SÉMINAIRE JEAN LERAY.
SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

L. A. RUBEL

Espaces vectoriels des fonctions entières et équations différentielles d'ordre infini

Séminaire Jean Leray, nº 2 (1965-1966), p. 34-48
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1965-1966___2_34_0>

ESPACES VECTORIELS DES FONCTIONS ENTIÈRES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE INFINI

par

L.A. RUBEL
(Université de l'Illinois)

1. Introduction.

Nous exposons ici la thèse de M.B.A. Taylor. Nous considérons l'équation différentielle

$$F(D)f = g \ , \quad D = \frac{d}{dz} \tag{1}$$

où $F(D)$ est un opérateur différentiel avec coefficients constants, peut-être d'ordre infini. Ici F, f, g appartiennent à des espaces appropriés de fonctions entières. Par exemple, si $F(z) = e^z - 1$, alors l'équation (1) devient l'équation des différences, $f(z+1) - f(z) = g(z)$. Nous considérons ici deux questions :

1) toute solution f de l'équation homogène $F(D)f = 0$ est-elle une combinaison linéaire des solutions exponentielles ?

2) étant donné F et g, existe-t-il au moins une solution f de l'équation $F(D)f = g$?

Ces questions ont été étudiées par beaucoup de mathématiciens ; par exemple Dixon, Ehrenpreis, Guichard, Malgrange, Martineau, Muggli, Ritt, H.S. Shapiro, L. Schwartz, Sikkema.

Nous allons voir que la réponse est affirmative si des conditions convenables sont satisfaites par des espaces de fonctions entières.

2. Soit C_0 l'espace des fonctions continues complexes sur le plan complexe qui tendent vers zéro à l'infini. Soit C_0^+ l'ensemble des fonctions non-négatives dans C_0, et soit C_{00} l'ensemble des fonctions de support compact dans C_0 ; C_{00}^+ est l'ensemble de fonctions non-négatives dans C_{00}. Un "ensemble de poids" est un ensemble K de fonctions k dans C_0^+ qui satisfont aux conditions suivantes :

1) Si $k \in K$ et $c > 0$ alors $ck \in K$.

Si $k' \in C_0^+$, $k' \leq k$, alors $k' \in K$.

Si $k, k' \in K$ alors $\max(k,k') \in K$.

2) $K \supseteq C_{00}^+$.

3) Pour chaque $k \in K$, il existe un k' dans K tel que $k'(z) = k'(|z|)$ et $k'(z) \geqslant k(z)$.

4) Si $k(z) \in K$ et $c \in \underline{\underline{C}}$ alors $k(cz) \in K$.

5) Si $k \in K$ et $c \in \underline{\underline{C}}$ alors $k(z)\exp(cz) \in C_0$.

<u>Définition</u>.- Soit $E(K)$ l'espace de toutes les fonctions f entières telles que $kf \in C_0$ pour chaque $k \in K$. $E(K)$ a une topologie localement convexe donnée par des seminormes

$$\|f\|_k = \sup |f(z)k(z)|$$

<u>Remarque</u>.- La condition $kf \in C_0$ pour chaque $k \in K$ est équivalente, pour des fonctions entières, à la condition : kf est borné pour chaque $k \in K$.

EXEMPLE 1. $K = C_{00}^+$. Alors $E(K)$ est l'espace de toutes les fonctions entières pour la topologie de convergence uniforme sur tout ensemble compact.

EXEMPLE 2.- K est l'ensemble de toutes les fonctions dans le plan, de décroissance à l'infini plus rapide que chaque exponentielle, c'est-à-dire :

$k \in K$ si et seulement si $k(z) \exp(cz) \in C_0$ pour tout $c \in \underline{\underline{C}}$. Dans ce cas, $E(K) = E_0$, l'espace de toutes les fonctions entières de type exponentiel dans une topologie considérée par Ehrenpreis et Malgrange.

Nous allons voir que E et E_0 sont des espaces de Montel duals, et que la topologie sur E_0 est la topologie de Mackey par rapport à cette dualité.

DÉFINITION. Soit $M(K)$ l'espace vectoriel de toutes les mesures Boreliennes complexes sur $\underline{\underline{C}}$ de la forme

$$d\nu(t) = k(t)d\mu(t)$$

pour $k \in K$ et μ mesure Borelienne complexe bornée sur $\underline{\underline{C}}$.

DÉFINITION.- Pour $\nu \in M(K)$ soit $\hat{\nu}$, la transformée de Laplace de ν

$$\hat{\nu}(z) = \int \exp(zt)d\nu(t)$$

Il est facile de voir que $\hat{\nu}$ est une fonction entière.

DÉFINITION.- Soit $\hat{M}(K)$ l'ensemble de toutes les fonctions $\hat{\nu}$, $\nu \in M(K)$.

PROPOSITION.- $\hat{M}(K)$ est l'espace dual de $E(K)$, où la dualité $< E(K), \hat{M}(K) >$ est donnée par

$$< f, \hat{\nu} > = \int f d\nu = (\hat{\nu}(D)f)(0) \ , \qquad D = \frac{d}{dz} \ ,$$

c'est-à-dire que si $\hat{\nu}(z) = \Sigma A_n z^n$ alors $< f, \hat{\nu} > = \Sigma A_n f^{(n)}(0)$. La série est absolument convergente.

Alors, l'espace dual de $E(K)$ est encore un espace de fonctions entières ; mais il est difficile de travailler dans $\hat{M}(K)$ parce que la caractérisation des fonctions dans $\hat{M}(K)$ n'est pas directe, et parce que les topologies naturelles sur $\hat{M}(K)$ ne sont pas données sous une forme suffisamment concrète.

Nous allons résoudre ces difficultés.

PROPOSITION.- Soit $F(z) = \Sigma b_n z^n$ une fonction entière. Alors $F \in \hat{M}(K)$ si et seulement si il existe une fonction $k \in K$ telle que

$$n!|b_n| \leq \sup t^n k(t).$$

Le "théorème de Wiener" pour $\hat{M}(K)$ s'ensuit.

COROLLAIRE.- Si $F \in \hat{M}(K)$ et si F n'a pas de zéros, alors $1/F \in \hat{M}(K)$.

COROLLAIRE.- $\hat{M}(K)$ est une algèbre.

Maintenant nous identifions les sous-ensembles équicontinus de $\hat{M}(K)$. Soit, pour $k \in K$,

$$B_k = \{F \in \hat{M}(K); F(z) = \int \exp(zt) k(t) d\mu(t),\ \|\mu\| \leq 1\} .$$

PROPOSITION.- Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $B \subseteq \hat{M}(K)$ et B est équicontinu

ii) il existe $k \in K$ tel que $B \subseteq B_k$

iii) il existe une fonction $G(z) \in \hat{M}(K)$, avec série de Taylor $G(z) = \Sigma b_n z^n$, telle que pour chaque $F \in B$, $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $|c_n| \leq b_n$.

COROLLAIRE.- Le produit $E_1 . E_2$ de deux sous-ensembles équicontinus de $\hat{M}(K)$ est encore équicontinu.

PROPOSITION.- Si une suite généralisée équicontinue de fonctions dans $\hat{M}(K)$ converge vers un ensemble dense dans $\underline{\underline{C}}$ alors elle converge dans la topologie faible $w(\hat{M}(K), E(K))$.

DÉFINITION.- $K^* = \{k^* \in C_0^+ : k(z)k^*(w) \exp zw$ est bornée pour chaque $k \in K\}$

PROPOSITION.- K^* est un ensemble de poids et $E(K^*)$ est toujours une algèbre, et $K \subseteq K^{**}$ et $K^* = K^{***}$.

DÉFINITION.- K est parfait si $K = K^{**}$.

PROPOSITION.- $\hat{M}(K)$ est un sous-espace dense de $E(K^*)$ et $\hat{M}(K^*)$ est un sous-espace dense de $E(K)$.

De plus, la topologie de Mackey $m(\hat{M}(K),E(K))$ et la topologie forte $s(\hat{M}(K),E(K))$ coïncident et sont plus fines que la topologie relative $\rho(\hat{M}(K),E(K^*))$ de $\hat{M}(K)$ comme sous-espace de $E(K^*)$.

Nous allons trouver

a) des conditions sur K telles que $\hat{M}(K) = E(K^*)$

b) des conditions sur K telles que $m = \rho$.

DÉFINITION.- K est hypo-convexe si étant donnée une fonction $\lambda(r)$ convexe en $\log r$ sur $[0,\infty[$ quelconque telle que

$$k(r) \exp \lambda(r) \in C_0 \quad \text{pour tout} \quad k \in K$$

alors il existe une fonction $\lambda_1 \geq \lambda$ convexe de r telle $k(r) \exp \lambda_1(r) \in C_0$ pour tout $k \in K$.

THÉORÈME. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\rho = m$

ii) ρ est une topologie admissible par rapport à la dualité entre $\hat{M}(K)$ et $E(K)$.

iii) $E(K) = \hat{M}(K^*)$

iv) K est hypo-convexe.

DÉFINITION. K a une base dénombrable s'il existe des fonctions $k_n \in K$, $n = 1,2,3,\dots$ telles que

i) $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \dots$

ii) étant donné k quelconque $\in K$, il existe un entier $n > 0$ tel que $k(z) = O(k_n(z))$.

DÉFINITION.- K est <u>déterminé par une suite</u> s'il existe des fonctions continues et non décroissantes $\varphi_n(r)$ sur $[0,\infty[$, $n = 1,2,3,\ldots$ telles que

i) $0 \leqslant \varphi_1(r) \leqslant \varphi_2(r) \leqslant \ldots$

ii) $K = \{k \in C_0^+ : k(z) \exp \varphi_n(|z|)$ est borné pour tout $n = 1,2,\ldots\}$

Par exemple, E a une base dénombrable et E_0 est déterminé par une suite.

THÉORÈME.- <u>Si</u> K <u>a une base dénombrable, alors</u> $E(K)$ <u>est métrisable et tonnelé</u>.

THÉORÈME.- <u>Si</u> K <u>est déterminé par une suite, alors</u> $E(K)$ <u>est tonnelé</u>.

THÉORÈME.- <u>Supposons que</u> K <u>est hypo-convexe</u>. <u>Alors, les conditions suivantes sont équivalentes</u>

i) $E(K)$ <u>est tonnelé</u>

ii) $\hat{M}(K)$ <u>est un espace de Montel pour la topologie</u> ρ

iii) $\hat{M}(K) = E(K^*)$.

Dans la terminologie de Ehrenpreis, $E(K)$ est analytiquement uniforme si et seulement si K est hypo-convexe et $E(K)$ est tonnelé.

3.- Voici un théorème qui donne tous les exemples classiques et beaucoup d'autres.

Nous considérons des fonctions Φ, Ψ, dites fonctions complémentaires de Young; c'est-à-dire qu'elles sont convexes, que $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$, et que $\Phi(z) = \int_0^z \varphi(t)dt$, $\Psi(z) = \int_0^z \psi(t)dt$ où φ et ψ sont des fonctions croissantes non bornées et $\varphi(\psi(t)) = \psi(\varphi(t)) = t$ pour tout t.

THÉORÈME. Soit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ des fonctions convexes, non décroissantes sur $[0,\infty[$ avec des dérivées premières continues, telles que $\varphi_n(0) = 0$ et

a) $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \varphi_3 \leqslant \ldots$

b) pour chaque $n > 0$, $\varphi_n(2r) = O(\varphi_{n+1}(r))$ quand $r \to \infty$

c) $\varphi_1(r)/r \to +\infty$ quand $r \to \infty$.

Soit K l'ensemble de toutes les fonctions continues et non-négatives $k(z)$ telles que $k(z) \exp \varphi_n(|z|)$ est bornée pour tout $n > 0$. Alors, K est un ensemble de poids et

i) K est déterminé par une suite et est hypo-convexe.

ii) K^* est l'ensemble de toutes les fonctions continues et non-négatives k^* telles qu'il existe un $n > 0$, tel que $k^*(z) = O[\exp(-\psi_n(|z|)]$, où ψ_n est la fonction complémentaire de Young de φ_n.

iii) K^* a une base dénombrable et est hyper-convexe (voir définition plus loin)

iv) K est parfait.

De plus

1) $E(K)$ est l'ensemble de toutes les fonctions entières f telles qu'il existe un n tel que

$$M(r,f) = O(\exp(\varphi_n(r))$$

2) $E(K^*)$ est l'ensemble de toutes les fonctions entières F telles que pour tout $n > 0$,

$$M(r,f) = O(\exp \psi_n(r))$$

3) $\hat{M}(K^*) = E(K)$ et $\hat{M}(K) = E(K^*)$.

4) $E(K)$ et $E(K^*)$ sont des espaces Montels duals. Par exemple, soit $1 < p \leqslant \infty$, $1 < p_1 < p_2 < \ldots$, $p_n \to p$. Soit $\varphi_n(r) = r^{p_n}$. Alors $E(K)$ est l'espace de toutes les fonctions entières d'ordre $< p$ et $E(K^*)$ est l'espace de toutes les fonctions entières d'ordre $< q$ ou $1/p + 1/q = 1$. Les autres cas qu'indique la table suivante sont semblables.

$E(K)$	$E(K^*)$
f de type exponentiel	f entière
$\log M(r,f) = o(r \log r)$	$\exists\, B > 0$ tel que $\log M(r,f) = O(e^{Br})$
$\log M(r,f) = o(r \log r)$	$\log \log M(r,f) = o(r)$
f d'ordre $\leqslant 1$	f d'ordre fini
f d'ordre $\leqslant p$ type fini $(p \geqslant 1)$	f d'ordre $\leqslant q$ type minimal, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
f d'ordre $\leqslant p$ $(p \geqslant 1)$	f d'ordre $\leqslant q$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

4.- Nous considérons maintenant des algèbres de fonctions entières, dites algèbres d'Hadamard.

DÉFINITION.- Un espace vectoriel topologique A de fonctions entières, qui est aussi une algèbre pour la multiplication en chaque point

$(fg)(z) = f(z)g(z)$ (on ne suppose pas que cette multiplication soit continue) est une algèbre d'Hadamard si

i) A contient tous les polynômes

ii) si $f \in A$, $f(a) = 0$, alors $f(z)/(z-a) \in A$

iii) étant donné $g \in A$, $g \not\equiv 0$, il existe une fonction $h \in A$ et des fonctions $g_n(z) = P_n(z)e_n(z)$, où P_n est un polynôme et e_n est une unité (c'est-à-dire que $1/e_n$ est entière), telles que $gh/g_n \in A$ et $\lim fgh/g_n = f$ pour tout $f \in A$. Par exemple, si $A = E_0$, l'espace des fonctions entières de type exponentiel, alors on peut choisir $h = 1$ et prendre pour g_n les produits partiels du produit d'Hadamard.

DÉFINITION.- Pour un idéal I dans A, nous définissons $Z(I)$ comme la suite des zéros (avec multiplicités) communs des fonctions dans I.

DÉFINITION.- Pour une suite Z de nombres complexes, avec multiplicités, nous désignons par $I(Z)$ l'idéal de toutes les fonctions f dans A telles que $f(z) = 0$ (avec multiplicité) pour chaque $z \in Z$.

THÉORÈME.- Dans une algèbre d'Hadamard, tout idéal fermé I satisfait à

$$I = I(Z(I)).$$

Pour la synthèse spectrale, il est utile de savoir si $\hat{M}(K)$, $w(\hat{M}(K), E(K))$ est une algèbre d'Hadamard.

THÉORÈME.- Si $E(K)$ est une algèbre, c'est une algèbre d'Hadamard.

Alors, $E(K^*)$ est toujours une algèbre d'Hadamard.

THÉORÈME.- Si K est hypo-convexe et si $E(K)$ est tonnelé, alors $\hat{M}(K), w$ est une algèbre d'Hadamard.

THÉORÈME.- Si K est parfait, alors $\hat{M}(K),w$ est une algèbre d'Hadamard.

DÉFINITION. K est hyper-convexe si, étant donné $k \in K$, il existe une fonction radiale $k' \in K$, $k' \geq k$, telle que $-\log k'(r)$ soit convexe et croissante lorsque $k'(r) \neq 0$.

THÉORÈME.- Si K est hyper-convexe, alors $\hat{M}(K),w$ est une algèbre d'Hadamard.

Ces résultats donnent des conditions élémentaires pour que $\hat{M}(K),w$ soit une algèbre d'Hadamard. Les démonstrations dépendent du théorème suivant qui est une généralisation aux fonctions d'ordre infini du théorème de factorisation d'Hadamard, et qui est démontré en utilisant une méthode de séries de Fourier, sans utiliser les produits de Weierstrass ou d'Hadamard.

THÉORÈME (Produit généralisé d'Hadamard). Supposons $\lambda(r)$ continue, non-décroissante, et positive sur $r \geq 0$. Soit g une fonction entière non constante, telle qu'il existe des constantes A, B telles que

$$\log M(r,g) < A\lambda(Br).$$

Alors, il existe des constantes C, D et des fonctions h, g_n entières, et des nombres $0 < R_1 < R_2 < \dots$ tels que

i) $g_n(z) = P_n(z)e_n(z)$, où e_n est une fonction entière sans zéros et où P_n est un polynôme dont les zéros sont les zéros de hg dans le disque $\{z : |z_n| \leq R_n\}$

ii) $\frac{g(z)h(z)}{g_n(z)} = 1$ uniformément sur tout ensemble compact

iii) $\log M(r,f) \leq C\lambda(Dr)$ si f est une des fonctions g, h, gh, gh/gn, g_n, P_n, e_n .

5. Nous considérons maintenant la question de la synthèse spectrale.

DÉFINITION.- Une variété dans $E(K)$ est un sous-espace fermé invariant par translation.

DÉFINITION.- Nous disons qu'on obtient la synthèse spectrale pour la variété V si V est la variété engendrée par les monômes exponentiels $z^j \exp \lambda z$ qui appartiennent à V. Observons que l'ensemble $V = \{f : F(D)f = 0\}$ est une variété, et notre question b) est la question de la synthèse spectrale pour cette variété V.

THÉORÈME (Ehrenpreis-Malgrange).- Si dans $\hat{M}(K)$, tout idéal fermé I satisfait à $I = I(Z(I))$, alors la synthèse spectrale est obtenue pour chaque variété dans $E(K)$.

Nous avons donc trouvé des conditions élémentaires sur K (qui sont vérifiées dans tous les cas classiques) pour obtenir la synthèse spectrale pour toute variété dans $E(K)$.

Nous n'avons pas trouvé d'espace $E(K)$ dans lequel la synthèse spectrale n'est pas obtenue.

6. Nous cherchons maintenant une représentation plus forte des fonctions dans les variétés comme sommes d'exponentielles. Nous considérons les séries canoniques et l'interpolation. Soient V une variété propre, $I = V^{\perp}$,

$Z = Z(I)$; $a_0, a_1, \dots$ de Z et $m_0, m_1, \dots$ les multiplicités.

$p(z) = z^j \exp az \in V$ si et seulement si $\exists n : a = a_n$ et $0 \leqslant j < m_n$.

Nous supposons que $\hat{M}(K)$, $w(\hat{M}(K), E(K))$ est une algèbre d'Hadamard.

Par p, q, nous désignons des monômes exponentiels.

LEMME.- Etant donné un monôme exponentiel $p \in V$, il existe une fonctionnelle linéaire et continue $L_p : V \to \underline{\underline{C}}$ telle que pour $q \in V$, $L_p(q) = \delta_{p,q}$.

DEFINITION.- Pour $f \in V$, la série canonique Σ_f de f est la série

$$f \sim \sum_{p \in V} p(z) L_p(f) .$$

La série canonique ne dépend que de la fonction f, et ne dépend pas de la variété V.

DÉFINITION.- Par $F(p)$ nous notons $< F,p >$.

Si $p(z) = z^j \exp az$, alors $< F,p > = F^{(j)}(a)$.

DÉFINITION.- Une V-suite est une famille $\bar{c} = (c_p)$, $p \in V$, de nombres complexes.

DEFINITION.- φ est l'espace vectoriel de toutes les V-suites telles que $c_p = 0$ sauf pour un nombre fini de $p \in V$.

DÉFINITION.- Soit $\bar{c} = (c_p) \in \varphi$. Pour $f \in V$, $f \sim \Sigma \, p d_p$ nous définissons la $\bar{c}$-moyenne de f par

$$S(f,\bar{c}) = \sum_{\substack{p \in V \\ p \text{ maximal}}} d_p \sum_{q \leqslant p} \binom{m(p)}{m(q)} q \, c_q$$

où $m(p)$ est la multiplicité de p, et nous écrivons $q \leqslant p$ si $p(z) = z^j \exp az$, $q(z) = z^\ell \exp az$, (même fréquence a) et $j \geqslant \ell$.

Alors, $S(f,\bar{c})$ est une application linéaire et continue de V dans V. Chaque $S(f,\bar{c})$ est une combinaison linéaire finie de monômes exponentiels.

DÉFINITION.- Un procédé effectif de sommation pour V est une suite $\bar{c}(k)$ d'éléments de φ, $k = 1,2,3,\ldots$ telle que si $S_k(f) = S(f,\bar{c}^{(k)})$ alors, pour chaque $f \in V$, $f = \lim S_k(f)$.

THÉORÈME.- Supposons que $\hat{M}$ (K),w soit une algèbre d'Hadamard. Si V est une variété propre, alors il existe un procédé effectif de sommation pour V.

Pour la démonstration, nous prenons une fonction $G \in V^1$, $G \neq 0$; nous choisissons les fonctions d'après le produit canonique généralisé d'Hadamard $G_k(z) = (G(z)H(z))/(P\ (z)\ _k(z))$ et nous prenons $c_p^{(k)} = G_k(p)$.

DÉFINITION.- Soit S l'ensemble de toutes les V-suites (b_p) telles qu'il existe un $k \in K$ et un $A > 0$ tels que $|b_p| \leqslant A\|p\|_k$ pour chaque $p \in V$.

Il est clair que si $F \in \hat{M}$ (K) la V-suite $\{F(p)\}$ appartient à S , parce que

$$F^{(j)}(z) = \int t^n \exp\ (zt)k(t)d\mu(t)$$

pour $k \in K$ et pour une mesure μ, $\|\mu\| < 1$.

DÉFINITION.- Z est une suite d'interpolation pour $\hat{M}$ (K) si, étant donné $(b_p) \in S$, $\exists\ F \in \hat{M}$ (K) telle que $F(p) = b_p$ pour tout $p \in V$. Ici, $Z = Z(I) = Z(V^1)$.

THÉORÈME.- Supposons que $\hat{M}$ (K),w soit une algèbre d'Hadamard, et que K ait une base dénombrable. Alors, les monômes exponentiels forment une base absolument convergente pour V si et seulement si Z est une suite d'interpolation pour $\hat{M}$ (K).

THÉORÈME.- Supposons que $\hat{M}$ (K),w est Hadamard. Si les monômes exponentiels dans V forment une base absolument convergente dans V, alors Z est une suite d'interpolation pour $\hat{M}$ (K). Si Z est une suite d'interpolation pour $\hat{M}$ (K), alors la série canonique converge absolument dans E(K) pour chaque fonction dans V, c'est-à-dire que si $f \in V$, $f \sim \Sigma p d_p$, alors $\Sigma |d_p| \|p\|_k < \infty$ pour chaque $k \in K$.

THÉORÈME.- *Supposons que* $\hat{M}(K),w$ *est Hadamard et que* V *est tonnelé. Alors* Z *est une suite d'interpolation pour* $\hat{M}(K)$ *si et seulement si la série canonique de chaque fonction dans* V *est absolument convergente dans* $E(K)$.

7.- Nous considérons maintenant l'équation $F(D)f = g$, $g \neq 0$. Rappelons que l'équation $f*\nu = g$ de convolution est équivalente à l'équation
$\hat{\nu}(D)f = g$.

PROPOSITION.- Si $f \in E(K)$ et $\nu \in M(K)$, alors $(f*\nu)(z)$ est une fonction entière.

PROPOSITION.- L'application $f \to f*\nu$, $\nu \in M(K)$ est une application de $\hat{M}(K^*)$ dans $\hat{M}(K^*)$.

COROLLAIRE.- Si K est hypo-convexe, alors, l'application $f \to f*\nu$ est une application de $E(K)$ dans $E(K)$.

THÉORÈME.- *Soit* ν *une mesure dans* $M(K)$, $\hat{\nu} \neq 0$. *Supposons qu'une des hypothèses suivantes soit vérifiée.*

i) K *est hypo-convexe*

ii) K *est parfait et est déterminé par une suite*

iii) K *est hyper-convexe et est déterminé par une suite.*

Alors, étant donné $g \in E(K)$, *il existe* $f \in (K)$ *telle que* $f*\nu = g$.

THÉORÈME.- *Soit* ν *une mesure dans* $M(K)$, $\hat{\nu} \neq 0$. *Alors, étant donné* $g \in \hat{M}(K^*)$, *il existe* $f \in \hat{M}(K^*)$ *telle que* $f*\nu = g$.

Les démonstrations de ces théorèmes dépendent des "lemmes de divisions" qui suivent. Leurs démonstrations utilisent la fonction $T(r,f)$ caractéristique de Nevanlinna et l'inégalité $T(r,f/g) \leq T(r,f) + T(r,g)$.

LEMME.- Soit $\{G_\alpha\}$ une suite généralisée dans $E(K^*)$ telle que pour $F \in E(K^*)$, $F \not\equiv 0$, on ait $FG_\alpha \to 0$ dans $E(K^*)$. Alors $G_\alpha \to 0$ dans $E(K^*)$.

LEMME.- Soient $E(K)$ tonnelé et K hyper-convexe ou parfait. Soit $\{G_n\}$ une suite dans $\hat{M}(K)$ telle que pour $F \in M(K)$, $F \not\equiv 0$, on ait $FG_n \to 0$ dans la topologie $w(\hat{M}(K), E(K))$. Alors $G_n \to 0$ dans cette topologie.