

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A. DOUADY

Le théorème d'existence

Séminaire Jean Leray, n° 4 (1964-1965), p. 89-100

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965__4_89_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE THÉOREME D'EXISTENCE

par

A. DOUADY

1. Où l'on pose le problème.

Dans tout cet exposé, X désignera un espace analytique de dimension finie et $\mathcal{E}$ un faisceau analytique cohérent sur X . On cherche un espace analytique H de dimension finie et un sous faisceau analytique cohérent $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}_H$ tel que $\mathcal{E}_H/\mathcal{R}$ soit H -plat et H -propre (c'est-à-dire que la projection sur H du support de $\mathcal{E}_H/\mathcal{R}$ soit propre), tels que soit vérifiée la propriété universelle : Quels que soient l'espace analytique S de dimension finie et le sous faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_S$ tel que $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ soit S -plat et S -propre, il existe un morphisme et un seul $f : S \rightarrow H$ tel que

$$\mathcal{F} = (f \times I_X)^* \mathcal{R} .$$

Ce problème peut encore s'énoncer en disant que l'on cherche à représenter le foncteur qui, à tout espace analytique S de dimension finie, associe l'ensemble des sous faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_S$ tels que $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ soit S -plat et S -propre.

Nous montrerons d'abord que le foncteur qui, à tout espace analytique banachique S , associe l'ensemble des sous faisceaux $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_S$ tels que $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ soit S -anaplat et S -propre, est représentable, puis que l'espace analytique H qui le représente est de dimension finie.

Cela résoudra le problème posé. Rappelons en effet que, si S est de dimension finie, $\ll S\text{-anaplat} \gg$ équivaut à $\ll$ cohérent et $S\text{-plat} \gg$.

Remarques.

1. Soit H une solution du problème universel. En prenant pour S un point simple, l'ensemble des morphismes de S dans H s'identifie à l'ensemble sous-jacent à H ; d'autre part la valeur du foncteur que l'on représente n'est autre que l'ensemble des sous faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ soit à support compact.

On voit donc que l'ensemble sous-jacent à H s'identifie à l'ensemble des sous faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ soit à support compact.

Un aspect du problème est donc de munir d'une structure d'espace analytique l'ensemble des sous faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ soit à support compact.

2. Si $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$, on trouve pour l'ensemble sous-jacent à H l'ensemble des faisceaux cohérents d'idéaux $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_X$ tels que $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ soit à support compact, autrement dit l'ensemble des sous espaces analytiques compacts de X . Pour tout espace analytique S , l'ensemble des morphismes de S dans H s'identifie alors à l'ensemble des sous espaces analytiques Y de $S \times X$ plats et propres sur S .

3. L'espace tangent de Zariski $T_s H$ à H en un point s de H , auquel correspond un sous faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, s'identifie à $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{E}/\mathcal{F})$. Soit en effet $\bullet \rightarrow$ un espace réduit à un point muni de l'algèbre des nombres duaux $D = \underline{\mathbb{C}}[t]/(t^2)$. Alors $T_s H$ est l'ensemble des morphismes $\bullet \rightarrow$ dans H qui

appliquent le point en s , donc s'identifie à l'ensemble des sous faisceaux cohérents $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{E}' = D \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E}'/\mathcal{F}'$ soit D-plat et $\mathbb{C} \otimes_D \mathcal{F}' = \mathcal{F}$. Identifions $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, la première projection $p: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$ s'identifiant à $I_{\mathcal{E}}, \otimes \mathcal{E}$, où $\varepsilon: D \rightarrow \mathbb{C}$ est l'augmentation. Si $\mathcal{F}' \subset \mathcal{E}'$ vérifie les conditions ci-dessus, on a $p(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$ et $\text{Ker } p \cap \mathcal{F}' = 0 \times \mathcal{F}$. On peut donc considérer $\mathcal{F}'/0 \times \mathcal{F}$ comme le graphe d'un morphisme de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{E}/\mathcal{F}$. On vérifie que l'on obtient ainsi une bijection de $T_s H$ sur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{E}/\mathcal{F})$ et que c'est un isomorphisme d'espace vectoriel. Ceci nous montre déjà que $T_s H$ est de dimension finie si on sait seulement que H est solution du problème universel banachique.

2. Cuirasses.

Si φ est une carte de X , i.e. un isomorphisme d'un ouvert de X sur un sous espace analytique fermé d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, si $K \subset U$ est un cylindre, i.e. un compact convexe de la forme $K_1 \times \dots \times K_n$, si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur X , nous commettrons l'abus de langage suivant : nous dirons que K est $\mathcal{F}$ -privilegié si K est privilégié pour $\varphi_* \mathcal{F}$ et nous écrirons $B(K, \mathcal{F})$ pour $B(K, \varphi_* \mathcal{F})$, $\mathcal{G}_K(\mathcal{F})$ pour $\mathcal{G}_K(\varphi_* \mathcal{F})$, etc...

On appellera cuirasse sur X la donnée :

(i) d'une famille finie $(\varphi_i)_{i \in I}$ de cartes de X (pour tout i , φ_i est un isomorphisme d'un ouvert X_i de X sur un sous espace analytique fermé d'un ouvert U_i de $\mathbb{C}^{n_i}$) ;

- (ii) pour tout $i \in I$, d'un polycylindre $K_i \subset U_i$;
 (iii) pour tout $i \in I$, d'un compact $V_i \subset \varphi_i^{-1}(\overset{\circ}{K}_i) \subset X_i$;
 (iv) pour tout couple (i, j) , d'une carte φ_{ij} de X ayant pour domaine X_{ij}

$$X_{ij} = X_i \cap X_j$$

(φ_{ij} est un isomorphisme de X_{ij} sur un sous espace analytique fermé d'un ouvert U_{ij} de $\underset{C}{\mathbb{C}}^{n_{ij}}$)

- (v) pour tout couple (i, j) , d'une famille finie $(K_{ij\alpha})_{\alpha \in A_{ij}}$ de polycylindres contenus dans U_{ij} telle que

$$\bigcup_{\alpha \in A_{ij}} \varphi_{ij}^{-1}(\overset{\circ}{K}_{ij\alpha}) \supset V_i \cap V_j \quad \text{et} \quad \bigcup_{\alpha \in A_{ij}} \varphi_{ij}^{-1}(K_{ij\alpha}) \subset \varphi_i^{-1}(\overset{\circ}{K}_i) \cap \varphi_j^{-1}(\overset{\circ}{K}_j);$$

- (vi) d'un fermé L de X tel que $L \cup \bigcup V_i = X$.

Remarquons que ces conditions entraînent que $X-L$ est relativement compact dans X .

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X , la cuirasse

$$M = ((\varphi_i), (K_i), (V_i), (\varphi_{ij}), (K_{ij\alpha}), L)$$

sera dite semi-privilegiée pour $\mathcal{F}$ si K_i est $\mathcal{F}$ -privilegié pour tout $i \in I$ et si $K_{ij\alpha}$ est $\mathcal{F}$ -privilegié pour tous i, j, α . Si $\mathcal{F}$ est un sous faisceau analytique cohérent de $\mathcal{E}$; on dira que M est $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ -privilegiée si M est semi-privilegiée pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ (donc pour $\mathcal{E}$) et si

$$\text{supp } \mathcal{E}/\mathcal{F} \cap L = \emptyset.$$

Remarquons que ceci entraîne que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ est à support compact.

PROPOSITION 1. Soit $\mathcal{F}$ un sous faisceau analytique cohérent de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ soit à support compact. Alors il existe une cuirasse M sur X qui soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ -privilegiée.

Cette proposition est facile à partir du théorème des voisinages privilégiés.

PROPOSITION 2. Soient S un espace analytique banachique, $\mathcal{F}$ un sous faisceau de $\mathcal{E}_S$ tel que $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ soit S -anaplat et S -propre. Soit M une cuirasse sur X . Alors l'ensemble des $s \in S$ tels que M soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F}(s))$ -privilegiée est ouvert dans S .

Cette proposition résulte du fait, déjà remarqué au cours de l'exposé précédent, que si $\mathcal{F}_1$ est un faisceau S -anaplat sur $S \times U$, où U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et $K \subset U$ un polycylindre, l'ensemble des $s \in S$ tels que K soit privilégié pour $\mathcal{F}_1(s)$ est ouvert dans S , ainsi que du corollaire de la proposition 1 de cet exposé.

3. L'espace Θ .

Jusqu'au n°6, nous munissons X d'une cuirasse

$$M = ((\varphi_i), (K_i), (V_i), (\varphi_{ij}), (K_{ij\alpha}), L)$$

semi-privilegiée pour $\mathcal{E}$.

Pour chaque $i \in I$, notons $\mathcal{R}_i$ le sous faisceau universel de $\mathcal{E}_{\mathcal{F}_{K_i}}(\mathcal{E})$ défini au dessus de $\mathcal{F}_{K_i}(\mathcal{E}) \times \varphi_i^{-1}(K_i)$. Notons G_i l'ouvert de $\mathcal{F}_{K_i}(\mathcal{E})$ formé des points s tels que :

- (i) $\forall j \in I \quad \forall \alpha \in A_{ij} \quad K_{ij\alpha} \text{ est } \mathcal{R}_i(s)\text{-privilegié,}$
- (ii) $\text{supp } (\mathcal{E}/\mathcal{R}_i(s)) \cap L \cap V_i = \emptyset.$

Posons encore $G_{ij\alpha} = \mathcal{G}_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{E})$, notons $\rho'_{ij\alpha}$ le morphisme de G_i dans $G_{ij\alpha}$ induit par $\beta_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{A}_i)$, et posons $\rho''_{ij\alpha} = \rho'_{ji\alpha}$. Définissons les morphismes ρ' et ρ'' de $\prod G_i$ dans $\prod G_{ij\alpha}$ par

$$\rho'(s) = s' \quad \text{avec} \quad s'_{ij\alpha} = \rho'_{ij\alpha}(s_i)$$

et

$$\rho''(s) = s'' \quad \text{avec} \quad s''_{ij\alpha} = \rho''_{ij\alpha}(s_j).$$

Notons Θ l'espace analytique banachique noyau de la double flèche

$$(\rho', \rho'') : \prod G_i \rightrightarrows \prod G_{ij\alpha}.$$

4. Morphisme dans Θ défini par un faisceau.

Soient S un espace analytique banachique et $\mathcal{F}$ un sous faisceau de $\mathcal{E}_S$ tel que $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ soit S -anaplat et S -propre. Soit S_1 l'ouvert de S formé des s tels que M soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F}(s))$ -privilegiée. Pour tout $i \in I$, le morphisme $\beta_{K_i}(\mathcal{F})$ induit un morphisme de S_1 dans G_i , d'où un morphisme $\beta_M(\mathcal{F})$ de S_1 dans $\prod G_i$.

La description faite au cours de l'exposé précédent du comportement des $\beta_K(\mathcal{F})$ permet d'écrire les égalités suivantes entre morphismes définis sur S_1 :

$$\begin{aligned} \rho'_{ij\alpha} \circ \beta_{K_i}(\mathcal{F}) &= \beta_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{A}_i) \circ \beta_{K_i}(\mathcal{F}) = \beta_{K_{ij\alpha}}((\beta_{K_i}(\mathcal{F}) \times_{I_{K_i}}) * \mathcal{A}_i) \\ &= \beta_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{F}|_{S \times \overset{\circ}{K}_i}) = \beta_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

De même

$$\rho''_{ij\alpha} \circ \beta_{K_j}(\mathcal{F}) = \beta_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{F}).$$

Il en résulte que

$$\rho' \circ \beta_M(\mathcal{F}) = \rho'' \circ \beta_M(\mathcal{F}),$$

donc $\beta_M(\mathcal{F})$ peut être considéré comme un morphisme de S_1 dans Θ .

On a la propriété de fonctorialité suivante : Soit $f : S' \rightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques banachiques, et posons $\mathcal{F}' = (f \times I_X)^* \mathcal{F}$; définissons S'_1 comme S_1 . Alors $S'_1 = f^{-1}(S_1)$ et

$$\beta_M(\mathcal{F}') = \beta_M(\mathcal{F}) \circ f : S'_1 \rightarrow \Theta.$$

5. Sous faisceau universel de $\mathcal{E}_\Theta$.

Notons p_i la projection de Θ sur G_i . Le faisceau $\tilde{\mathcal{A}}_i = (p_i \times I)^* \mathcal{A}_i$ est un sous faisceau de $\mathcal{E}$ défini sur $\varphi_i^{-1}(K_i)$.

LEMME. On a

$$\tilde{\mathcal{A}}_i|_{V_i \cap V_j} = \tilde{\mathcal{A}}_j|_{V_i \cap V_j} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{A}}_i|_{V_i \cap L} = \mathcal{E}_\Theta|_{V_i \cap L}.$$

On a en effet

$$\tilde{\mathcal{A}}_i|_{\varphi_{ij}^{-1}(K_{ij\alpha})} = \tilde{\mathcal{A}}_{ij\alpha},$$

où

$$\tilde{\mathcal{A}}_{ij\alpha} = (p_{ij\alpha} \times I)^* \mathcal{A}_{ij\alpha},$$

avec

$$p_{ij\alpha} = \rho'_{ij\alpha} \circ p_i = \rho''_{ij\alpha} \circ p_j : \Theta \rightarrow G_{ij\alpha}.$$

Comme

$$V_i \cap V_j \subset \bigcup \varphi_{ij}^{-1}(K_{ij\alpha}),$$

la première assertion en résulte. La seconde résulte de la condition (ii) dans la définition de G_i et de la proposition 1 de l'exposé précédent.

Ce lemme montre qu'il existe un sous faisceau et un seul $\tilde{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{E}_\Theta$ tel

que $\tilde{\mathcal{K}}|_{V_i} = \tilde{\mathcal{K}}_i|_{V_i}$ pour tout $i \in I$ et $\tilde{\mathcal{K}}|_L = \mathcal{E}_\Theta$. Le faisceau $\tilde{\mathcal{K}}$ sera qualifié d'universel. Il jouit des propriétés suivantes : $\mathcal{E}_\Theta / \tilde{\mathcal{K}}$ est Θ -anaplat, et $\text{supp}(\mathcal{E}_\Theta / \tilde{\mathcal{K}})$ est fermé dans $\Theta \times \overline{X-L}$, comme $\overline{X-L}$ est compact, la projection de ce support sur Θ est propre.

PROPOSITION 3. Soient S un espace analytique banachique, $\mathcal{F}$ un sous faisceau de $\mathcal{E}_S$ tel que $\mathcal{E}_S / \mathcal{F}$ soit S -anaplat et S -propre. Posons $f = \beta_M(\mathcal{F}) : S_1 \rightarrow \Theta$. On a alors

$$(f \times I_X)^* \tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{F}|_{S_1 \times X}.$$

Démonstration. Pour tout $i \in I$, posons

$$f_i = p_i \circ f = \beta_{K_i}(\mathcal{F}) : S_1 \rightarrow G_i.$$

On a :

$$(f \times I)^* \tilde{\mathcal{K}}|_{V_i} = (f \times I)^* \tilde{\mathcal{K}}_i|_{V_i} = (f_i \times I)^* \mathcal{K}_i|_{V_i} = \mathcal{F}|_{S_1 \times V_i},$$

la dernière égalité provenant du n°6 de l'exposé précédent, car $V_i \subset \varphi_i^{-1}(\overset{\circ}{K}_i)$.

D'autre part les deux membres de la formule de l'énoncé coïncident avec $\mathcal{E}_S$ sur $S_1 \times L$. Ils coïncident donc sur $S_1 \times X$ et la proposition est démontrée.

6. L'espace $H_M(E)$.

Considérons le morphisme

$$\Theta = \beta_M(\mathcal{K}) : \Theta_1 \rightarrow \Theta,$$

où Θ_1 est l'ouvert de Θ formé des points s tels que M soit

$(\mathcal{E}, \mathcal{K}(s))$ -privilegiée. Si contrairement que cela puisse être, Θ ne coïncide pas avec l'identité. Cependant :

PROPOSITION 4. Soient S un espace analytique banachique, $\mathcal{F}$ un sous faisceau de $\mathcal{E}_S$ tel que $\mathcal{E}_S / \mathcal{F}$ soit S -anaplat et S -propre. Alors l'image du morphisme $\beta_M(\mathcal{F}) : S_1 \rightarrow \Theta$ est contenue dans Θ_1 et on a

$$\Theta \circ \beta_M(\mathcal{F}) = \beta_M(\mathcal{H}) .$$

Démonstration. Posons $f = \beta_M(\mathcal{F}) : S_1 \rightarrow \Theta$. On a

$$\beta_M(\mathcal{F}) = \beta_M(\mathcal{F}|_{S_1 \times X}) = \beta_M((f \times I)^* \tilde{\mathcal{K}}) ;$$

La propriété de fonctorialité vue au n°4 dit que le domaine de définition S_1 de ce morphisme est $f^{-1}(\Theta_1)$, ce qui prouve la première assertion, et que

$$\beta_M((f \times I)^* \tilde{\mathcal{K}}) = \beta_M(\tilde{\mathcal{K}}) \circ f = \Theta \circ f ,$$

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. On a $\Theta(\Theta_1) \subset \Theta_1$ et $\Theta \circ \Theta = \Theta$.

C'est la proposition 4 appliquée au faisceau $\mathcal{K}$.

Notons $H_M(\mathcal{E})$ l'espace analytique noyau de la double flèche

$$(I, \Theta) : \Theta_1 \rightrightarrows \Theta_1 .$$

Soit ι le morphisme d'inclusion de $H_M(\mathcal{E})$ dans Θ et notons $\mathcal{K}$ le sous-faisceau $(\iota \circ I_X)^* \mathcal{K}$ de $\mathcal{E}_{H_M(\mathcal{E})}$. Ce sous faisceau mérite le nom d'universel : $\mathcal{E}_{H_M(\mathcal{E})}/\mathcal{K}$ est $H_M(\mathcal{E})$ -anaplat ; pour tout $h \in H_M(\mathcal{E})$, la cuirasse M est $(\mathcal{E}, \mathcal{K}(h))$ -privilegiée, enfin :

PROPOSITION 5. Soient S un espace analytique banachique, $\mathcal{F}$ un sous faisceau de $\mathcal{E}_S$ tel que $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$ soit S -anaplat et que M soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F}(s))$ -privilegiée pour tout $s \in S$. Alors il existe un morphisme et un seul f de S dans $H_M(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{F} = (f \times I_X)^* \mathcal{K}$.

Démonstration. Le morphisme $\beta_M(\mathcal{F})$ est défini sur S et la proposition 4 montre qu'il peut être considéré comme un morphisme $f : S \rightarrow H_M(\mathcal{E})$. La proposition 3 montre que ce morphisme répond à la question. Si g est un autre

morphisme répondant à la question, on a

$$\iota \circ f = \beta_M(\mathcal{F}) = \beta_M((g \times I_X)^* \mathcal{A}) = \beta_M(\mathcal{A}) \circ g = \iota \circ g,$$

d'où $f = g$, ce qui démontre la proposition.

7. Solution du problème universel.

THÉORÈME 1. Il existe un espace analytique banachique $H(\mathcal{E})$ et un sous faisceau $\mathcal{A}$ de $E_H(\mathcal{E})$ jouissant de la propriété universelle suivante :

(i) $\mathcal{E}_H(\mathcal{E})/\mathcal{A}$ est $H(\mathcal{E})$ -anaplat et $H(\mathcal{E})$ -propre ;

(ii) Pour tout espace analytique banachique S et tout sous faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_S(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{E}_S(\mathcal{E})/\mathcal{F}$ soit $S(\mathcal{E})$ -anaplat et $S(\mathcal{E})$ -propre, il existe un morphisme et un seul $f : S \rightarrow H(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{F} = (f \times I_X)^* \mathcal{A}$.

Démonstration. Pour toute cuirasse M sur X , posons $H_M = H_M(\mathcal{E})$, notons $\mathcal{A}_M$ le sous faisceau universel de $\mathcal{E}_{H_M}$; l'ensemble sous jacent $|H_M|$ à H_M s'identifie à l'ensemble des sous faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tels que M soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ -privilegiée.

Considérons l'ensemble $|H|$ des sous faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ soit à support compact. Pour toute cuirasse M sur X , l'ensemble $|H_M|$ s'identifie à une partie de $|H|$. Si M et M' sont deux cuirasses sur X , l'ensemble $|H_M| \cap |H_{M'}|$ est ouvert dans H_M et dans $H_{M'}$, pour leurs topologies respectives ; nous noterons $H_{M,M'}$ cet ensemble muni de la structure analytique induite par celle de H_M . Les espaces analytiques $H_{M,M'}$ et $H_{M',M}$ sont solution d'un même problème universel ; il existe donc un morphisme et un seul

$$\gamma_{MM'} : H_{M,M'} \rightarrow H_{M',M}$$

tel que $\mathcal{O}_M = (\gamma_{MM'} \times I_X)^* \mathcal{O}_{M'}$ sur $H_{M,M'} \times X$. Les morphismes $\gamma_{MM''}$ et $\gamma_{M'M''} \circ \gamma_{MM'}$ coïncident sur $H_{M,M'} \cap H_{M,M''}$. Comme $|H| = \bigcup |H_M|$ d'après la proposition 1, on peut faire de l'ensemble $|H|$ un espace analytique banachique H tel que, pour toute cuirasse M , l'ensemble $|H_M|$ soit ouvert dans H et la structure de H_M s'identifie à la structure induite par celle de H . Les sous faisceaux $\mathcal{O}_M$ de $\mathcal{E}_{H_M}$ se recollent alors en un sous faisceau $\mathcal{O}$ de $\mathcal{E}_H$.

Montrons que le couple $(H, \mathcal{O})$ jouit de la propriété universelle requise. Soient S et $\mathcal{F}$ vérifiant les hypothèses de (ii). Pour toute cuirasse M sur X , soit S_M l'ensemble des $s \in S$ tels que M soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F}(s))$ -privilegiée, et soit $f_M : S_M \rightarrow H_M$ le morphisme satisfaisant à la condition de la proposition 5. Les propositions 1 et 2 montrent que les S_M forment un recouvrement ouvert de S , et l'unicité dans la proposition 5 montre que les f_M se recollent en un morphisme f de S dans H , qui est évidemment le seul répondant à la question. Ceci démontre le théorème.

8. La finitude.

THÉOREME 2. L'espace analytique $H(\mathcal{E})$ est séparé et de dimension finie en tout point.

Démonstration.

a) Séparation. Pour toute cuirasse M , l'espace $H_M(\mathcal{E})$ est séparé, car c'est un sous espace d'un produit de variétés grassmaniennes, qui sont séparées. Etant donné deux points distincts s_0 et s_1 de $H(\mathcal{E})$, on peut construire une cuirasse M qui soit $(\mathcal{E}, \mathcal{O}(s_i))$ -privilegiée pour $i = 0, 1$. Les

points s_0 et s_1 ont alors des voisinages disjoints dans $H_M(\mathcal{E})$, donc dans $H(\mathcal{E})$.

b) Finitude. Soit s un point de $H(\mathcal{E})$. On peut construire deux cuirasses

$$M = ((\varphi_i), (K_i)_{i \in I}, \dots) \text{ et } M' = ((\varphi_i), (K'_i)_{i \in I}, \dots)$$

qui soient $(\mathcal{E}, \mathcal{R}(s))$ -privilegiées et telles que $K'_i \subset \overset{o}{K}_i$ pour tout $i \in I$.

Le morphisme $\beta_{M'}(\mathcal{R})$, qui n'est autre que l'identité de $H_M \cap H_{M'}$, est

induit par le morphisme $\prod \beta_{K'_i}(\mathcal{R}_i)$ d'un ouvert de $\prod G_{K_i}(\mathcal{E})$ dans

$\prod G_{K'_i}(\mathcal{E})$. Comme on l'a remarqué au n°6 de l'exposé précédent, les morphismes

$\beta_{K'_i}(\mathcal{R}_i)$ sont compacts. Par suite $L_H(\mathcal{E})$ est un morphisme compact en s .

Le critère de finitude (Espaces analytiques banachiques, Proposition 3) nous

apprend que $H(\mathcal{E})$ est de dimension finie en s , ce qui démontre le théorème.