

# SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A. DOUADY

**Faisceaux anaplots**

*Séminaire Jean Leray*, n° 4 (1964-1965), p. 74-88

[http://www.numdam.org/item?id=SJL\\_1964-1965\\_\\_4\\_74\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965__4_74_0)

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# FAISCEAUX ANAPLATS

par

A. DOUADY

## 1. Notations.

Si  $X = (X, \Phi)$  est un espace analytique banachique, on note  $\mathcal{O}_X$  le faisceau  $\Phi(\underline{\mathbb{C}})$  sur  $X$ . Si  $f = (f_0, f_1)$  est un morphisme d'espaces analytiques banachiques de  $X'$  dans  $X$  et si  $\mathcal{F}$  est un faisceau  $\mathcal{O}_X$ -module sur  $X$ , on notera  $f^*\mathcal{F}$  le faisceau  $\mathcal{O}_{X'}$ -module  $\mathcal{O}_{X'} \otimes_{f_0^*\mathcal{O}_X} f_1^*\mathcal{F}$  sur  $X'$ .

Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau  $\mathcal{O}_{S \times X}$ -module sur un produit  $S \times X$  d'espaces analytiques banachiques, pour tout point  $s \in S$ , on notera  $\mathcal{F}(s)$  le faisceau  $\mathcal{O}_X$ -module  $i_s^*\mathcal{F}$  sur  $X$ , où  $i_s$  désigne le morphisme d'injection de  $X$  dans  $S \times X$  défini par  $s$ .

Si  $S$  est un espace analytique de dimension finie,  $\mathcal{F}(s)$  s'identifie à  $\mathcal{F}/\underline{m}_s \mathcal{F} = \underline{\mathbb{C}} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}$ . Il n'en est plus ainsi en général si  $S$  n'est pas de dimension finie.

## 2. Un lemme préliminaire.

LEMME 1. Soit  $U$  un ouvert de  $\underline{\mathbb{C}}^n$ , soient  $\mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{F}''$  des faisceaux analytiques cohérents sur  $U$ , et soit  $K$  un compact convexe privilégié pour  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ , et  $\mathcal{F}''$ .

(a) Soient  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$  et  $g : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}''$  des homomorphismes de  $\mathcal{O}_U$ -modules tels que  $g \circ f = 0$ . Si

$$B(K, \mathcal{F}) \rightarrow B(K, \mathcal{F}') \rightarrow B(K, \mathcal{F}'')$$

est une suite exacte directe,  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}''$  est une suite exacte de faisceaux sur  $K$ .

(b) Toute suite exacte directe  $B(K)$ -linéaire :

$$B(K, \mathcal{F}) \xrightarrow{u} B(K, \mathcal{F}') \xrightarrow{v} B(K, \mathcal{F}'')$$

induit une suite exacte de faisceaux sur l'intérieur  $\overset{\circ}{K}$  de  $K$ .

Démonstration. ( $a_0$ ) Avec les hypothèses de (a),  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}''$  est une suite exacte sur  $\overset{\circ}{K}$ . En effet, pour tout  $h \in H^0(K, \text{Ker } g)$ , la restriction de  $h$  à  $\overset{\circ}{K}$  est dans l'image de  $f$ , et  $H^0(K, \text{Ker } g)$  engendre  $\text{Ker } g_x$  d'après le théorème A classique.

(a) Soit  $a$  un point intérieur à  $K$  et considérons l'application  $m : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  définie par  $m(t, x) = (1-t)a + tx$ . Posons

$$\tilde{U} = m^{-1}(U), \quad \tilde{\mathcal{F}} = m^* \mathcal{F}, \quad \tilde{f} = m^* f : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}', \text{ etc...}$$

L'ensemble  $J$  des  $t \in \mathbb{C}$  tels que  $K$  soit privilégié pour  $\tilde{\mathcal{F}}(t)$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}'(t)$  et  $\tilde{\mathcal{F}}''(t)$  est un voisinage de 1 et les  $B(K, \tilde{\mathcal{F}}(t))$  sont les fibres d'un fibré vectoriel  $B(K, \tilde{\mathcal{F}})$  sur  $J$ ; de même pour  $\mathcal{F}'$  et  $\mathcal{F}''$ . Les homomorphismes  $f$  et  $g$  définissent des homomorphismes analytiques de fibrés vectoriels :

$$B(K, \tilde{\mathcal{F}}) \xrightarrow{f} B(K, \tilde{\mathcal{F}}') \xrightarrow{g} B(K, \tilde{\mathcal{F}}'') .$$

Comme on a une suite exacte pour  $t = 1$ , on a encore une suite exacte pour  $t$  suffisamment voisin de 1, donc une suite exacte  $\tilde{\mathcal{F}}(t) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}'(t) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}''(t)$  sur  $\overset{\circ}{K}$  d'après ( $a_0$ ). Ceci signifie que  $\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}' \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}''$  est une suite exacte sur  $\overset{\circ}{K}_t$ , où  $\overset{\circ}{K}_t = m(t \times K)$ . Or pour  $t > 1$ ,  $\overset{\circ}{K}_t \supset K$  et l'assertion (a) est démontrée.

(b) Posons  $I = [0, 1] \cap J$ . Les applications  $u$  et  $v$  définissent des morphismes non nécessairement analytiques mais continus

$$B(K, \tilde{\mathcal{F}})|_I \xrightarrow{u} B(K, \tilde{\mathcal{F}}')|_I \xrightarrow{v} B(K, \tilde{\mathcal{F}}'')|_I$$

de fibrés vectoriels. Comme on a une suite exacte pour  $t = 1$ , on a encore une suite exacte pour  $t \in I$  suffisamment voisin de 1. Mais pour  $t < 1$ ,  $u(t)$  et  $v(t)$  sont induits par des homomorphismes de faisceaux définis au voisinage de  $K_t$ , et on peut appliquer  $(a_0)$ . D'où une suite exacte de faisceaux sur  $\overset{\circ}{K}_t$ . Comme

$$\bigcup_{t_0 < t < 1} \overset{\circ}{K}_t = \overset{\circ}{K},$$

le lemme est démontré.

### 3. Faisceaux anaplats.

Soient  $S$  un espace analytique banachique et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ .

DÉFINITION. Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau  $\mathcal{O}_S \times U$ -module sur  $S \times U$ . Nous dirons que  $\mathcal{F}$  est  $S$ -anaplat si, pour tout point  $(s, x) \in S \times U$ , il existe une résolution finie

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_p \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

de  $\mathcal{F}$  sur un voisinage de  $(s, x)$  dans  $S \times U$  telle que

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_p(s) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_0(s) \rightarrow \mathcal{F}(s) \rightarrow 0$$

soit une suite exacte.

#### Remarques.

1) Il suffit de supposer  $0 \rightarrow \mathcal{L}_p(s) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_0(s)$  exacte, l'exactitude de  $\mathcal{L}_1(s) \rightarrow \mathcal{L}_0(s) \rightarrow \mathcal{F}(s) \rightarrow 0$  étant automatique en vertu des propriétés du produit tensoriel.

2) Cette condition d'exactitude ne dépend pas du choix de la résolution de  $\mathcal{F}$  : elle signifie que

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_S} S \times U(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{pour } q > 0 .$$

3) Si  $S$  est de dimension finie, dire que  $\mathcal{F}$  est anaplat équivaut à dire que  $\mathcal{F}$  est cohérent et  $\mathcal{O}_S$ -plat.

Soient  $\mathcal{F}$  un faisceau  $S$ -anaplat sur  $S \times U$ ,  $s$  un point de  $S$ , et  $K \subset U$  un compact convexe  $\mathcal{F}(s)$ -privilegié. D'après le théorème A sous la forme que nous lui avons donné, il existe une résolution finie

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_p \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

de  $\mathcal{F}$  sur  $s \times K$ . Cette résolution définit un complexe de fibrés analytiques banachiques  $B(K, \mathcal{L}_*)$  :

$$0 \rightarrow B(K, \mathcal{L}_p) \rightarrow \dots \rightarrow B(K, \mathcal{L}_0)$$

au voisinage de  $s$  dans  $S$ . Ce complexe est direct et acyclique en degrés  $> 0$  en  $s$ , donc encore au voisinage de  $s$ , et

$$H^0(B(K, \mathcal{L}_*)) = \mathrm{Coker}[d_1 : B(K, \mathcal{L}_1) \rightarrow B(K, \mathcal{L}_0)]$$

est un fibré banachique trivial au voisinage de  $s$ . Il résulte du corollaire 2 du théorème 1 de l'exposé sur les théorèmes A et B que ce fibré vectoriel est indépendant, à un isomorphisme canonique près, du choix de la résolution  $\mathcal{L}_*$  de  $\mathcal{F}$  ; nous le noterons  $B(K, \mathcal{F})$ .

Pour  $s'$  voisin de  $s$ , il résulte du lemme 1(a) et de l'exactitude à droite du produit tensoriel que  $\mathcal{L}_*(s')$  est une résolution de  $\mathcal{F}(s')$  sur  $K$ . Par suite  $K$  est  $\mathcal{F}(s')$ -privilegié et la fibre de  $B(K, \mathcal{F})$  en  $s'$  n'est

autre que  $B(K, \mathcal{F}(s'))$ . L'ensemble  $S'$  des points  $s \in S$  tels que  $K$  soit  $\mathcal{F}(s)$ -privilegié est ouvert dans  $S$  et les fibrés vectoriels construits localement se recollent en un fibré vectoriel  $B(K, \mathcal{F})$  sur  $S'$ .

PROPOSITION 1. Soient  $\mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{F}''$  des faisceaux  $S$ -anaplats sur  $S \times U$ , et  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ ,  $g : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}''$  des homomorphismes tels que  $g \circ f = 0$ . Soit  $(s, x)$  un point de  $S \times U$ ; si  $\mathcal{F}(s) \rightarrow \mathcal{F}'(s) \rightarrow \mathcal{F}''(s)$  est une suite exacte en  $x$ , la suite  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}''$  est exacte au voisinage de  $(s, x)$ .

Démonstration. (a) Exactitude au point  $(s, x)$  : Soit  $K \subset U$  un voisinage privilégié de  $x$  pour  $f(s)$  et  $g(s)$ , i.e. pour le noyau, l'image et le conoyau de ces homomorphismes ;  $f$  et  $g$  définissent des morphismes de fibrés

$$B(K, \mathcal{F}) \rightarrow B(K, \mathcal{F}') \rightarrow B(K, \mathcal{F}'') .$$

On a une suite exacte directe au point  $s$ , donc une suite exacte directe de fibrés triviaux sur un voisinage  $V$  de  $s$  dans  $S$ . Pour  $S' \subset S$ , notons  $B_{S'}(K, \mathcal{F})$  l'espace vectoriel des sections de  $B(K, \mathcal{F})$  sur  $S'$ . Si  $S' \subset V$ , on a une suite exacte

$$B_{S'}(K, \mathcal{F}) \rightarrow B_{S'}(K, \mathcal{F}') \rightarrow B_{S'}(K, \mathcal{F}'') .$$

En passant à la limite inductive sur les voisinages ouverts de  $s$  dans  $S$  et sur les voisinages privilégiés de  $x$  dans  $U$ , on obtient une suite exacte

$$\mathcal{F}_{(s,x)} \rightarrow \mathcal{F}'_{(s,x)} \rightarrow \mathcal{F}''_{(s,x)} .$$

(b) Exactitude au voisinage de  $(s, x)$  : soit  $K$  un voisinage privilégié de  $x$  pour  $f(s)$  et  $g(s)$ . Pour  $s'$  suffisamment voisin de  $s$ , on a une suite exacte directe

$$B(K, \mathcal{F}(s')) \rightarrow B(K, \mathcal{F}'(s')) \rightarrow B(K, \mathcal{F}''(s'))$$

et d'après le lemme 1 (a) ,

$$\mathcal{F}(s') \rightarrow \mathcal{F}'(s') \rightarrow \mathcal{F}''(s')$$

est une suite exacte en tout point  $x' \in K$  . L'hypothèse du lemme 2 est donc vérifiée en tout point suffisamment voisin de  $(s, x)$ , et la proposition est démontrée.

COROLLAIRE. Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau  $S$ -anaplat sur  $S \times U$  . L'ensemble  $\text{supp } \mathcal{F}$  des points  $(s, x)$  de  $S \times U$  tels que  $\mathcal{F}_{s, x} \neq 0$  est fermé dans  $S \times U$  .

Démonstration. Si  $\mathcal{F}_{s, x} = 0$  , on a en  $x$  une suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{F}(s) \rightarrow 0$ , donc  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$  est une suite exacte au voisinage de  $(s, x)$ .

PROPOSITION 2. (Changement de base) Soient  $\mathcal{F}$  un faisceau  $S$ -anaplat sur  $S \times U$  ,  $S'$  un espace analytique banachique et  $f : S' \rightarrow S$  un morphisme. Le faisceau  $\mathcal{F}' = (f \times \text{Id}_U)^* \mathcal{F}$  sur  $S' \times U$  est  $S'$ -anaplat.

Démonstration. Soit  $s' \in S'$  et  $s = f(s') \in S$  . Si

$$\mathcal{L}_* : 0 \rightarrow \mathcal{L}_p \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

est une résolution de  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $(s, x)$ , le complexe  $\mathcal{L}_*^! = (f \times \text{Id})^* \mathcal{L}_*$  est une résolution de  $\mathcal{F}'$  au voisinage de  $(s', x)$ . En effet

$$\mathcal{L}_1^! \rightarrow \mathcal{L}_0^! \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow 0$$

est exacte d'après les propriétés du produit tensoriel<sup>et</sup>  $0 \rightarrow \mathcal{L}_p^! \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_0^!$

est exacte d'après la proposition 1, le complexe  $\mathcal{L}_*^!(s') = \mathcal{L}_*(s)$  étant acyclique en degré  $> 0$ .

PROPOSITION 3. Soit  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  une suite exacte de faisceaux  $\mathcal{O}_{S \times U}$ -modules sur  $S \times U$ .

(a) Si  $\mathcal{F}'$  et  $\mathcal{F}''$  sont S-anaplat,  $\mathcal{F}$  est S-anaplat.

(b) Si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}''$  sont S-anaplat,  $\mathcal{F}'$  est S-anaplat.

(c) Supposons  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  S-anaplat ; pour que  $\mathcal{F}''$  soit S-anaplat, il faut et il suffit que pour tout  $s \in S$ , l'homomorphisme  $\mathcal{F}'(s) \rightarrow \mathcal{F}(s)$  soit injectif.

Démonstration. (a) Soient  $\mathcal{L}'_*$  et  $\mathcal{L}''_*$  des résolutions de  $\mathcal{F}'$  et  $\mathcal{F}''$  au voisinage de  $(s, x)$ . On peut construire une résolution  $\mathcal{L}_*$  de  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $(s, x)$  telle que  $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}'_k \oplus \mathcal{L}''_k$ , et la suite exacte des Tor montre que

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_{S \times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{pour } q > 0.$$

(b) Soient  $\mathcal{L}_*$  et  $\mathcal{L}''_*$  des résolutions de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}''$  au voisinage de  $(s, x)$ . On peut construire une résolution  $\mathcal{L}'_*$  de  $\mathcal{F}'$  au voisinage de  $(s, x)$  telle que  $\mathcal{L}'_k = \mathcal{L}_k \oplus \mathcal{L}''_{k+1}$  pour  $k \neq 1$  et  $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}''_2 \oplus \mathcal{L}''_0$ ; la suite exacte des Tor montre que

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_{S \times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}') = 0 \quad \text{pour } q > 0.$$

(c) Soient  $\mathcal{L}_*$  et  $\mathcal{L}'_*$  des résolutions de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  au voisinage de  $(s, x)$ . On peut construire une résolution  $\mathcal{L}''_*$  de  $\mathcal{F}''$  au voisinage de  $(s, x)$  telle que  $\mathcal{L}''_k = \mathcal{L}_k \oplus \mathcal{L}'_{k-1}$ ; la suite exacte des Tor montre que

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_{S \times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}'') = 0 \quad \text{pour } q > 1$$

et que

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S \times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}'') = 0$$

en  $(s, x)$  si et seulement si  $\mathcal{F}'(s) \rightarrow \mathcal{F}(s)$  est injective en  $x$ . La proposition est démontrée.

PROPOSITION 4. Soient  $\mathcal{F}$  un faisceau S-anaplat sur  $S \times U$ , et  $(s, x) \in S \times U$ .

Toute résolution finie de  $\mathcal{F}(s)$  en  $x$  provient d'une résolution de  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $(s, x)$ .



Démonstration par récurrence sur la longueur de la résolution. La résolution donnée de  $\mathcal{F}(s)$  en  $x$  peut se mettre sous la forme

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_p(s) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_0(s) \rightarrow \mathcal{F}(s) \rightarrow 0,$$

où les  $\mathcal{L}_k$  sont des faisceaux  $\mathcal{O}_{S \times U}$ -modules libres de type fini sur  $S \times U$ , les homomorphismes étant définis au voisinage de  $x$  dans  $U$ . Comme

$\mathcal{F}_{(s,x)} \rightarrow \mathcal{F}(s)_x$  est surjectif, il existe un homomorphisme  $\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{F}$  défini au voisinage de  $(s,x)$  induisant l'homomorphisme donné  $\mathcal{L}_0(s) \rightarrow \mathcal{F}(s)$  en  $x$ . D'après la proposition 1, cet homomorphisme  $\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{F}$  est surjectif au voisinage de  $(s,x)$ , et son noyau  $\mathcal{F}_1$  est  $S$ -anaplat d'après la proposition 3 (b). Enfin comme

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S \times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}) = 0,$$

on a

$$\mathcal{F}_1(s) = \mathrm{Ker}[\mathcal{L}_0(s) \rightarrow \mathcal{F}(s)];$$

par hypothèse de récurrence la résolution

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_p(s) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_1(s) \rightarrow \mathcal{F}_1(s) \rightarrow 0$$

de  $\mathcal{F}_1(s)$  en  $x$  provient d'une résolution

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_p \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow 0$$

de  $\mathcal{F}_1$  au voisinage de  $(s,x)$  et

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_p \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

est une résolution de  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $(s,x)$ , ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 5. Soit  $U = U' \times U''$ , où  $U' \subset \underline{\mathbb{C}}^{n'}$ ,  $U'' \subset \underline{\mathbb{C}}^{n''}$ ,  $n' + n'' = n$ .

Soient  $\mathcal{F}'$  et  $\mathcal{F}''$  des faisceaux S-anaplat sur  $S \times U'$  et  $S \times U''$  respecti-  
vement. Le faisceau  $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \boxtimes_{\mathcal{O}_{S \times U'}} \mathcal{O}_{S \times U} \boxtimes_{\mathcal{O}_{S \times U''}} \mathcal{F}''$  sur  $S \times U$  est  
S-anaplat.

Démonstration. Soient  $\mathcal{L}'_*$  et  $\mathcal{L}''_*$  des résolutions de  $\mathcal{F}'$  et  $\mathcal{F}''$  au voisi-  
nage de  $(s, x')$  et  $(s, x'')$  respectivement. Les complexes  $\mathcal{L}'_*(s)$  et  $\mathcal{L}''_*(s)$   
sont des résolutions de  $\mathcal{F}'(s)$  et  $\mathcal{F}''(s)$  en  $x'$  et  $x''$  respectivement, et

$$\mathcal{L}_* = \mathcal{L}'_* \boxtimes_{\mathcal{O}_{S \times U'}} \mathcal{O}_{S \times U} \boxtimes_{\mathcal{O}_{S \times U''}} \mathcal{L}''_*$$

est un complexe tel que  $\mathcal{L}_*(s)$  soit une résolution de  $\mathcal{F}(s)$  en  $(x', x'')$ .

Il résulte de la proposition 1 et des propriétés du produit tensoriel que  $\mathcal{L}_*$   
est une résolution de  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $(s, x', x'')$ , et la proposition est  
démontrée.

#### 4. Morphisme défini par un faisceau.

Soient  $S$  un espace analytique banachique,  $U$  un ouvert de  $\underline{\mathbb{C}}^n$ , soit  
 $\mathcal{E}$  un faisceau analytique cohérent sur  $U$ , notons  $\mathcal{E}_S$  le faisceau  $\pi^* \mathcal{E}$   
sur  $S \times U$ , où  $\pi$  désigne la projection de  $S \times U$  sur  $U$ . Soient  $K \subset U$   
un compact convexe  $\mathcal{E}$ -privilegié et  $\mathcal{F}$  un sous-faisceau de  $\mathcal{E}_S$  tel que  
 $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$  soit S-anaplat (ce qui équivaut à dire que  $\mathcal{F}$  est S-anaplat et  
 $\mathcal{F}(s) \rightarrow \mathcal{E}$  injectif pour tout  $s \in S$ ).

L'ensemble  $S_1$  des  $s \in S$  tels que  $K$  soit privilegié pour  $\mathcal{F}(s)$  et  
 $\mathcal{E}/\mathcal{F}(s)$  est ouvert dans  $S$  et on a sur  $S_1$  une suite exacte directe de  
fibrés analytiques banachiques

$$0 \rightarrow B(K, \mathcal{F}) \rightarrow B(K, \mathcal{E})_S \rightarrow B(K, \mathcal{E}_S/\mathcal{F}) \rightarrow 0,$$

où  $B(K, \mathcal{E})_S$  désigne le fibré trivial sur  $S$  de fibre  $B(K, \mathcal{E})$ .

Soit  $\mathcal{F}_K(\mathcal{E})$  l'ouvert de  $\mathcal{F}_{B(K)}(B(K, \mathcal{E}))$  formé des sous  $B(K)$ -modules de  $B(K, \mathcal{E})$  admettant une résolution finie directe. Nous allons définir un morphisme  $\beta_K(\mathcal{F})$  de  $S_1$  dans  $\mathcal{F}_K(\mathcal{E})$  tel que  $\beta_K(\mathcal{F})(s) = B(K, \mathcal{F}(s))$  pour tout point  $s$  de  $S_1$ .

Soit  $s$  un point de  $S_1$ . D'après le théorème A, il existe une résolution finie de  $\mathcal{F}$  sur  $s \times K$ , qu'on peut écrire comme une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_p \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{E}_S \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_k = \mathcal{O}_{S \times U}^{r_k}.$$

On en déduit un complexe analytique de fibrés vectoriels

$$0 \rightarrow B(K, \mathcal{L}_p) \rightarrow \dots \rightarrow B(K, \mathcal{L}_0) \rightarrow B(K, \mathcal{E}_S)$$

au voisinage de  $s$ , qui donne une suite exacte directe en  $s$ , donc sur un voisinage  $V$  de  $s$ . D'où un morphisme de  $V$  dans

$$\mathcal{F}_K(0, \mathcal{O}_U^{r_p}, \dots, \mathcal{O}_U^{r_0}, \mathcal{E}) = \mathcal{F}_{B(K)}(0, B(K)^{r_p}, \dots, B(K)^{r_0}, B(K, \mathcal{E})).$$

En composant avec le morphisme

$$\mathcal{F}_K(0, \mathcal{O}_U^{r_p}, \dots, \mathcal{O}_U^{r_0}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{F}_K(\mathcal{E}),$$

on obtient un morphisme de  $V$  dans  $\mathcal{F}_K(\mathcal{E})$ .

Ce morphisme ne dépend pas du choix de la résolution de  $\mathcal{F}$  sur  $s \times K$  : cela résulte du corollaire 2 du théorème 1 de l'exposé sur les théorèmes A et B, qui donne une équivalence d'homotopie entre deux résolutions. Les morphismes ainsi définis localement se recollent en un morphisme  $\beta_K(\mathcal{F})$  de  $S_1$  dans  $\mathcal{F}_K(\mathcal{E})$ .

Il est immédiat à partir des définitions qu'on a la propriété de fonctorialité suivante : Soit  $f : S' \rightarrow S$  un morphisme d'espaces analytiques banachiques, et posons  $\mathcal{F}' = (f \times \text{Id})^* \mathcal{F}$ . Le faisceau  $\mathcal{F}'$  est un sous-faisceau de  $\mathcal{E}_S$ , tel que  $\mathcal{E}_S / \mathcal{F}'$  soit  $S'$ -anaplat ; définissons  $S'_1$  comme  $S_1$ . Alors  $S'_1 = f^{-1}(S_1)$  et

$$\beta_K(\mathcal{F}') = \beta_K(\mathcal{F}) \circ f : S'_1 \rightarrow \mathcal{F}_K(\mathcal{E}).$$

### 5. Faisceau défini par un morphisme.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ , soit  $\mathcal{E}$  un faisceau analytique cohérent sur  $U$ , soit  $K \subset U$  un compact convexe  $\mathcal{E}$ -privilegié d'intérieur non vide ; rappelons qu'on note  $\mathcal{F}_K(\mathcal{E})$  l'ouvert de  $\mathcal{F}_{B(K)}(B(K, \mathcal{E}))$  formé des sous modules de  $B(K, \mathcal{E})$  admettant une résolution finie directe.

Soient  $S$  un espace analytique banachique et  $f$  un morphisme de  $S$  dans  $\mathcal{F}_K(\mathcal{E})$ . Nous allons associer à  $f$  un sous faisceau  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E}_S$  restreint à  $S \times \overset{\circ}{K}$  tel que  $\mathcal{E}_S / \mathcal{F}$  soit anaplat sur  $S \times \overset{\circ}{K}$ .

Soient  $s$  un point de  $S$ , et  $F = f(s) \in \mathcal{F}_K(\mathcal{E})$ . Le module  $F$  admet une résolution finie directe, i.e. une suite exacte directe

$$0 \rightarrow B(K)^{r_p} \rightarrow \dots \rightarrow B(K)^{r_0} \xrightarrow{\mathcal{E}} B(K, \mathcal{E})$$

telle que  $\text{Im } \mathcal{E} = F$ . Considérons

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{B(K)}(0, B(K)^{r_p}, \dots, B(K)^{r_0}, B(K, \mathcal{E})) ;$$

le morphisme  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_K(\mathcal{E})$  admettant des sections locales, il existe un voisinage  $S'$  de  $s$  dans  $S$  tel que  $f|_{S'}$  se factorise en un morphisme

$g : S' \rightarrow \mathcal{Y}$ . Au dessus de  $S' \times \overset{\circ}{K}$ , le morphisme  $g$  donne naissance à un complexe de faisceaux

$$\mathcal{L}_* : 0 \rightarrow \mathcal{O}_{S \times U}^{r_p} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}_{S \times U}^{r_0} \rightarrow \mathcal{E}_S.$$

Il résulte du lemme 1 (b) que pour tout point  $s' \in S'$ , le complexe

$$\mathcal{L}_*(s') : 0 \rightarrow \mathcal{O}_S^{r_p} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}_S^{r_0} \rightarrow \mathcal{E}$$

est une suite exacte sur  $\overset{\circ}{K}$ , et la proposition 1 montre que  $\mathcal{L}_*$  est une suite exacte sur  $S' \times \overset{\circ}{K}$ . L'image  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{O}_{S \times U}^{r_0} \rightarrow \mathcal{E}_S$  est donc un sous faisceau anaplat de  $\mathcal{E}_S$  au dessus de  $S' \times \overset{\circ}{K}$  et la proposition 3 (c) montre que  $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$  est anaplat.

Le faisceau  $\mathcal{F}$  ne dépend pas du choix du relèvement  $g$  de  $\mathcal{F}$  : on le vérifie à l'aide du lemme utilisé dans la démonstration de la proposition 3 de l'exposé précédent. Les faisceaux ainsi construits localement se recollent en un sous faisceau  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E}_S$  sur  $S \times \overset{\circ}{K}$ .

On a la propriété de fonctorialité suivante : si  $h : S' \rightarrow S$  est un morphisme d'espaces analytiques banachiques, le faisceau associé à  $f \circ h : S' \rightarrow \mathcal{Y}_K(\mathcal{E})$  est  $\mathcal{F}' = (h \times I_{\overset{\circ}{K}})^* \mathcal{F}$ . En particulier, si on note  $\mathcal{R}$  le sous faisceau de  $\mathcal{E}_{\mathcal{Y}_K(\mathcal{E})}$  restreint à  $\mathcal{Y}_K(\mathcal{E}) \times \overset{\circ}{K}$  associé au morphisme identique de  $\mathcal{Y}_K(\mathcal{E})$ , le faisceau  $\mathcal{F}$  associé à  $f : S \rightarrow \mathcal{Y}_K(\mathcal{E})$  n'est autre que  $(f \times I_{\overset{\circ}{K}})^* \mathcal{R}$ . Le faisceau  $\mathcal{R}$  sera dans la suite qualifié d'universel.

## 6. Aller-retours.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ , soit  $\mathcal{E}$  un faisceau analytique cohérent sur  $U$ , soient  $K \subset U$  un compact  $\mathcal{E}$ -privilegié, d'intérieur non vide.

Si  $S$  est un espace analytique banachique et  $\mathcal{F}$  un sous faisceau de  $\mathcal{E}_S$  tel que  $\mathcal{E}_S/\mathcal{F}$  soit  $S$ -anaplat, on a associé à  $\mathcal{F}$  un morphisme  $\beta_K(\mathcal{F})$  d'un ouvert  $S_1$  de  $S$  dans  $\mathcal{G}_K(\mathcal{E})$ . Le faisceau  $(\beta_K(\mathcal{F}) \times I_0)_K^* \mathcal{A}$  associé à  $\beta_K(\mathcal{F})$  n'est autre que la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $S_1 \times \overset{\circ}{K}$ . Cela résulte des constructions.

Soit  $K' \subset \overset{\circ}{K}$  un compact  $\mathcal{E}$ -privilegié. Le faisceau universel  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{G}_K(\mathcal{E}) \times \overset{\circ}{K}$  définit un morphisme  $\beta_{K'}(\mathcal{A})$  d'un ouvert  $\mathcal{G}_1$  de  $\mathcal{G}_K(\mathcal{E})$  dans  $\mathcal{G}_{K'}(\mathcal{E})$ . Avec les notations du n°5 de l'exposé précédent,  $\rho_0: B(K) \rightarrow B(K')$  et  $\rho_1: B(K, \mathcal{E}) \longrightarrow B(K', \mathcal{E})$  désignant les restrictions, on a  $\mathcal{G}_1 \subset W$  et  $\beta_{K'}(\mathcal{A})$  est la restriction à  $\mathcal{G}_1$  du morphisme  $\rho_*$  défini dans la proposition 3 dudit exposé. Cela résulte encore des constructions.

Comme  $\rho_0$  et  $\rho_1$  sont des applications compactes, on peut appliquer la proposition 4 dudit exposé : le morphisme  $\beta_{K'}(\mathcal{A})$  est compact en tout point.

## 7. Faisceaux $S$ -anaplats sur $S \times X$ .

Soient  $S$  un espace analytique banachique,  $X$  un espace analytique de dimension finie,  $\mathcal{F}$  un faisceau  $\mathcal{O}_{S \times X}$ -module sur  $S \times X$ . Si  $\varphi: X_1 \rightarrow U$  est un isomorphisme d'un ouvert  $X_1$  de  $X$  sur un sous espace analytique fermé  $Y$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}^n$ , posons

$$\varphi_S = I_S \times \varphi: S \times X_1 \rightarrow S \times U.$$

Le faisceau  $\varphi_{S*} \mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_{S \times U}$ -module qui a pour fibre  $\mathcal{F}_{(s,x)}$  en  $(s, \varphi(x))$  et 0 sur  $S \times (U-Y)$ .

PROPOSITION 6. Soient  $U'$  et  $U''$  des ouverts de  $\underline{\mathbb{C}}^{n'}$  et  $\underline{\mathbb{C}}^{n''}$  respectivement,  
 $X_1$  un ouvert de  $X$ ,  $\varphi'$  et  $\varphi''$  des isomorphismes de  $X_1$  sur des sous espaces  
analytiques fermés  $Y'$  et  $Y''$  de  $U'$  et  $U''$  respectivement. Si  $\varphi'_{S*} \mathcal{F}$   
est  $S$ -anaplat, il en est de même de  $\varphi''_{S*} \mathcal{F}$ .

Traisons d'abord un cas particulier :

LEMME 2. Soient  $U'$  un ouvert de  $\underline{\mathbb{C}}^{n'}$ ,  $U''$  un voisinage de  $0$  dans  $\underline{\mathbb{C}}^{n''}$ ,  
 $U = U' \times U'' \subset \underline{\mathbb{C}}^n$ ,  $n = n' + n''$ , et soit  $i : U' \rightarrow U$  l'injection  $x' \mapsto (x', 0)$ .  
Soient  $\mathcal{F}'$  un faisceau  $\mathcal{O}_{S \times U'}$ -module sur  $S \times U'$  et  $\mathcal{F} = i_{S*} \mathcal{F}'$ . Le faisceau  
 $\mathcal{O}_{S \times U}$ -module  $\mathcal{F}$  est  $S$ -anaplat si et seulement si  $\mathcal{F}'$  est  $S$ -anaplat.

Démonstration.

(a)  $\mathcal{F}'$  anaplat  $\Rightarrow \mathcal{F}$  anaplat. Soit  $\mathcal{C}$  le faisceau  $\mathcal{O}_{U''}/\underline{m}$  sur  $U''$ , où  
 $\underline{m}$  est l'idéal maximal de l'origine. On a

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U'}} \mathcal{O}_{S \times U} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U''}} \mathcal{C}_S$$

et l'assertion (a) résulte de la proposition 5.

(b)  $\mathcal{F}$  anaplat  $\Rightarrow \mathcal{F}'$  anaplat. Soit  $(s, x')$  un point de  $S \times U'$ . Le  
faisceau  $\mathcal{F}(s) = i_{S*} \mathcal{F}'(s)$  est cohérent, donc  $\mathcal{F}'(s)$  est cohérent et admet au  
voisinage de  $x'$  une résolution finie

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{U'}^{r_p} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}^{r_0} \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathcal{F}'(s) \rightarrow 0.$$

Nous démontrons l'assertion (b) par récurrence sur  $p$ . L'homomorphisme  $\mathcal{E}$  se  
relève en  $\bar{\mathcal{E}} : \mathcal{O}_{S \times U'}^{r_0} \rightarrow \mathcal{F}'$  au voisinage de  $(s, x')$ ; posons  $\mathcal{F}'_1 = \text{Ker } \bar{\mathcal{E}}$ .  
D'après la proposition 1, l'homomorphisme

$$i_{S*} \bar{\mathcal{E}} : i_{S*} \mathcal{O}_{S \times U'}^{r_0} \rightarrow \mathcal{F}$$

est surjectif au voisinage de  $(s, x', 0)$ , et la proposition 3 montre que son

noyau  $\mathcal{F}_1 = i_{S*} \mathcal{F}'_1$  est anaplat et que  $\mathcal{F}_1(s) = \text{Ker } i_* \mathcal{E} = i_* \text{Ker } \mathcal{E}$ .

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence :  $\mathcal{F}'_1$  est S-anaplat au voisinage de  $(s, x')$ . Il en résulte que  $\mathcal{F}'$  est S-anaplat au voisinage de  $(s, x')$  et le lemme est démontré.

Démonstration de la proposition. Posons

$$U = U' \times U'' \quad \text{et} \quad \varphi = (\varphi', \varphi'') : X_1 \rightarrow U ;$$

nous allons montrer que  $\varphi_{S*} \mathcal{F}$  est S-anaplat si et seulement si  $\varphi'_{S*} \mathcal{F}$  l'est. Soit  $x \in X_1$ . Il existe un morphisme  $h : U'_1 \rightarrow U''$ , où  $U'_1$  est un voisinage de  $\varphi'(x)$  dans  $U'$ , tel que  $\varphi'' = h \circ \varphi'$  au voisinage de  $x$ ; d'où  $\varphi = j \circ \varphi'$ , où  $j : U'_1 \rightarrow U$  est l'immersion  $x' \mapsto (x', h(x'))$ . Quitte à rétrécir  $U'_1$ , on peut définir un isomorphisme

$$\psi : U_1 \rightarrow U'_1 \times U''_1 ,$$

où  $U_1$  est un voisinage de  $\varphi(x)$  dans  $U$  et  $U''_1$  un voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}^n$ , par  $\psi(x', x'') = (x', x'' - h(x'))$ . Le lemme montre alors que  $\varphi_{S*} \mathcal{F}$  est S-anaplat sur  $S \times U_1$  si et seulement si  $\varphi'_{S*} \mathcal{F}$  est S-anaplat sur  $S \times U'_1$ . Par suite,  $\varphi'_{S*} \mathcal{F}$  anaplat  $\Leftrightarrow \varphi_{S*} \mathcal{F}$  anaplat  $\Leftrightarrow \varphi''_{S*} \mathcal{F}$  anaplat, et la proposition est démontrée.

DÉFINITION. Nous dirons que le faisceau  $\mathcal{O}_S \times X$ -module  $\mathcal{F}$  est S-anaplat si, pour tout point  $x$  de  $X$ , il existe un voisinage ouvert  $X_1$  de  $x$  dans  $X$ , et un isomorphisme  $\varphi$  de  $X_1$  sur un sous espace analytique fermé d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}^n$ , tel que le faisceau  $\mathcal{O}_S \times U$ -module  $\varphi_{S*} \mathcal{F}$  soit S-anaplat.