-Borel.

(102) $$\begin{cases} \mathcal{F}((E^k_o(V))') = E^{k'}(V') \\ \mathcal{F}((E^k(V))') = E^{k'}_o(V') \end{cases}$$

L'application devient $\mathcal{F}\Theta \to \mathcal{F}T.\mathcal{F}\Theta$. C'est une application injective, D'autre part, elle est d'image fermée grâce au corollaire du théorème 2.

En effet si x est un point de V' au voisinage duquel une fonction de $E_0^{k'}(V')$ (resp. $E^{k'}(V')$) est holomorphe et si f_α est un filtre convergeant vers $f_\circ$, $\mathcal{E}_x(f_\alpha)$ la série de Taylor en x de f_α converge vers $\mathcal{E}(f_\circ)$ pour la topologie de la convergence simple des coefficients. Donc il en résulte qu'une limite de fonctions de la forme $\mathcal{F}T.f_\alpha$ a sa série de Taylor, en chaque point où elle existe, divisible par celle de $\mathcal{F}T$. Soit $g \in E^{k'}(V')$ (resp. $g \in E_0^{k'}(V')$) telle que cette propriété soit vraie en chaque point de V' où toutes les fonctions de $E^{k'}(V')$ (resp. de $E_0^{k'}(V')$) sont holomorphes. Alors g/T est dans tous les cas holomorphe en tous ces points [13] et donc, si $k' = \infty$, $g/T \in E^{k'}(V')$ (resp. $g/T \in E_0^{k'}(V')$) et si $k' \neq \infty$, $g/T \in E^{k'}(V')$ (resp. $g/T \in E_0^{k'}(V')$) d'après le corollaire du théorème 2, c'est-à-dire que g est un multiple de T.

Nous avons donc montré les deux propriétés. Dans $E^{k'}(V')$ (resp. dans $E_0^{k'}(V')$):

a) L'idéal des multiples de $\mathcal{F}T$ est fermé, donc l'application $\Theta \to T * \Theta$ est injective et d'image fermée, ce qui entraîne, nos espaces étant soit des $(\mathcal{DF})$ soit des $(\mathcal{FF})$, que sa transposée est surjective.

b) Sauf dans la situation de $E^\infty(V')$, une fonction appartient à cet idéal si et seulement si sa série de Taylor en tout point de V' est divisible par celle de $\mathcal{F}T$; dans le cas de $E^\infty(V')$, si et seulement si sa série de Taylor à l'origine est divisible par celle de $\mathcal{F}T$. Mais ceci, selon Malgrange [13], veut dire qu'une telle fonction est orthogonale à l'ensemble des exponentielles polynômes de l'équation $T * X = 0$. Donc cet orthogonal est juste $T * (E^k)'$ (resp. $T * (E^k_o)'$).

Il vient donc le

THÉORÈME 3. a) <u>L'équation</u> $\check{T} * X = f$ <u>où</u> $f \in E^k(V)$ (<u>resp.</u> $f \in E^k_o(V)$) <u>si</u> $T \in (E^k(V))'$, (<u>resp.</u> $T \in (E^k_o(V))'$) <u>admet toujours une solution dans le même espace fonctionnel</u>.

b) <u>Toute solution de l'équation</u> $\check{T} * X = 0$ <u>est limite des solutions exponentielles polynômes de l'équation homogène</u>.

Ce théorème pour $k = \infty$ dans le premier cas est dû à B. Malgrange [13]. Il est possible de préciser l'ordre de X en fonction de celui de f à l'aide du théorème 2.

Maintenant, appelons <u>opérateur différentiel</u> (à coefficients constants) <u>relativement à l'ordre</u> k, <u>tout élément</u> T <u>de</u> $(E^k)'$.

Donc un opérateur différentiel relativement à l'ordre k est un opérateur dont la <u>transformée de Fourier-Borel est une fonction entière d'ordre</u> k' <u>et de type zéro</u>. Une équation aux dérivées partielles à coefficients constants est dans ce cas quel que soit l'ordre.

Les raisonnements précédents s'adaptent immédiatement. Le corollaire du théorème 2 dans le cas $B = 0$ donne donc ceci :

THÉORÈME 4. <u>Si</u> T <u>est un opérateur différentiel d'ordre infini relativement à l'ordre</u> k <u>alors pour tout</u> R, <u>tout</u> ρ

a) $\check{T} * E^k_{o,R,\rho} \subset E^k_{o,R,\rho}$ (<u>resp.</u> $\check{T} * E^k_{R,\rho} \subset E^k_{R,\rho}$)

b) <u>l'application</u> $f \to \check{T} * f$ <u>est surjective dans chacun de ces espaces fonctionnels</u>

c) <u>les exponentielles polynômes du noyau sont totales dans le noyau</u>.

<u>Démonstration</u>. Traitons seulement de $E^k_{R,\rho}$. L'assertion a) est évidente grâce à l'isomorphisme de Fourier-Borel. Le point b) ainsi que c) résultent des faits suivants :

$$(E^k_{R,\rho}(V))' \simeq E'_{o,(\lambda(k)R)',\rho'}(V')$$

et une fonction de

$$E^{k'}_{o,(\lambda(k).R)',\rho'}(V')$$

est de la forme $f.\mathcal{F}T$ où f appartient au même espace si et seulement si elle est divisible en chaque point par $\mathcal{F}T$. Remarquons à nouveau que ce théorème s'applique à toutes les équations aux dérivées partielles et à coefficients constants pour tout $k \geqslant 1$.

Voici deux cas extrêmes : $k = \infty; E^k_{R,\rho}$ (resp. $E^k_{o,R,\rho}$) est l'espace des fonctions holomorphes au voisinage du compact $\rho(z) \leqslant R^{-1}$ (respect. dans l'ouvert $\rho(z) < R^{-1}$).T est un opérateur différentiel d'ordre infini.

$k = 1$, $E^k_{o,R,\rho}$ est l'espace des fonctions entières de ρ-type exponentiel R. On pourra prendre pour T n'importe quel opérateur aux différences et même, par exemple, un opérateur du type suivant

$$T = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n \, \delta(z_n) \tag{103}$$

où $|\lambda_N| \, \rho(z_N)$ est à décroissance plus rapide que toute exponentielle. On aura dans ce cas : étant donné f du type exponentiel et de ρ-type R il existe g du même type telle que

$$f = \sum_n \lambda_n . g(z-z_n) \tag{104}$$

la série convergeant dans $E^1_{o,R,\rho}$ et _a fortiori_ pour la convergence normale.

Notons que si $\mathcal{F}T$ est sans zéros il y a unicité de la solution. Il y a évidemment de tels opérateurs non triviaux, c'est-à-dire distincts du cas de la translation dès que $k < 2$, à savoir les T telles que $\mathcal{F}T = \exp \rho(z)$ où ρ est un polynôme de degré supérieur à un.

Dans le même ordre d'idées on a, par exemple, le théorème d'unicité suivant.

PROPOSITION 7. _Soit_ μ _une mesure positive sur_ $\mathbb{R}^n$ _telle que_ μ _exp_ $A\rho(x)$ _soit bornée pour un_ A. _Il existe un_ B _tel que toute solution de l'équation_ $\mu * f = 0$ _où_ $f \in E^1_{B,\rho}$ (_resp._ $f \in E^1_{o,B,\rho}$) _est la solution nulle_. _En plus, si_ μ _exp_ $A\rho(x)$ _est bornée pour tout_ $A > 0$ _l'application_ $f \to \mu * f$ _est un isomorphisme de_ $E^1_{B,\rho}$ _sur lui-même_ (_resp. de_ $E^1_{o,B,\rho}$ _sur lui-même_).

Le nombre B est évidemment le rayon de la plus grande ρ-boule ne contenant aucun zéro de $\mathcal{F}\mu$ et $\mathcal{F}\mu(0) > 0$ donc $B > 0$. En exemple, prenons la mesure $e^{-|X|^2}$ où $|X|$ est une forme euclidienne, dX désignent la mesure de Lebesgue attachée à la forme quadratique $|X|^2$.

L'application

(105) $$f \to \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z+u)e^{-|u|^2} d\,u$$

a pour inverse

(106) $$g \to \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_n} g(z+i\,u)e^{-|u|^2} d\,u \qquad f,g \in E^1 .$$

Dans le cas des espaces $E^1_{o,R,\rho}$ (resp. $E^1_{R,\rho}$) il convient de noter que les résultats connus sont beaucoup plus complets. En effet d'après H. Cartan [4] un idéal fermé dans l'un des espaces E^∞... est caractérisé par sa fermeture algébrique donc, dans ces espaces l'ensemble des solutions exponentielles polynômes d'un système homogène quelconque d'équations de convolutions est dense dans l'ensemble de toutes les solutions.

DEUXIÈME PARTIE. Compléments dans le cas des fonctions entières de type exponentiel : la transformée de Laplace projective.

9. L'indicatrice projective de Fantappiè

La lettre V désignant toujours un espace vectoriel complexe de dimension finie, $P(V)$ sera le projectif obtenu à partir de V en lui ajoutant ses points à l'infini, V' sera le dual de V et $P(V')$ le projectif associé à V'. Nous noterons par (ζ_o, z) les coordonnées homogènes d'un point de $P(V)$, $z \in E$, $\zeta \in \mathbb{C}$, par (ξ_o, ξ) celles d'un point de $P(V')$.

L'hyperplan de $P(V)$ associé à (ξ_o, ξ) est défini par l'équation :

$$\xi_o \cdot \zeta_o + \langle z, \xi \rangle = 0 \tag{107}$$

et noté par $\bar{\bar{\xi}}$.

Cette correspondance sera dite dualité pour une raison évidente. Soient $z \to (z_1, \ldots, z_n)$ des coordonnées choisies dans V et $\xi \to (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ les coordonnées duales dans V'.

Soit :

$$\pi(z) = d\, z_1 \wedge \ldots \wedge d\, z_n, \quad \vartheta(\xi) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \xi_j \, d\, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\xi_j} \wedge \ldots \wedge d\, \xi_n \tag{108}$$

et soit :

$$\omega(\xi,z) = \frac{\vartheta(\xi) \wedge \pi(z)}{(\langle z,\xi\rangle + \xi_o)^n}$$

(109)
$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} (-1)^j \xi_j \, d\,\xi_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\xi_j} \wedge \ldots \wedge d\,\xi_n \wedge d\,z_1 \wedge \ldots \wedge d\,z_n}{(z_1\,\xi_1 + \ldots + z_n\,\xi_n + \xi_o)^n} .$$

La forme ω est homogène de degré zéro en ξ donc dans le complémentaire dans $V \times p(V')$ de l'ensemble des points $< z,\xi > + \xi_o = 0$ elle définit une forme différentielle. Nous orientons un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ par la condition :

$$\frac{1}{(2i)^n} \int_{\Omega} \pi(\bar{z}) \wedge \pi(z) \geqslant 0$$

Soit maintenant Γ le bord d'un ouvert Ω convexe, supposé régulier, orienté par la formule de Stokes écrite :

$$\int_{\partial\Omega} \pi = \int_{\Omega} d\,\pi .$$

A tout point z de Γ on associe l'hyperplan complexe $\bar{\xi}(z)$ passant par z et tangent à Γ. L'image par l'application $z \to (z,\bar{\xi}(z))$ de Γ est une variété $\Sigma(\Gamma)$ de $V \times P(V')$ isomorphe à Γ. On oriente cette variété par transport de l'orientation de Γ. Soit alors f une fonction holomorphe au voisinage de Γ. On a la formule démontrée par M. Jean Leray [11] :

(110)
$$f(u) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma(\Gamma)} f(z) \frac{1}{(\xi.u)^n} \omega(\xi;z)$$

si $u \in \Omega$. Nous allons l'interpréter.

Soit K un compact de $\mathbb{C}^n$. Nous désignons par $H(K)$ l'espace $\varinjlim_{\omega} H(\omega)$ limite inductive, dans la catégorie des espaces localement convexes, des espaces de Fréchet $H(\omega)$. Comme l'application de restriction $H(\omega) \to H(\omega')$ est compacte si ω' est relativement compact dans ω, et comme $H(K)$ muni de la topologie de la convergence simple des coefficients des séries de Taylor en chaque point de K est séparé il s'ensuit que $H(K)$ est un dual de Fréchet-Schwartz [7] (c'est même un espace nucléaire).

Nous notons par $\overset{*}{\complement}K$ la partie ouverte de $P(V')$ formée des hyperplans $\bar{\xi}$ tels que $\bar{\xi} \cap K = \emptyset$.

Soit $T \in H'(K)$. Considérons la fonction

$$z \to \frac{\xi_0}{\langle z,\xi\rangle + \xi_0} \tag{111}$$

qui, étant homogène de degré zéro en ξ ne dépend que de l'hyperplan défini par (ξ_0, ξ).

Si $\bar{\xi} \in \overset{*}{\complement}K$ c'est une fonction holomorphe de z au voisinage de K, donc elle définit un élément de $H(K)$ que nous noterons encore

$$z \to \frac{\xi_0}{\langle z,\xi\rangle + \xi_0} \quad .$$

On peut prendre la valeur de T sur cet élément.

DÉFINITION (Fantappiè). <u>On désigne par indicatrice projective de</u> T <u>la fonction</u>

$$\bar{\xi} \to \left(T\left(z \to \frac{\xi_0}{\langle z,\xi\rangle + \xi_0}\right)\right)$$

<u>définie sur</u> $\overset{*}{\complement}K$, <u>et qu'on notera</u> Φ_T .

Il vient le

THÉORÈME 5: [17]. <u>Le dual de</u> $H(K)$ <u>où</u> K <u>est un convexe compact, est isomorphe avec sa topologie forte, par l'application</u> $T \to \Phi_T$ <u>qui a une fonctionnelle analytique</u> T <u>définie sur</u> K <u>associe son indicatrice projective à l'espace</u> $P_0(\overset{*}{\complement}K)$ <u>des fonctions holomorphes dans</u> $\overset{*}{\complement}K$ <u>et nulles aux points à l'infini de</u> $\overset{*}{\complement}K$, $(\xi_0 = 0)$, <u>muni de la topologie de la convergence compacte</u>.

<u>Démonstration</u>. On a le :

LEMME 16. K <u>étant un compact quelconque,</u> Φ_T <u>est holomorphe dans</u> $\overset{*}{\complement}K$ <u>et nulle à l'infini</u>.

<u>Démonstration</u>. On a :

$$\Phi_T = \xi_0 . T(z \to \frac{1}{< z,\xi > + \xi_0}) \tag{112}$$

des coordonnées étant fixées. Donc si $< z,\xi > \neq 0$ on voit que Φ_T s'annule quand ξ_0 s'annule. Ensuite, $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \omega_n$ où les ω_n sont des voisinages ouverts de K. Si j_n est l'application canonique (de restriction) de $H(\omega_n)$ dans $H(K)$ nous noterons par T_n l'application continue $T \circ j_n$. L'espace $H(\omega_n)$ est un sous-espace fermé de $C(\omega_n)$ l'espace des fonctions continues sur ω_n et muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Par Hahn-Banach il existe une mesure μ_n à support compact dans ω_n et telle que :

$$T_n(f) = \int f d\mu_n \tag{113}$$

pour toute $f \in H(\omega_n)$.

Considérons, si $\xi \cap \omega_n = \emptyset$, la fonction

$$(z \in \omega_n ; z \to \frac{\xi_o}{<z,\xi> + \xi_o}) .$$

Par définition on a :

$$\Phi_T(\bar{\xi}) = T_n((z \in \omega_n ; z \to \frac{\xi_o}{<z,\xi> + \xi_o}))$$

d'où

(114) $$\Phi_T(\bar{\xi}) = \xi_o \int \frac{d\, \mu_n(z)}{<z,\xi> + \xi_o}$$

qui est donc manifestement holomorphe en $\xi_o, \ldots, \xi_n$ pourvu que $\bar{\xi} \cap \sigma(\mu) = \emptyset$ où $\sigma(\mu)$ désigne le support de μ. Ceci ayant lieu pour tout n, Φ_T est holomorphe dans $\complement \overset{*}{K}$. C.q.f.d.

LEMME 17. <u>Supposons</u> K <u>convexe. Soit</u> ψ <u>une fonction définie sur</u> $\complement \overset{*}{K}$, <u>holomorphe et nulle à l'infini ; soit</u> $\bar{f} \in H(K)$: <u>on considère un représentant</u> f <u>de</u> $\bar{f}$ <u>holomorphe dans un voisinage</u> Ω <u>de</u> K ; <u>soit</u> ω <u>un voisinage convexe à frontière régulière de</u> K <u>inclus dans</u> Ω ; <u>on pose</u> :

(115) $$T_\psi(\bar{f}) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma(\omega)} f(u) . \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_o^{n-1}} (\frac{1}{\xi_o} \psi(\xi)) \, \omega(u,\xi) .$$

<u>Le nombre ainsi défini ne dépend que de</u> $\bar{f}$, <u>donc ne dépend pas du choix de</u> f <u>puis de celui de</u> ω, <u>et l'application</u> $\bar{f} \to T_\psi(\bar{f})$ <u>est une forme linéaire continue sur</u> $H(K)$.

<u>Démonstration</u>. Remarquons d'abord que l'expression a un sens. En effet, en dehors de l'infini $\psi(\xi)/\xi_o$ est de degré -1 en ξ_o, donc

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_o^{n-1}} (\psi(\xi)/\xi_o)$$

est de degré $-n$ en ξ et

(116) $$\omega(\psi)(\xi;u) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi_o^{n-1}} (\psi(\xi)/\xi_o)\, \vartheta(\xi) \wedge \pi(u)$$

est de degré zéro en ξ, ce qui fait que cette forme est bien définie sur $\overset{*}{\complement}K$ privé de ses points à l'infini. En ce qui concerne l'infini, faisant par exemple $\xi_1 = 1$ après choix d'un système de coordonnées, on voit que $\psi(\xi)/\xi_o$, puisque ψ s'annule à l'infini, est holomorphe au voisinage de tout point à l'infini de $\overset{*}{\complement}K$ tel que $\xi_1 \neq 0$. Il en est de même pour toutes les autres cartes obtenues à partir du système de coordonnées. Donc

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi_o^{n-1}} \left(\frac{1}{\xi_o}\, \psi(\xi)\, \vartheta'(\xi)\right)$$

est une forme différentielle holomorphe définie sur $\overset{*}{\complement}K$, et l'intégration indiquée en (115) est possible.

La fonction f étant choisie, montrons que l'intégrale ne dépend pas du choix de ω. Pour cela il suffit de vérifier que si $\bar{\omega}' \subset \omega$,

(117) $$\int_{\Sigma(\omega')} f(u).\omega(\psi)(\xi,u) = \int_{\Sigma(\omega)} f(u).\omega(\psi)(\xi,u) \;.$$

Pour cela il suffit, grâce au théorème de Stokes de vérifier que $\Sigma(\omega')-\Sigma(\omega)$ est le bord d'une variété sur laquelle $f(u).\omega(\psi)(\xi,u)$ est une forme fermée.

Nous considérons un point M_o intérieur à ω'. Si M est un point sur la frontière de ω nous considérons la demi-droite (réelle !) issue de M_o et passant par M, qui rencontre la frontière de ω' en un seul point M'.

Si ξ_M désigne une équation du plan tangent complexe en M à $\Sigma(\omega)$ et $\xi_{M'}$ une équation du plan tangent complexe en M' à $\Sigma(\omega')$, au point

(118) $$tM + (1-t)M' \qquad 0 < t < 1$$

la valeur de ξ_M est égale à $(1-t).\xi_M(M')$ et celle de $\xi_{M'}$ est égale à $t.\xi_{M'}(M)$, donc posant :

(119) $$\frac{t\xi_M}{\xi_M(M')} - (1-t)\frac{\xi_{M'}}{\xi_{M'}(M)} = \xi_{M(t)}$$

l'hyperplan d'équation

(120) $$\xi_{M(t)}(z) = 0$$

passe par $M(t)$.

Montrons que cet hyperplan complexe ne rencontre pas K. Pour cela désignons par Ξ_M une équation réelle de l'hyperplan réel tangent à $\Sigma(\omega)$ en M et par $\Xi_{M'}$ celle de l'hyperplan réel correspondant en M' ; alors posant :

(121) $$\Xi_{M(t)} = \left(\frac{t\Xi_M}{\Xi_M(M')} - (1-t)\frac{\Xi_{M'}}{\Xi_{M'}(M)}\right)$$

l'hyperplan réel d'équation. $\Xi_{M(t)}(z) = 0$ contient l'hyperplan complexe $\bar{\xi}_{M(t)}$ défini par $\xi_{M(t)}$. Il faut voir que cet hyperplan ne contient pas de points de ω'. Mais :

(122) $$-(1-t)\frac{\Xi_{M'}(M)}{\Xi_{M'}(M)} < 0$$

donc :

(123) $$\inf_{z\in K} \left(-(1-t)\frac{\Xi_{M'}(z)}{\Xi_{M'}(M)}\right) > 0 .$$

De même :

(124) $$t\,\frac{\Xi_M(M')}{\Xi_M(M')} > 0$$

donc

(125) $$\left(\inf_{z\in K} \frac{t\Xi_M(z)}{\Xi_M(M')}\right) > 0$$

d'où :

(126) $$\inf_{z\in K} \Xi_{M(t)}(z) > 0 .$$

Il est clair que (M,t) donne au voisinage de chaque point où $t \neq 0$ une carte du lieu des points $(M(t), \bar{\xi}_{M(t)})$ qui forme une variété $\Sigma(\omega,\omega')$ de bord $\Sigma(\omega') - \Sigma(\omega)$. Maintenant sur $\Sigma(\omega,\omega')$ calculons

(127) $$d(f(u).\omega(\psi)(\xi;u)) = d'_u f(u) \wedge \omega(\psi)(\xi;u)$$

$$+ f(u)d'_\xi\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi_o^{n-1}}(\psi/\xi_o)\right)\vartheta(\xi) \wedge \pi(u) + f(u).\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi_o^{n-1}}(\psi/\xi_o)d'\vartheta(\xi)\wedge\pi($$

Le premier terme est nul car $d'f \wedge \pi(u) = 0$. De la relation $\xi.u = 0$ on déduit :

(128) $$d'\xi \wedge \pi(u) = 0$$

d'où la nullité du second et du troisième terme. Ceci montre l'égalité (117).

En conséquence $T_\psi(f)$ ne dépend que de $\bar{f}$. Enfin, ω étant donnée, si $\bar{\omega}' \subset \omega$, ω' convexe à frontière régulière,

$$\int_{\Sigma(\omega')} f(u).\omega(\psi)(\xi,u) = T_\psi(\bar{f})$$

est manifestement linéaire continue sur $H(\omega)$. Donc T_ψ est une forme linéaire et continue sur $H(K)$. C.q.f.d.

Posons, des coordonnées étant choisies, $c_\alpha = T(z^\alpha)$ si $T \in H'(K)$. On a :

(129) $$\frac{\xi_o}{\xi_o + \xi_1 z_1 + \ldots + \xi_n z_n} = \xi_o . \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left(\frac{\xi z}{\xi_o}\right)^\alpha$$

pourvu que la série converge ce qui a lieu uniformément dans un voisinage de K si $\sup_j |\xi_j/\xi_o|$ est assez petit. Dans ce cas la série converge aussi dans l'espace $H(K)$. D'où :

$$\Phi_T(\bar{\xi}) = \xi_o \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \frac{\xi^\alpha}{\xi_o^{|\alpha|}} . c_\alpha$$

pourvu que $\bar{\xi}$ soit assez près de l'origine de V'. On fait alors $\xi_o = 1$ et Φ_T s'exprime dans les coordonnées duales comme suit :

(130) $$\Phi_T(u) = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} c_\alpha . u^\alpha .$$

Soit $\psi \in P_o(\overset{*}{\complement} K)$. Considérons, pour calculer les moments c_α de T_ψ une sphère Ω de centre l'origine et de rayon R assez grand pour contenir K dans son intérieur. Pour tout $\bar{\xi} \in \overset{*}{\complement}\Omega$ la série de Taylor à l'origine de ψ converge, ce uniformément sur $\overset{*}{\complement}\Omega$. Si on a :

(131) $$\psi(u) = \sum_\alpha a_\alpha . u^\alpha$$

il vient :

$$(132)\qquad (-1)^{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_o^{n-1}} (\psi(\xi)/\xi_o) = \sum_\alpha (|\alpha| + 1)\ldots(|\alpha| + n-1) a_\alpha \frac{\xi^\alpha}{\xi_o^{|\alpha|+n}} \,.$$

L'hyperplan tangent au point $(z_1,\ldots, z_n)$ à la sphère Ω de rayon R et d'équation :

$$(133)\qquad -R^2 + \sum_{j=1}^{n} z_j.\bar{z}_j = 0$$

a pour coordonnées projectives :

$$(134)\qquad \xi_o = -R^2, \quad \xi_j = \bar{z}_j \,.$$

On a donc à calculer :

$$(135)\qquad c_\beta = \frac{(-1)^{n-1}}{(2i\pi)^n} \int_{\partial(\Sigma z_i.\bar{z}_i<R^2)} z^\beta \sum_\alpha (|\alpha|+1)\ldots(|\alpha|+n-1) a_\alpha \frac{\bar{z}^\alpha}{(-R^2)^{(|\alpha|+n)}} \ldots$$

$$\ldots \left(\sum_{h=1}^{n} (-1)^h \bar{z}_h \, d\bar{z}_1 \ldots \wedge \widehat{d\bar{z}_h} \wedge\ldots\wedge d\bar{z}_n\right) \wedge \pi(z) \,.$$

Vu la convergence absolue uniforme de la série il suffit d'évaluer chaque terme :

$$(136)\qquad \lambda_{\alpha,\beta} = \int_{\partial(\Sigma z_i.\bar{z}_i<R^2)} \frac{(|\alpha|+1)\ldots(|\alpha|+n-1)}{(-R^2)^{(|\alpha|+n)}} z^\beta \, \bar{z}^\alpha \, \vartheta(\bar{z}) \wedge \pi(z) \,.$$

On peut appliquer la formule de Stokes le bord étant orienté comme il faut et faire $R = 1$ en vertu de la formule (117) d'où :

$$(137)\qquad \lambda_{\alpha,\beta} = \int_{\sum_{j=1}^{n} z_j.\bar{z}_j<1} \frac{(|\alpha|+1)\ldots(|\alpha|+n-1)}{(-1)^{(|\alpha|+n)}} d(z^\beta \, \bar{z}^\alpha \vartheta(\bar{z}) \wedge \pi(z))$$

$$(138) \quad -\lambda_{\alpha,\beta} = \int_{\sum_{j=1}^{n} z_j.\bar{z}_j < 1} \frac{(|\alpha|+1)\ldots(|\alpha|+n)}{(-1)^{|\alpha|+n}} z^\beta \, \bar{z}^\alpha \, \pi(\bar{z}) \wedge \pi(z) \; .$$

Ceci donne, avec nos conventions d'orientation :

$$(139) \quad \begin{cases} \lambda_{\alpha,\beta} = 0 & \text{si} \quad \beta = \alpha \\ \\ \lambda_{\alpha,\alpha} = -(2i)^n \dfrac{(|\alpha|+1)\ldots(|\alpha|+n)}{(-1)^{|\alpha|+n}} \pi^n \dfrac{\alpha!}{(|\alpha|+n)!} \end{cases}$$

d'où

$$(135)' \quad c_\beta = (-1)^{|\beta|} \frac{\beta!}{|\beta|!} \cdot a_\beta$$

d'où

$$\Phi_{T_\Psi}(u) = \sum_\alpha a_\alpha . u^\alpha$$

au voisinage de $u = 0$ soit :

$$(140) \quad \Phi_{T_\Psi} = \Psi \; .$$

La formule (115) réalise donc l'inversion de l'application définie par la formule (112). Il est aisé de vérifier les assertions topologiques du théorème 5 à partir de (112) et (115). Je ne le ferai pas. La démonstration du théorème 5 est achevée. Les calculs qui précèdent sont inspirés par ceux effectués par M. Jean Leray pour la démonstration de la formule de Cauchy-Fantappié [11].

10. La transformation de Laplace projective

Commençons par le cas d'une variable. Soit $F(\zeta)$ une fonction entière de type exponentiel. Si D est une demi-droite issue de l'origine on considère l'intégrale de Laplace :

(141)
$$\int_D F(\zeta).e^{-\zeta\, p}.d\zeta \quad .$$

On introduit la fonction $\wedge_F(\zeta) = \overline{\lim}_{r \to +\infty} r^{-1}.\log |F(r.\zeta)|$. Il est classique que cette fonction est une fonction convexe, positivement homogène, [2], c'est-à-dire que

$$\wedge_F(t.\zeta) = t \wedge_F(\zeta) \qquad \text{si} \quad t \geqslant 0$$

$$\wedge_F(z_1 + z_2) \leqslant \wedge_F(z_1) + \wedge_F(z_2) \ .$$

L'intégrale (141) converge absolument pourvu que :

(142)
$$\operatorname{Re}(\zeta.p) > \wedge_F(\zeta) \qquad \text{si} \quad \zeta \in D, \ \ \zeta \neq 0 \ ,$$

et uniformément absolument si $\operatorname{Re}(\zeta.p) > \wedge_F(\zeta) + \varepsilon\,|\zeta|$ pour un $\varepsilon > 0$. Nous noterons $\mathcal{P}_D$ le demi-espace de convergence défini par la solution (142).

Il est alors connu, [2], que $\bigcup_D \mathcal{P}_D$ est le complémentaire d'un convexe compact Γ, dit diagramme indicateur de croissance de F, ce compact étant caractérisé par la fonction

(143)
$$h_\Gamma(z) = \sup_{p \in \Gamma} (\operatorname{Re}(p.z)) \ (p \in \Gamma \Leftrightarrow \operatorname{Re}(p.z) \leqslant h_p(z) \ \text{ pour tout } z\ ) \ .$$

Si $\mathcal{P}_{D_1} \cap \mathcal{P}_{D_2} \neq \emptyset$ on a : $\Phi_{D_1} - \Phi_{D_2} = 0$ dans $\mathcal{P}_{D_1} \cap \mathcal{P}_{D_2}$ donc les Φ_D

se prolongent analytiquement les uns dans les autres et définissent dans $\complement\Gamma$ une fonction holomorphe $L_F(p)$ dite transformée de Laplace de F.

La fonction $L_F(p)$ tend vers zéro à l'infini.

Introduisant la sphère de Riemann, qui est le compactifié projectif de $\mathbb{C}$, cette fonction apparaît comme la restriction à $\complement K$ d'une fonction holomorphe dans l'ouvert $\complement K \cup (\infty)$ et nulle à l'infini. Mais les points sont des hyperplans, donc les points de $\complement K$ sont ceux de $\complement \overset{*}{K}$ différents de 0. L'identification est effectuée par

$$p \to (\xi_o, \xi_1) \qquad \xi_o + \xi_1 p = 0 ,$$

on a $p = -\dfrac{\xi_o}{\xi_1}$. Il apparaît l'intégrale :

(144) $$\int_D F(\zeta) e^{\zeta \frac{\xi_o}{\xi_1}} . d\zeta$$

qu'on va transformer, par le changement de variable :

(145) $$\zeta/\xi_1 = -u$$

en :

(146) $$\int_{D'} F(-\xi_1 . u)/e^{-\xi_o . u} . \xi_1 \, du$$

(147) $$D' = \bar{\xi}_1 D .$$

Nous adoptons par raison de simplicité l'intégrale suivante :

(148) $$\mathcal{L}_{D,F}(\bar{\xi}) = \xi_o \int_D F(-\xi_1 . u) . e^{-\xi_o . u} . d\, u \quad .$$

Une telle intégrale converge absolument dans l'ouvert $\Omega_{\xi_o, D}$ défini par la relation :

$$\wedge(-\xi_1.u) < \mathrm{Re}(\xi_o.u)$$

où $u \neq 0$ appartient à D. Mais $\bigcup_D \Omega_{\xi_o,D} = \overset{*}{\complement}\Gamma$ tout point de $\overset{*}{\complement}\Gamma$ est un point de convergence absolue d'une des intégrales (148). On a le :

LEMME 18. $\overset{*}{\complement}\Gamma$ <u>est l'intérieur de l'ensemble des points de convergence absolue d'une des intégrales</u> (148).

<u>Démonstration</u>. En effet, supposons que cette intégrale converge absolument pour (D, ξ_1, ξ_o) et supposons $\xi_o \neq 0$, alors par le changement de variable inverse de (145), et le changement de demi-droite d'intégration inverse de (147) il en résulte que l'intégrale

$$\int_{\xi_1.D} F(\zeta).e^{\zeta.\xi_o/\xi_1}.d\zeta$$

converge absolument donc que le point ξ_o/ξ_1 appartient à $\overline{\complement\Gamma}$. Réciproquement tout point de $\complement\Gamma$ se transforme par (145) et (147) en un point de convergence absolue d'une intégrale (148). Si $\xi_o = 0$ l'intégrale est identiquement nulle, mais le point à l'infini est toujours intérieur dans $\overset{*}{\complement}\Gamma$. C.q.f.d.

En vertu de ce lemme nous disons que $\overset{*}{\complement}\Gamma$ est le <u>domaine naturel de convergence</u> d'une intégrale du type (148) et nous écrivons :

$$\mathcal{L}_F(\xi) = \xi_o \int_0^\infty F(-\xi_1.u)e^{-\xi_o.u}.d\,u \tag{149}$$

pour tout point (ξ_o, ξ_1) du domaine de convergence ; le symbole $\int_0^\infty$ introduit rappelle qu'on intègre sur une chaîne arbitraire de bord

$\{\infty\} - \{0\}$ (mais l'égalité n'a lieu que pour un choix convenable de la chaîne).

$\mathcal{L}_F$ est dite transformée de Laplace projective de F.

La formule (149) s'étend immédiatement comme suit à un nombre fini quelconque de variables complexes (et même infini). Soit $\bar{\xi} = (\xi_0, \xi)$ un point de l'espace projectif $P(V')$. L'application $(u' \to F(u'))$ étant une fonction entière de type exponentiel nous considérons l'intégrale prise au sens (149) dans le plan complexe des t

$$(150) \qquad \mathcal{L}_F(\bar{\xi}) = \xi_0 \int_0^{\infty} F(-\xi_1 . t) e^{-\xi_0 t} . dt .$$

Nous appelons domaine naturel de convergence dans $P(V')$ pour cette intégrale l'intérieur dans $P(V')$ de l'ensemble des points de convergence naturelle des intégrales

$$\xi_0 \int_D F(-\xi_1 . t) e^{-\xi_0 t} . dt .$$

Si Γ est un convexe compact de V espace vectoriel complexe de dimension finie n, on pose $h_\Gamma(u) = \sup_{z \in \Gamma} \operatorname{Re} < z,u >$. La fonction $(u \to h_\Gamma(u))$ est positivement homogène convexe, et caractérise Γ, c'est-à-dire que l'ensemble des $z \in \Gamma$ tels que $\operatorname{Re} < z,u > \leqslant h_\Gamma(u)$ quel que soit u est juste Γ.

LEMME 19. Soit F entière définie sur V' et telle que pour tout ε, $\varepsilon > 0$, $|F(u)| \leqslant K(\varepsilon) \exp (H_\Gamma(u) + \varepsilon \|u\|)$ où $\|u\|$ est une norme arbitraire sur V'. Le domaine naturel de convergence de son intégrale de Laplace projective (150) contient $\overset{*}{\complement}\Gamma$.

Démonstration. Si $\bar{\xi} = \infty$ l'intégrale converge. Soit maintenant $\bar{\xi} \in \overset{*}{\complement}\Gamma$, mais $\bar{\xi} \neq \infty$. On peut prendre comme équation pour $\bar{\xi}$ l'équation

$$\bar{\xi} = \{z \mid < z,u > - 1 = 0\} .$$

On considère l'application de V' dans $\mathbb{C}$ définie par $z \to < z,u >$. L'image de Γ est un compact G de $\mathbb{C}$ et l'image de $\bar{\xi}$ est le point 1.

Soit D_o une demi-droite telle que, pour tout v de D_o on ait $h_G(v) < \mathrm{Re}(v)$. Cette demi-droite existe puisque $1 \notin G$. L'intégrale :

(151) $$\int_{D_o} F(u.t)e^{-t}.dt$$

est absolument convergente car :

(152) $$|F(u.t)| \leqslant K(\varepsilon) \exp (h_\Gamma(u.t) + \varepsilon \|u\|)$$

et $h_\Gamma(u.t) = h_G(t)$. On voit donc que :

(153) $$|F(u.t)e^{-t}.dt| \leqslant \exp (-\eta\ |t|)$$

où $0 < \eta < (\mathrm{Re}\ t - h_G(t))$ si $t \in D_o$. Donc $\bar{\xi}$ est un point de convergence absolue. L'ensemble ouvert $\overset{*}{\complement}\Gamma$ est donc formé de points de convergence absolue. C.q.f.d.

LEMME 20. <u>Des coordonnées étant choisies, pour chaque</u> j, $\frac{\partial F}{\partial u_j}$ <u>satisfait à des majorations, pour tout</u> $\varepsilon > 0$

(154) $$\left|\frac{\partial F}{\partial u_j}\right| \leqslant K(\varepsilon).A. \exp (h_\Gamma(u) + \varepsilon \|u\|)$$

où

$$\log A = \sup_{\|u_j\| \leqslant 1} |h_\Gamma(u)| + \varepsilon(\sup_{|u_j| \leqslant 1} \|u\|) .$$

Démonstration. Par l'intégrale de Cauchy on a :

(155) $$\frac{\partial F}{\partial u_j} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\{|\zeta_j|<1\}} \frac{F(u+\zeta_j)}{\zeta_j} d\,\zeta_j$$

d'où

$$\left|\frac{\partial F}{\partial u_j}\right| \leqslant \sup_{|\zeta_j|=1} |F(u_1, \ldots, u_j + \zeta_j, u_{j+1}, \ldots, u_n)|$$

$$\leqslant K(\varepsilon).\exp(\sup_{|\zeta_j|=1} h_\Gamma(\zeta)).(\exp(\varepsilon \sup_{|\zeta_j|=1} \|\zeta\|)).\exp(h_\Gamma(u) + \varepsilon\|u\|)$$

C.q.f.d.

LEMME 21. Dans le domaine naturel de convergence de l'intégrale (150) la fonction $\mathcal{L}_F$ est holomorphe et au voisinage de l'infini coïncide avec l'indicatrice projective d'un élément T de $(E_0^\infty(V))'$ admettant $F = \mathcal{F}T$ comme transformée de Fourier-Borel.

Démonstration. Je ne démontrerai pas la première partie de ce lemme, me contentant de faire remarquer que les théorèmes usuels sur l'intégration terme à terme d'une série, sur la dérivation sous le signe somme, s'étendent aux notions d'intégrales introduites en (149), (150). Mais je n'ai pas l'intention de développer cette question. Il me suffit pour la suite de constater que l'inégalité (154) montre trivialement la convergence de chacune des intégrales

$$\int_D \frac{\partial F}{\partial u_j} (-u.t)e^{-t}.dt$$

quand $\int_D F(-u\ t)e^{-t}.dt$ converge et que $u \in \complement \overset{*}{\Gamma}$. Donc il est au moins sûr que $\mathcal{L}_F$ est holomorphe dans $\complement \overset{*}{\Gamma}$.

Maintenant, des coordonnées étant choisies si $F(u) = \sum_\alpha \frac{a_\alpha}{\alpha!} . u^\alpha$

(156) $$F(-u.t) = \sum_n \Big(\sum_{|\alpha|=n} \frac{a_\alpha}{\alpha!} . u^\alpha \Big)(-1)^n . t^n .$$

Ceci donne, si u est assez petit en sorte que :

$$|F(-u.t)| \leqslant K.\exp A\,|t| \qquad \text{si} \quad A < 1$$

(157) $$\mathcal{L}_F(u) = \int_0^{+\infty} \sum_n \Big(\sum_{|\alpha|=n} \frac{a_\alpha . u^\alpha}{\alpha!} \Big)(-1)^n . t^n . e^{-t} . dt$$

$$= \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} u^\alpha$$

et après homogénéisation

(158) $$\mathcal{L}_F(\bar{\xi}) = \xi_o . \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \Big(\frac{\xi}{\xi_o}\Big)^\alpha .$$

Or, si T est un élément de $(E_o^\infty(V))'$ dont la transformée de Fourier-Borel est F, et si c_α est le α-ième moment de T, d'après la formule (58)

$$\mathcal{F}T = \sum \frac{c_\alpha . u^\alpha}{\alpha!}$$

donc (157) et (130) coïncident. C.q.f.d.

11. Théorème de l'indicatrice de croissance

La conjonction du théorème 5 et des lemmes 19 à 21 permet d'énoncer le

THÉORÈME 6 (de l'indicatrice de croissance, ou du diagramme conjugué) [2] ; [15]. Si F définie sur V' satisfait à une majoration

$$|F(u)| \leqslant K(\varepsilon) \exp\left(h_\Gamma(u) + \varepsilon \,\|u\|\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, où Γ est un convexe compact de V, elle est la transformée de Fourier-Borel d'un élément T du dual de $H(\Gamma)$.

On a la représentation de Pólya : $\mathcal{L}_F(\bar{\xi})$ étant donnée par (150) dans $\overset{*}{\complement}\Gamma$, on a [14]

$$(159) \qquad F(u) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma(\omega)} \exp < z,u > \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_o^{n-1}} (\mathcal{L}_F(\xi)/\xi_o\right).\omega(z,\xi)$$

où ω est un voisinage convexe arbitraire à frontière régulière de Γ.

LEMME 22 [15]. Si F est la transformée de Fourier-Borel de T élément de $H'(\Gamma)$ et si G est entière de type exponentiel zéro divisant F, F/G est aussi la transformée de Fourier-Borel d'un élément de $H'(\Gamma)$.

Démonstration. Il serait possible de se ramener au corollaire 1 du théorème 2. Mais il est agréable de constater que le lemme 15 fournit directement le résultat. D'abord on peut toujours, grâce à une translation, supposer que $F/G(0) \neq 0$ si F/G n'est pas identiquement nulle, cas trivial. Ensuite :

$$(160) \qquad |F(u)| \leqslant K(\varepsilon').\ \exp\ (h_\Gamma(u) + \varepsilon'\|u\|)$$

$$|G(u)| \leqslant \exp\ \varepsilon''\ \|u\|$$

pour $\|u\|$ assez grand entraîne :

$$(161) \qquad \log\ |F(u)| \leqslant L(\varepsilon') + h_\Gamma(u) + \varepsilon'\ \|u\|$$

$$\log\ |G(u)| \leqslant \varepsilon''.\|u\|$$

pour $\|u\|$ assez grand.

On reprend les calculs du théorème 2 et on obtient :

$$(162) \quad \log\ |(F/G)(u)| \leqslant M(\log\ |F|;z,\lambda|z|) - M(\log\ |G|;z,\lambda|z|)$$

soit, en tenant compte de :

(163) $h_\Gamma(z + \lambda u) \leqslant h_\Gamma(z) + \lambda . \sup_{|u|=\|z\|} |h_\Gamma(u)| \leqslant h_\Gamma(z) + \lambda . M . \|z\|$

$$\|z + \lambda z\| \leqslant (1+\lambda) \|z\|$$

et du lemme 15 :

(164) $\log |F/G(u)| \leqslant L(\varepsilon) + h_\Gamma(u) + \lambda . M \|u\| + \varepsilon'(1+\lambda) \|u\|$

$$+ \left(\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 - 1\right)(1+\lambda) . \varepsilon'' . \|u\| - \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 . \log |G(0)| .$$

Soit ε donné, on prend $\varepsilon' < \varepsilon/4$ puis on peut choisir λ en sorte que

(165) $\lambda . M + \varepsilon'(1+\lambda) < \varepsilon/4$.

Ensuite on prend ε'' en sorte que

$$\left(\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 - 1\right)(1+\lambda) . \varepsilon'' < \varepsilon/4$$

d'où

(166) $\log |F/G(u)| \leqslant N(\varepsilon) + h_\Gamma(u) + \varepsilon\|u\|$

pour $\|u\|$ assez grand. Il suffit alors d'appliquer le théorème 6. C.q.f.d.

THÉORÈME 7. Soit Ω un ouvert de V (resp. un compact convexe de V), et D un opérateur différentiel d'ordre infini (relativement à l'ordre ∞) c'est-à-dire tel que $\mathcal{F}D$ soit de type exponentiel zéro.

On a : a) $\check{D}\, H(\Omega) = H(\Omega)$

b) toute solution de $\check{D} f = 0$ dans Ω est limite des solutions exponentielles polynômes de l'équation [16].

Démonstration. Grâce au lemme 22 on peut appliquer les raisonnements au théorème 4. C.q.f.d.

Remarquons, en fin de compte, que ces transformations permettent de caractériser les régularisées semi-continues supérieurement des indicatrices de croissance des fonctions entières de type exponentiel. Je reviendrai ailleurs sur cette question à l'aide d'une autre méthode utilisant la cohomologie à croissance.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. AVANISSIAN, Fonctions pluri-sousharmoniques, différences de deux fonctions pluri-sousharmoniques de type exponentiel, C.-R. Ac. Sc. Paris, t252 (1961), p. 499-500.

[2] R.P. BOAS, Entire functions, New-York Academic Press (1954), X + p. 276.

[3] N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, chap. III à V, Act. Scient. et Ind. 1229, Hermann, Paris (1964).

[4] H. CARTAN, Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, Bull. Soc. Math. France, 78 (1950), p. 29-64.

[5] L. EHRENPREIS, A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications, Proc. Internat. Sympos. on linear Spaces, Academic Press Jerusalem, Pergamon Oxford (1961), p. 161-174.

[6] L. EHRENPREIS, Mean periodic functions. Varieties whose annihilator ideals are principal, Amer. Journal of Math., vol. 77(1955), p. 293-328.

[7] A. GROTHENDIECK, Sur les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{DF})$, Summa Brasil. Math. t.3 (1954), p. 57-123.

[8] A. GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, (1955) (Mem. Amer. Math. Soc. 16) p. 191 + 140.

[9] L. HÖRMANDER, L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator, Acta Mathematica 113 (1965), p. 89-152.

[10] P. LELONG, Fonctions entières (n-variables) et fonctions pluri-sousharmoniques d'ordre fini dans $\mathbb{C}^n$, Journal d'Anal. Math. de Jérusalem XII (1964), p. 365-407.

[11] J. LERAY, Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (problème de Cauchy III), Bull. Soc. Math. France, 87(1959), p. 81-180.

[12] J. LERAY, Un prolongement de la transformation de Laplace qui transforme la solution unitaire d'un opérateur hyperbolique en sa solution élémentaire (problème de Cauchy IV), Bull. Soc. Math. France, 90(1962), p. 39-156.

[13] B. MALGRANGE, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, t.6 (1955-56), p. 271-355.

[14] A. MARTINEAU, Indicatrices des fonctionnelles analytiques et inversion de la transformation de Fourier-Borel par la transformation de Laplace, C.-R. Acad. Sci. Paris (1962), t. 255, p. 2888-2890.

[15] A. MARTINEAU, Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, Journal d'Anal. Math. de Jérusalem, vol. XI(1963), p. 1-164.

[16] A. MARTINEAU, Equations différentielles d'ordre infini, 2ème Colloque sur l'analyse fonctionnelle, Liège (1964), C.B.R.M. Gauthiers-Villars, Paris, Librairie Universitaire Louvain, p. 37-47.

[17] A. MARTINEAU, Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes, Math. Annalen, t. 163 (1966), p. 62-88.

[18] G. PÓLYA, Untersuchungen über lücken und Singularitäten von potenzreihen, Math. Z. 29 (1929), p. 549-640.

[19] L. SCHWARTZ, Théorie générale des fonctions moyennes périodiques, Ann. of Math. 48 (1947), p. 857-929.

[20] L. SCHWARTZ, Séminaire 53-54. Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications. Secrétariat mathématique. Paris (1954).

[21] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions à valeurs vectorielles II. Annales de l'Institut Fourier, VIII (1958), p. 1-209.