

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

J. L. LIONS

**Sur un nouveau type de problème non linéaire pour
opérateurs paraboliques du 2e ordre**

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1965-1966), p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1965-1966__2_1_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN NOUVEAU TYPE DE PROBLÈME NON LINÉAIRE
POUR OPÉRATEURS PARABOLIQUES DU 2^e ORDRE

par

J.L. LIONS

Introduction.

On expose ici l'un des résultats de la note [4] de G. Stampacchia et l'A. de la conférence. Il s'agit du problème suivant (qui sera posé de façon plus générale et plus précise au n°1) :

trouver u solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{dans un cylindre } \Omega \times (0, \infty)$$

$$u \geq 0 \quad \text{sur la frontière latérale } \Sigma \text{ du cylindre,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{dérivée normale dirigée vers l'extérieur})$$

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma ,$$

$$u(x, 0) = 0.$$

La méthode de résolution consiste à approcher ce problème par une famille de problèmes de même nature mais pour des opérateurs elliptiques (c'est la régularisation elliptique ; cf. [2]) ; pour chacun de ces problèmes elliptiques, on peut utiliser un résultat de [5] et on passe à la limite à l'aide d'estimations convenables. Ceci fournit (n°2) l'existence d'une solution. L'unicité (n°3) d'une solution "faible" est fournie par une variante d'un procédé de [3] pour l'unicité des solutions faibles, en dimension d'espace 2, des équations de Navier-Stokes.

Le problème posé au n°1 est montré, au n°5, être une formulation "faible" du problème initial ; nous ignorons si les solutions faibles sont "fortes".

1. Notations. Énoncé du résultat.

1.1. Notations.

Ω = ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ .

$H^1(\Omega) = \{v \mid v, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), i = 1, \dots, n\}$, muni de sa structure hilbertienne habituelle. Pour simplifier l'écriture, on posera

$$V = H^1(\Omega), \quad H = L_2(\Omega).$$

On désigne par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$ = sous espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions nulles au bord de Ω .

Pour un peu simplifier - mais ceci n'a rien d'essentiel ! - on suppose toutes les fonctions à valeurs réelles.

On pose, X étant un espace de Banach quelconque

$L_2(X) = L_2(0, \infty; X)$ = espaces des (classes de) fonctions de carré sommable sur $(0, \infty)$, pour la mesure dt , à valeurs dans X .

Si $f \in L_2(X)$, on pose :

$f' = \frac{df}{dt}$ = dérivée (distribution) de f sur $]0, \infty[$, à valeurs dans X .

On introduit maintenant les espaces suivants :

$$W_0 = \{w \mid w \in L_2(V), w' \in L_2(H), w(0) = 0\},$$

$$W = \{w \mid w \in L_2(V), w' \in L_2(H^{-1}(\Omega)), w(0) = 0\};$$

notons que tout élément w de W (donc a fortiori de $W_0 \subset W$) est p.p. égal à une fonction continue de $t \geq 0 \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, de sorte que la condition " $w(0) = 0$ " a un sens.

En fait il y a plus (et cela sera démontré au n°5) :

PROPOSITION 1.1. Si Ω a une frontière assez régulière, tout élément w de W est p.p. égal à une fonction continue (encore notée w) de $t \geq 0 \rightarrow H$.

Les espaces W_0 et W sont des espaces de Hilbert pour les normes

$$\|w\|_{W_0} = \left(\int_0^\infty (\|w(t)\|^2 + |w'(t)|^2) dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|w\|_W = \left(\int_0^\infty (\|w(t)\|^2 + \|w'(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$\| \quad \|, | \quad |$$

désignent respectivement les normes dans V et H .

Si l'on considère l'application "trace sur Γ " :

$$v \rightarrow \gamma v$$

qui applique $H^1(\Omega) = V$ sur $H^1(\Gamma)$, donc en particulier dans $L_2(\Gamma)$, on en déduit une application

$$w \rightarrow \gamma w \text{ de } L_2(V) \rightarrow L_2(L_2(\Gamma))$$

et l'on peut poser :

$$K_0 = \{w \mid w \in W_0, \gamma w \geq 0 \text{ p.p. sur } \Sigma = \Gamma \times (0, \infty)\},$$

$$K = \{w \mid w \in W, \gamma w \geq 0 \text{ p.p. sur } \Sigma\}.$$

On définit ainsi des cones convexes fermés dans W_0 et dans W respectivement.

Soient maintenant des fonctions a_0, a_{ij} avec

$$(1.1) \quad a_0, a_{ij}, (i, j = 1, \dots, n), \in L_\infty(\Omega \times (0, \infty));$$

pour chaque couple $u, v \in V$, posons

$$(1.2) \quad a(t; u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0(x, t) uv dx ,$$

ce qui a un sens pour presque tout t . On définit ainsi une famille de formes $u, v \rightarrow a(t; u, v)$, bilinéaires continues sur $V \times V$.

On fait l'hypothèse (d'ellipticité) :

$$(1.3) \quad a(t; v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in V .$$

N.B. La forme $a(t; u, v)$ n'est pas nécessairement symétrique.

A la forme $a(t; u, v)$ est associé l'opérateur $A(t) = A :$

$$(1.4) \quad A(t) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u .$$

1.2. Énoncé du résultat.

THÉOREME 1.1. On suppose que Ω a une frontière assez régulière pour que la
Prop. 1.1. ait lieu et on suppose que (1.3) a lieu. Alors il existe un élément
 u dans K et un seul tel que

$$(1.5) \quad \int_0^\infty [a(t; u, w-u) - (u, w')] dt \geq \int_0^\infty (f, w-u) dt \quad \forall w \in K_0 ,$$

f étant donné dans $L_2(H)$.

Le plan sera le suivant :

n°2. Démonstration de l'existence d'une solution.

n°3. Démonstration de l'unicité.

n°4. Interprétation du problème.

n°5. Démonstration de la Proposition 1.1.

2. Démonstration de l'existence d'une solution.2.1. Régularisation elliptique.

Pour $u, v \in W_0$, on pose :

$$(2.1) \quad \pi_\varepsilon(u, v) = \int_0^\infty [a(t; u, v) + (u', v)] dt + \varepsilon \int_0^\infty (u', v') dt,$$

pour $\varepsilon > 0$ fixé.

Comme

$$\int_0^\infty (v', v) dt = 0 \quad \text{si } v \in W_0,$$

on a, grâce à (1.3) :

$$(2.2) \quad \pi_\varepsilon(v, v) \geq \alpha \int_0^\infty \|v(t)\|^2 dt + \varepsilon \int_0^\infty |v'(t)|^2 dt$$

donc

$$(2.3) \quad \pi_\varepsilon(v, v) \geq \inf(\alpha, \varepsilon) \|v\|_{W_0}^2.$$

Donc $u, v \rightarrow \pi_\varepsilon(u, v)$ est une forme bilinéaire continue sur $W_0 \times W_0$ et donc, d'après le théorème de Stampacchia [5], il existe $u_\varepsilon \in K_0$ unique tel que

$$(2.4) \quad \pi_\varepsilon(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \geq \int_0^\infty (f, v - u_\varepsilon) dt \quad \forall v \in K_0.$$

On va maintenant établir des :

2.2. Majorations sur u_ε .

$$\text{LEMME 2.1.} \quad \int_0^\infty \|u_\varepsilon\|^2 dt + \varepsilon \int_0^\infty |u'_\varepsilon|^2 dt \leq C$$

(les C désignent des constantes variées, indépendantes de ε).

Démonstration.

Faire $v = 0$ ($\in K_0$) dans (2.4), en utilisant (2.3) et Cauchy-Schwarz.

LEMME 2.2. Au sens des distributions dans le cylindre $\Omega \times]0, \infty[$, on a :

$$(2.5) \quad A u_\varepsilon + u'_\varepsilon - \varepsilon u''_\varepsilon = f.$$

Démonstration.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ = fonctions C^∞ et à support compact dans $Q = \Omega \times]0, \infty[$.

Alors $v = u_\varepsilon + \varphi$ est dans K_0 et (2.4) donne

$$\pi_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi) = \int_0^\infty (f, \varphi) dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q)$$

d'où (2.5).

LEMME 2.3. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, u'_ε demeure dans un borné de $L_2(H^{-1}(\Omega))$.

Démonstration.

L'opérateur A est linéaire continu de $L_2(V) \rightarrow L_2(H^{-1}(\Omega))$ et grâce au lemme 2.1, $A u_\varepsilon$ demeure alors dans un borné de $L_2(H^{-1}(\Omega))$. Donc (2.5) donne :

$$(2.6) \quad u'_\varepsilon - \varepsilon u''_\varepsilon = f - A u_\varepsilon = g_\varepsilon \in \text{borné de } L_2(H^{-1}(\Omega)).$$

Considérons (2.6) comme une équation différentielle en u'_ε ; l'unique solution qui soit dans $L_2(H)$ est donnée par

$$u'_\varepsilon = E_\varepsilon *_{(t)} g_\varepsilon \quad \text{ou} \quad u'_\varepsilon(t) = \int_t^\infty E_\varepsilon(t-\sigma) g_\varepsilon(\sigma) d\sigma, \quad t > 0$$

avec

$$E_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |E_\varepsilon(t)| dt = 1,$$

donc

$$\|u'_\varepsilon\|_{L_2(H^{-1}(\Omega))} \leq \|g_\varepsilon\|_{L_2(H^{-1}(\Omega))}$$

d'où le résultat.

2.3. Passage à la limite.

On peut, grâce aux lemmes précédents, extraire de u_ε une suite u_η telle que

$$(2.7) \quad \begin{cases} u_\eta \rightarrow u \text{ dans } L_2(V) \text{ faible, lorsque } \eta \rightarrow 0, \\ u'_\eta \rightarrow u' \text{ dans } L_2(H^{-1}(\Omega)) \text{ faible (lorsque } \eta \rightarrow 0). \end{cases}$$

Puisque $u_\eta \in K_0$, on a :

$$(2.8) \quad u \in K.$$

On va vérifier que u satisfait à (1.5).

Puisque $\int_0^\infty (u'_\varepsilon, u_\varepsilon) dt = 0$, on peut écrire (2.4) (avec η au lieu de ε), après une intégration par parties :

$$\int_0^\infty [a(t; u_\eta, v - u_\eta) - (u_\eta, v')] dt + \eta \int_0^\infty (u'_\eta, v') dt \geq \int_0^\infty (f, v - u_\eta) dt$$

ou encore

$$(2.9) \quad \begin{cases} \int_0^\infty [a(t; u_\eta, v) - (u_\eta, v')] dt + \eta \int_0^\infty (u'_\eta, v') dt \geq \\ \geq \int_0^\infty (f, v - u_\eta) dt + \int_0^\infty a(t; u_\eta, u_\eta) dt. \end{cases}$$

Grâce au lemme 2.1, $\eta \int_0^\infty (u'_\eta, v') dt = o(\eta^{\frac{1}{2}})$ et l'on déduit de (2.7) et

(2.9) que

$$(2.10) \quad \int_0^\infty [a(t; u, v) - (u, v')] dt \geq \int_0^\infty (f, v - u) dt + \liminf_{\eta \rightarrow 0} \int_0^\infty a(t, u_\eta, u_\eta) dt.$$

Mais

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \inf \int_0^\infty a(t; u_\eta, u_\eta) dt \geq \int_0^\infty a(t; u, u) dt$$

et donc (2.10) donne

$$\int_0^\infty [a(t; u, v) - (u, v')] dt \geq \int_0^\infty (f, v - u) dt + \int_0^\infty a(t; u, u) dt, \quad \forall v \in K_0,$$

d'où (1.5) ; c.q.f.d.

Remarque 2.1.

Il résulte de (2.5) que

$$Au + u' = f.$$

Remarque 2.2.

Il résultera de l'unicité que u_ε (et non seulement une suite extraite) converge vers u au sens (2.7).

3. Démonstration de l'unicité.

3.1. Les opérateurs T_n^m .

On pose :

$$\theta_m(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \frac{1}{m}, \\ m(t - \frac{1}{m}) & \text{si } \frac{1}{m} \leq t \leq \frac{2}{m}, \\ 1 & \text{si } t \geq \frac{2}{m}, \end{cases}$$

ρ_n = suite de fonctions C^∞ sur $\underline{\mathbb{R}}_t$, à support dans $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$,

$$\rho_n \text{ paire, } \rho_n \geq 0, \quad \int \rho_n(t) dt = 1.$$

Si V est un élément de $L_2(V)$, on pose :

$$(3.1) \quad T_n^m v = \theta_m((\theta_m v) * \rho_n * \rho_n) .$$

Si l'on suppose $n > 2m$, la fonction $(\theta_m v) * \rho_n * \rho_n$ est nulle au voisinage de 0 (plus précisément dans $(0, \frac{1}{m} - \frac{2}{n})$). On a :

$$(3.2) \quad \text{Si } v \in K, \quad \text{alors } T_n^m v \in K_0 .$$

En effet,

$$(3.3) \quad (T_n^m v)' = \theta_m'((\theta_m v) * \rho_n * \rho_n) + \theta_m((\theta_m v) * \rho_n * \rho_n')$$

donc

$$(T_n^m v)' \in L_2(H) \quad (\text{et même } \in L_2(V)).$$

Ensuite :

$$\gamma T_n^m v = \theta_m((\theta_m \gamma v) * \rho_n * \rho_n)$$

et $\gamma v \geq 0$ sur Σ entraîne $\gamma T_n^m v \geq 0$ sur Σ .

3.2. Principe de la démonstration.

Soient u_1 et u_2 deux solutions de (1.5), $u_j \in K$.

Alors

$$\int_0^\infty [a(t; u_1, w - u_1) - (u_1, w')] dt \geq \int_0^\infty (f, w - u_1) dt \quad \forall w \in K_0 ,$$

$$\int_0^\infty [a(t; u_2, w - u_2) - (u_2, w')] dt \geq \int_0^\infty (f, w - u_2) dt \quad \forall w \in K_0 .$$

Grâce à (3.2) on peut prendre dans la première (resp. 2ème) inégalité :

$$w = T_n^m u_2, \quad (\text{resp. } w = T_n^m u_1).$$

Additionnons les inégalités correspondantes. Si nous posons :

$$X_n^m = \int_0^\infty [a(t; u_1, T_n^m u_2 - u_1) - a(t; u_2, u_2 - T_n^m u_1)] dt,$$

$$Y_n^m = - \int_0^\infty [(u_1, (T_n^m u_2)') + (u_2, (T_n^m u_1)')] dt$$

$$Z_n^m = \int_0^\infty (f, T_n^m u_2 - u_2 + T_n^m u_1 - u_1) dt ,$$

nous avons :

$$(3.4) \quad X_n^m + Y_n^m \geq Z_n^m .$$

Nous allons dans cette inégalité faire tendre n vers l'infini, puis m vers l'infini.

3.3. Lemmes.

LEMME 3.1. Lorsque $n \rightarrow \infty$, on a :

$$X_n^m \rightarrow X^m = \int_0^\infty [a(t; u_1, \theta_m^2 u_2 - u_1) - a(t; u_2, u_2 - \theta_m^2 u_1)] dt .$$

Ceci est immédiat.

LEMME 3.2. Lorsque $n \rightarrow \infty$, on a :

$$Y_n^m \rightarrow Y^m = -2 \int_0^\infty \theta_m \theta_m'(u_1, u_2) dt .$$

Démonstration.

Utilisant la formule (3.3), on peut écrire :

$$Y_n^m = y_n^m + \eta_n^m ,$$

avec

$$y_n^m = - \int_0^\infty (\theta_m u_1, (\theta_m u_2) * \rho_n * \rho_n') dt - \int_0^\infty (\theta_m u_2, (\theta_m u_1) * \rho_n * \rho_n') dt ,$$

$$\eta_n^m = - \int_0^\infty \theta_m'(u_1, (\theta_m u_2) * \rho_n * \rho_n') dt - \int_0^\infty \theta_m'(u_2, (\theta_m u_1) * \rho_n * \rho_n') dt .$$

On peut supposer $n > 2m$, de sorte que toutes les fonctions sont nulles au voisinage de 0 et y_n^m peut s'écrire (on utilise ici la parité de ρ_n) :

$$y_n^m = - \int_0^\infty [((\theta_m u_1) * \rho_n, ((\theta_m u_2) * \rho_n)') + (((\theta_m u_1) * \rho_n)', (\theta_m u_2) * \rho_n)] dt .$$

Posant $(\theta_m u_i) * \rho_n = \varphi_i$, on a :

$$y_n^m = - \int_0^\infty [(\varphi_1, \varphi_2') + (\varphi_1', \varphi_2)] dt = 0 .$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n^m = -2 \int_0^\infty \theta_m \theta_m'(u_1, u_2) dt ,$$

on a le résultat.

On a évidemment

$$\text{LEMME 3.3. } Z_n^m \rightarrow Z^m = \int_0^\infty (\theta_m^2 - 1)(f, u_2 - u_1) dt .$$

On déduit de (3.4) :

$$(3.5) \quad X^m + Y^m \geq Z^m .$$

On a maintenant :

LEMME 3.4. Lorsque $m \rightarrow \infty$, on a :

$$Y^m \rightarrow 0 .$$

Démonstration.

D'après la proposition 1.1, les fonctions $u_j(t)$ sont continues de $t \geq 0 \rightarrow H$ et $u_j(0) = 0$.

Alors

$$Y^m = -2m \int_{1/m}^{2/m} \theta_m(u_1, u_2) dt$$

vérifie :

$$|Y^m| \leq 2m \left(\int_m^{\frac{2}{m}} \theta_m(t) dt \right) \sup_{t \in [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]} |u_1(t)| \cdot \sup_{t \in [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]} |u_2(t)|$$

$$\leq \sup_{t \in [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]} |u_1(t)| \cdot \sup_{t \in [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]} |u_2(t)| \rightarrow 0 .$$

c.q.f.d.

3.4. Démonstration de l'unicité.

Il est immédiat que

$$X^m \rightarrow - \int_0^\infty a(t; u_2 - u_1, u_2 - u_1) dt,$$

$$Z^m \rightarrow 0 .$$

Donc (3.5) donne, grâce au lemme 3.4 :

$$- \int_0^\infty a(t; u_2 - u_1, u_2 - u_1) dt \geq 0$$

et comme $a(t; v, v) \geq \alpha \|v\|^2$, il en résulte $u_2 = u_1$. c.q.f.d.

4. Interprétation du problème.

Montrons d'abord :

PROPOSITION 4.1. Les inégalités (1.5) équivalent à :

$$(4.1) \quad \int_0^\infty [a(t; u, v) - (u, v')] dt \geq \int_0^\infty (f, v) dt \quad \forall v \in K_0 ,$$

$$(4.2) \quad \int_0^\infty a(t, u, u) dt = \int_0^\infty (f, u) dt .$$

Démonstration.

Il est clair que (4.1), (4.2) entraînent (1.5).

Réciproquement, si u satisfait à (1.5), nous prenons (avec les notations du n° 3)

$$w = T_n^m u + v, \quad v \in K_0.$$

D'après les résultats du n° 3, on en déduit (4.1) par passage à la limite en n puis en m .

Prenant $v = T_n^m u$ dans (4.1), on en déduit, toujours par le même procédé, que

$$\int_0^\infty a(t; u, u) dt \geq \int_0^\infty (f, u) dt ;$$

prenant $w = 0$ dans (1.5), on a l'inégalité inverse, d'où (4.2).

On a maintenant l'interprétation formelle suivante :

la fonction u satisfait à

$$(4.3) \quad A(t)u + u' = f \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, \infty[,$$

$$(4.4) \quad u \geq 0 \quad \text{sur } \Sigma,$$

$$(4.5) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \geq 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{dérivée conormale}),$$

$$(4.6) \quad u \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

$$(4.7) \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega.$$

En effet, on sait déjà (Remarque 2.1) que (4.3) a lieu (cela résulte aussi de (4.1), en prenant $v = \pm \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$) ; (4.4) a lieu puisque $u \in K$.

Multipliant (4.3) par $v \in K_0$ et intégrant - formellement - par parties, il vient

$$(4.8) \quad - \int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v \, d\Sigma + \int_0^{\infty} [a(t; u, v) - (u, v')] dt = \int_0^{\infty} (f, v) dt$$

d'où, avec (4.1) :

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v \, d\Sigma \geq 0 \quad \forall v \in K_0, \quad \text{i.e. } v \geq 0 \quad \text{sur } \Sigma,$$

et donc on a (4.5).

Prenant $v = u$ dans (4.8) et notant que $\int_0^{\infty} -(u, u') dt = 0$ (formel !) et utilisant (4.2), on a :

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} u \, d\Sigma = 0$$

d'où (4.6) (puisque u et $\frac{\partial u}{\partial \nu_A} \geq 0$ sur Σ).

Enfin (4.7) a lieu puisque $u \in K$.

5. Démonstration de la proposition 1.1.

Par partition de l'unité et cartes locales, on se ramène au problème analogue avec

$$\Omega = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}.$$

Posons $x' = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ et pour $v \in L_2(\Omega)$, définissons $\pi v \in L_2(\mathbb{R}^n)$ par

$$(5.1) \quad \pi v(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x_n > 0 \\ -3v(x', -x_n) + 4v(x', -2x_n) & \text{si } x_n < 0. \end{cases}$$

On vérifie tout de suite que

$$(5.2) \quad \pi \text{ est un opérateur linéaire continu de } H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n).$$

Vérifions que

(5.3) π est un opérateur linéaire continu de $H^{-1}(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\underline{\mathbb{R}}^n)$.

En effet, si $v \in L_2(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\underline{\mathbb{R}}^n)$, on a :

$$\int_{\underline{\mathbb{R}}^n} (\pi v) \varphi \, dx = \int_{\Omega} v(\pi^* \varphi) \, dx$$

où

$$\pi^* \varphi(x) = \varphi(x) - 3\varphi(x', -x_n) + 2\varphi(x', -\frac{x_n}{2}), \quad x \in \Omega.$$

On vérifie sans peine que $\pi^* \in \mathcal{L}(H^1(\underline{\mathbb{R}}^n); H^1_0(\Omega))$; soit $\|\pi^*\|$ sa norme.

Alors, pour $v \in L_2(\Omega)$, on a :

$$\|\pi v\|_{H^{-1}(\underline{\mathbb{R}}^n)} \leq \|v\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\pi^* \varphi\|_{H^1_0(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\underline{\mathbb{R}}^n)}^{-1} \leq \|\pi^*\| \|v\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

ce qui montre (5.3) (puisque $L_2(\Omega)$), est dense dans $H^{-1}(\Omega)$).

Soit alors u donnée avec

$$u \in L_2(H^1(\Omega)), \quad u' \in L_2(H^{-1}(\Omega)).$$

On introduit

$$\pi u = U$$

qui d'après (5.2)(5.3) vérifie

$$U \in L_2(H^1(\underline{\mathbb{R}}^n)), \quad U' \in L_2(H^{-1}(\underline{\mathbb{R}}^n))$$

et donc (cas très particulier de [1]) U est p.p. égale à une fonction

continue de $t \geq 0 \rightarrow L_2(\underline{\mathbb{R}}^n)$ et comme la restriction de U à $\Omega \times (0, \infty)$ est

u , on a la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.L. LIONS, Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications
Bull. Math. R.P.R. t.2 (1958), p. 419-432.
- [2] J.L. LIONS, Cours C.I.M.E., Varenna, Mai 1963.
- [3] J.L. LIONS-G. PRODI, Un théorème d'existence et unicité dans les équations
de Navier Stokes en dimension 2. C.R. Acad. Sc. Paris, t.248 (1959),
p. 3519-3521.
- [4] J.L. LIONS-G. STAMPACCHIA, Inéquations variationnelles non coercives. C.R.
Acad. Sc. Paris, t. 261 (1965), p. 25-27.
- [5] G. STAMPACCHIA, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 258 (1964), p. 4413.