

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A. DOUADY

**Les théorèmes A et B pour un polycylindre de dimension finie
dans un espace analytique banachique**

Séminaire Jean Leray, n° 4 (1964-1965), p. 48-59

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965__4_48_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES THÉORÈMES A ET B

POUR UN POLYCYLINDRE DE DIMENSION FINIE DANS UN ESPACE ANALYTIQUE BANACHIQUE

par

A. DOUADY

Si (X, Φ) est un espace analytique banachique, on notera $\mathcal{O}_X$ le faisceau $\Phi(\underline{\mathbb{C}})$ sur X . Dans tout cet exposé, S désignera un espace analytique banachique muni d'un point de base s_0 , et U un ouvert de $\underline{\mathbb{C}}^n$. Nous nous proposons de démontrer les théorèmes A et B pour un compact $s_0 \times K$, où $K \subset U$ est un compact convexe de la forme $K_1 \times \dots \times K_n$, et pour un faisceau $\mathcal{F}$ qui soit un $\mathcal{O}_S \times U$ -module admettant localement une résolution finie.

1. Le théorème de Dolbeault.

THÉORÈME 1. Si $K \subset U$ est un compact convexe de la forme $K_1 \times \dots \times K_n$, $K_i \subset \underline{\mathbb{C}}$, on a $H^p(\{s_0\} \times K, \mathcal{O}_{S \times U}) = 0$ pour $p > 0$.

Démonstration. Pour tout ouvert V de $\underline{\mathbb{C}}^n$, et pour $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, notons $\mathcal{Q}_{i_1, \dots, i_p}(V)$ l'espace vectoriel des formes $f.d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p}$ telles que

$$\frac{\partial^{q_f}}{\partial \bar{z}_{j_1} \dots \partial \bar{z}_{j_q}}$$

soit une fonction continue sur V pour toutes les suites $j_1, \dots, j_q$ telles que

$$1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n \quad \text{et} \quad \{j_1, \dots, j_q\} \cap \{i_1, \dots, i_p\} = \emptyset.$$

On définit ainsi un faisceau $\mathcal{Q}_{i_1, \dots, i_p}$ sur $\underline{\mathbb{C}}^n$. Posons

$$\mathcal{Q}^p = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \mathcal{Q}_{i_1, \dots, i_p}.$$

Si $L = L_1 \times \dots \times L_n \subset \underline{\mathbb{C}}^n$ est un compact convexe d'intérieur non vide, notons $\mathcal{Q}_{i_1, \dots, i_p}(L)$ l'espace de Banach des formes $f.d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p}$ telles que la distribution

$$\frac{\partial^{q_f}}{\partial \bar{z}_{j_1} \dots \partial \bar{z}_{j_q}}$$

sur $\overset{\circ}{L}$ soit induite par une fonction continue sur L pour toutes les suites $j_1, \dots, j_q$ comme ci-dessus, muni de la norme

$$\sup_{j_1, \dots, j_q} \left\| \frac{\partial^{q_f}}{\partial \bar{z}_{j_1} \dots \partial \bar{z}_{j_q}} \right\|.$$

Posons encore $\mathcal{Q}^p(L) = \bigoplus_{i_1, \dots, i_p} \mathcal{Q}_{i_1, \dots, i_p}(L)$. On a les propriétés suivantes :

$$(a) : \quad Q_{i_1, \dots, i_p}(L) = Q^{\delta_1}(L_1) \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} \dots \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} Q^{\delta_n}(L_n) ,$$

où $\delta_i = 1$ pour $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$ et 0 sinon.

Quand on plonge $Q^{\delta_1}(L_1) \otimes \dots \otimes Q^{\delta_n}(L_n)$ dans $Q_{i_1, \dots, i_p}(L)$, la norme induite coïncide avec la norme $\mathcal{E}$ sur le produit tensoriel. On peut en effet identifier $Q^1(L_i)$ à $\mathcal{C}(L_i)$ et plonger $Q^0(L_i)$ dans $\mathcal{C}(L_i) \oplus \mathcal{C}(L_i)$ par $f \rightarrow (f, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i})$. Or on sait que si E' est un sous-espace d'un espace normé E muni de la norme induite, $E' \otimes_{\mathcal{E}} F$ est un sous-espace de $E \otimes_{\mathcal{E}} F$ muni de la norme induite et que $\mathcal{C}(L) = \mathcal{C}(L_1) \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} \dots \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} \mathcal{C}(L_n)$.

D'autre part $Q^{\delta_1}(L_1) \otimes \dots \otimes Q^{\delta_n}(L_n)$ est dense dans $Q_{i_1, \dots, i_p}(L)$, comme on le voit en approchant f d'abord par une fonction f_t définie au voisinage de L par $f_t(x) = f(ta + (1-t)x)$, a étant un point intérieur à L , puis par un polynôme en les z_i et $\bar{z}_i$ par régularisation. Ceci démontre la propriété (a).

(b) : On a une suite exacte directe

$$0 \rightarrow B(L) \rightarrow Q^0(L) \xrightarrow{d''} \dots \rightarrow Q^n(L) \rightarrow 0 .$$

L'application $d'' : Q^0(L_i) \rightarrow Q^1(L_i)$ a pour noyau l'espace $B(L_i)$ défini à l'exposé précédent. En définissant $s : Q^1(L_i) \rightarrow Q^0(L_i)$ par $s(f.d\bar{z}_i) = \varphi * f$, où $\varphi(z) = \frac{1}{\pi z}$ et où f est prolongée par 0 sur $\mathbb{C} - L_i$, on a $d'' \circ s = I$. Le complexe $Q^*(L_i)$ est donc direct et a pour cohomologie

$$H^0(Q^*(L_i)) = B(L_i) , \quad H^1(Q^*(L_i)) = 0 .$$

Il en résulte que le complexe

$$Q^*(L) = Q^*(L_1) \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} \dots \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} Q^*(L_n)$$

est direct et acyclique en degrés > 0 , et que

$$H^0(Q^*(L)) = B(L_1) \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} \dots \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} B(L_n) = B(L) ,$$

ce qui démontre la propriété (b).

(c) : Pour tout ouvert $V \subset \mathbb{C}^n$, on a $Q^P(V) = \varprojlim Q^P(L)$, la limite projective étant prise sur les compacts convexes d'intérieur non vide de la forme

$L_1 \times \dots \times L_n$ contenus dans V , limite projective filtrante si V est un ouvert convexe de la forme $V_1 \times \dots \times V_n$.

(d) : Si $K = K_1 \times \dots \times K_n \subset U$ est un compact convexe, on a

$$H^0(K, Q^P) = \varinjlim Q^P(L) ,$$

limite inductive sur les voisinages compacts convexes de la forme

$L = L_1 \times \dots \times L_n$ de K dans U .

Faisons maintenant intervenir S . Notons $Q_S^P(L)$ (resp. $B_S(L)$) l'espace vectoriel des germes en s_0 de morphismes de S dans $Q^P(L)$ (resp. $B(L)$).

Il résulte de la propriété (b) qu'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow B_S(L) \rightarrow Q_S^0(L) \rightarrow \dots \rightarrow Q_S^n(L) \rightarrow 0 .$$

Définissons $Q_S^P(V)$ par $Q_S^P(V) = \varprojlim Q_S^P(L)$ comme dans la propriété (c). On vérifie en utilisant des partitions différentiables de l'unité sur $\mathbb{C}^n$ que le préfaisceau Q_S^P ainsi défini est un faisceau*. La même construction appliquée aux $B_S(L)$ donne le faisceau $\mathcal{C}_S \times U$.

On a encore $H^0(K, Q_S^P) = \varinjlim Q_S^P(L)$ comme dans la propriété (d), et $\mathcal{C}_S \times U(K) = \varinjlim B_S(L)$. Par passage à la limite inductive, on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(K, \mathcal{C}_S \times U) \rightarrow H^0(K, Q_S^0) \rightarrow \dots \rightarrow H^0(K, Q_S^n) \rightarrow 0 .$$

* Tout préfaisceau fin est un faisceau.

En remplaçant K par un espace réduit à un point, on voit que cette suite exacte correspond à une suite exacte de faisceaux sur K , qui forment une résolution finie de $\mathcal{O}_S \times U$, et ceci démontre le théorème.

COROLLAIRE 1. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_S \times U$ -module admettant une résolution finie sur K (i.e. une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_p \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F} \rightarrow 0 \text{ avec } \mathcal{L}_i = \mathcal{O}_{S \times U}^{r_i},$$

on a $H^q(K, \mathcal{F}) = 0$ pour $q > 0$ et la suite

$$0 \rightarrow H^0(K, \mathcal{L}_p) \rightarrow \dots \rightarrow H^0(K, \mathcal{L}_0) \rightarrow H^0(K, \mathcal{F}) \rightarrow 0$$

est exacte.

COROLLAIRE 2. Soient $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ deux $\mathcal{O}_S \times U$ -modules admettant des résolutions finies $\mathcal{L}'_*$ et $\mathcal{L}''_*$ sur K . Pour tout homomorphisme f de $\mathcal{F}'$ dans $\mathcal{F}''$, il existe un homomorphisme de $\mathcal{L}'_*$ dans $\mathcal{L}''_*$ au-dessus de f , unique à homotopie (algébrique) près.

(Cf. exposé précédent)

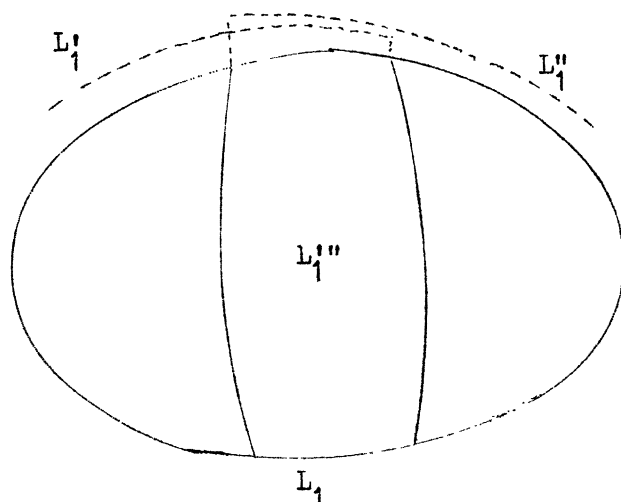
2. Le théorème des matrices holomorphes.

Soit $L \subset \mathbb{C}^n$ un compact convexe d'intérieur non vide de la forme

$L_1 \times \dots \times L_n$, et soient L'_1 et L''_1 deux compacts convexes de $\mathbb{C}$ tels que $L_1 = L'_1 \cup L''_1$, $\overline{L_1 - L'_1} \cap \overline{L_1 - L''_1} = \emptyset$. Posons

$$L'_1 = L'_1 \cap L''_1, \quad L' = L'_1 \times L_2 \times \dots \times L_n,$$

définissons de même L'' et L''' .



PROPOSITION 1. On a une suite exacte directe

$$0 \rightarrow B(L) \xrightarrow{\alpha} B(L') \oplus B(L'') \xrightarrow{\beta} B(L''') \rightarrow 0,$$

où

$$\alpha(f) = (f|_{L'}, f|_{L''})$$

et

$$\beta(f', f'') = f'''|_{L'''} - f'|_{L'''}.$$

Démonstration. Vu la proposition 3 de l'exposé précédent, il suffit de montrer qu'on a une suite exacte directe

$$0 \rightarrow B(L_1) \xrightarrow{\alpha} B(L_1') \oplus B(L_1'') \xrightarrow{\beta} B(L_1''') \rightarrow 0.$$

Construisons une application linéaire continue :

$$\sigma : B(L_1''') \rightarrow B(L_1') \oplus B(L_1'')$$

telle que $\beta \circ \sigma = I$. Soit η une fonction continûment $\mathbb{R}$ -différentiable sur $\mathbb{C}$, égale à 0 sur $L_1 - L_1''$ et à 1 sur $L_1 - L_1'$, et posons

$$\Theta = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}}. \text{ L'application } \sigma \text{ définie par } \sigma(h) = (\varphi * (\Theta h) - \eta h,$$

$\varphi * (\Theta h) + (1 - \eta)h$), où $\varphi(z) = \frac{1}{\pi z}$ et où Θh est prolongée par 0 en dehors de L_1''' , répond à la question. Comme $\text{Ker } \beta = B(L_1)$, ceci démontre la proposition.

Soit A une algèbre de Banach, G le groupe des éléments inversibles de A ; notons $B(L, G)$ l'ensemble des $f \in B(L, A)$ telles que $f(L) \subset G$, c'est-à-dire le groupe des éléments inversibles de l'algèbre de Banach $B(L, A)$.

L'ensemble $B(L, G)$ est ouvert dans $B(L, A)$ et est un groupe de Lie banachique.

PROPOSITION 2. L'application γ de $B(L', G) \times B(L'', G)$ dans $B(L''', G)$ définie par $\gamma(f', f'') = f''|_{L'''} f'|_{L'''}^{-1}$ est une submersion directe surjective.

Démonstration.

(a) γ est une submersion directe : l'application linéaire tangente

$$T_{(f', f'')}(\gamma) : B(L', A) \oplus B(L'', A) \rightarrow B(L''', A)$$

est égale à

$$\delta_{f'}^{-1} \circ \sigma_{f''} \circ \beta \circ (\sigma_{f'}^{-1} \oplus \sigma_{f''}^{-1}) ,$$

où $\sigma_{f'}$ (resp. $\delta_{f'}$) est la multiplication à gauche (resp. à droite) par f' ou par $f'|_{L''}$ et de même pour f'' , et où β est l'application définie dans la proposition 1. Comme β est un épimorphisme direct d'après la proposition 1 et que les autres sont des isomorphismes, γ est une submersion directe.

(b) γ est surjective.

LEMME. L'application de restriction $\rho : B(L'', G) \rightarrow B(L''', G)$ a une image dense.

Démonstration du lemme. D'après le Théorème de Runge, l'application de restriction $\rho_1 : B(L_1'') \rightarrow B(L_1''')$ a une image dense. Il en est donc de même de

$$\rho = \rho_1 \hat{\otimes} I_{B(L_2 \times \dots \times L_n)} \hat{\otimes}_C I_A : B(L'', A) \rightarrow B(L''', A) .$$

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} B(L'', A) & \xrightarrow{\exp} & B(L'', G) \\ \rho \downarrow & & \rho \downarrow \\ B(L''', A) & \xrightarrow{\exp} & B(L''', G) \end{array}$$

montre que l'adhérence H de $\rho(B(L'', G))$ dans $B(L''', G)$ contient l'image

de $B(L''', A)$ par $\exp$, donc est un voisinage de 0. Comme H est un sous-groupe de $B(L''', G)$, H est ouvert et fermé.

Soit a un point de L''' . Pour tout $h \in B(L''', G)$, la famille $(h_t)_{0 \leq t \leq 1}$ définie par $h_t(x) = h(tx + (1-t)a)$ est un chemin qui mène de l'application constante $h(a)$ à h dans $B(L''', G)$. Donc toute composante connexe de $B(L''', G)$ contient une application constante, et toute application constante appartenant à H , on a $H = B(L''', G)$, ce qui démontre le lemme.

Fin de la démonstration de la proposition 2.

Comme γ est une submersion, l'image de γ contient un voisinage ouvert W de 1 dans $B(L''', G)$. Soit $h \in B(L''', G)$, d'après le lemme, il existe un $h'' \in B(L'', G)$ tel que $\rho(h'') \in h.W^{-1}$. On a donc $h = \rho(h'')w$, où $w \in W$ se met sous la forme $\gamma(f', f'')$, d'où

$$h = \rho(h'') \cdot \gamma(f', f'') = \gamma(f', h''f''),$$

ce qui démontre la proposition.

Remarque. On pourrait, dans la proposition 2, remplacer G par un groupe de Lie banachique quelconque. Nous ne l'avons pas fait pour éviter d'avoir à décrire la structure de groupe de Lie banachique sur $B(L, G)$.

COROLLAIRE 1. Notons $B_S(L', G)$ l'ensemble des germes en s_0 de morphismes de S dans $B(L', G)$, et de même pour L'' , L''' . L'application γ_S de $B_S(L', G) \times B_S(L'', G)$ dans $B_S(L''', G)$ induite par γ est surjective.

Démonstration.

Soit $h \in B_S(L''', G)$. D'après la proposition 2, on peut trouver une section locale de γ au voisinage de $h_0 = h(s_0)$, c'est-à-dire une applica-

tion analytique $\sigma: W \rightarrow B(L', G) \times B(L'', G)$, où W est un voisinage de h_0 dans $B(L''', G)$, telle que $\gamma \circ \sigma = I$. En posant $f = \sigma \circ h$, on a $h = \gamma_S(f)$, d'où le corollaire.

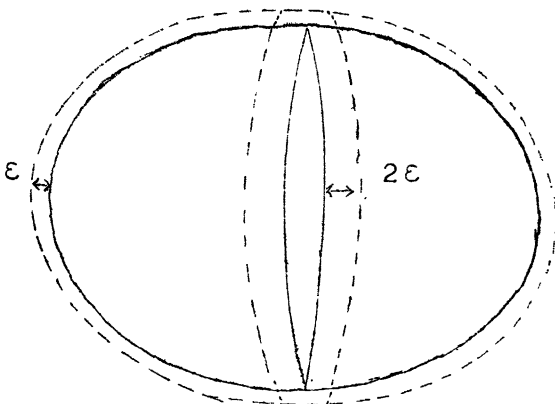
Soit maintenant $K \subset U$ un compact convexe de la forme $K_1 \times \dots \times K_n$, et soient K'_1 et K''_1 deux compacts convexes de $\underline{C}$ tels que $K_1 = K'_1 \cup K''_1$. Posons $K'''_1 = K'_1 \cap K''_1$, $K' = K'_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$, et définissons de même K'' et K''' . En notant $\Phi_{S \times U}$ le foncteur structural de $S \times U$, et G gardant la même signification ($\Phi_{S \times U}(G)$ est donc le faisceau des morphismes d'ouverts de $S \times U$ dans G), on a :

COROLLAIRE 2. L'application γ de $H^0(s_0 \times K', \Phi_{S \times U}(G)) \times H^0(s_0 \times K'', \Phi_{S \times U}(G))$ dans $H^0(s_0 \times K''', \Phi_{S \times U}(G))$ définie par

$$\gamma(f', f'') = f'''|_{s_0 \times K'''} \quad f'^{-1}|_{s_0 \times K'''}^{-1}$$

est surjective.

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour $1 \leq i \leq n$, notons $L_i(\varepsilon)$ l'ensemble des $x \in \underline{C}$ tels que $d(x, K_{i1}) \leq \varepsilon$, où $d(x, K_{i1})$ est la distance de x à K_{i1} ; notons $L'_1(\varepsilon)$ l'ensemble des $x \in L_1(\varepsilon)$ tels que $d(x, K'_1) \leq 2\varepsilon$, définissons de même $L''_1(\varepsilon)$; et définissons $L(\varepsilon)$, $L'(\varepsilon)$, $L''(\varepsilon)$, $L'''(\varepsilon)$



comme plus haut. On est dans les conditions d'application des propositions 1 et 2 et du corollaire 1 d'icelle. Les ensembles $L'(\varepsilon)$ forment un système fondamental de voisinages de K' dans $\underline{C}^n$, donc

on a

$$H^0(s_0 \times K', \bar{\Phi}_{S \times U}(G)) = \lim_{\rightarrow} B_S(L'(\varepsilon), G)$$

et de même pour K'' et K''' . Le corollaire 2 se déduit donc du corollaire 1 par passage à la limite inductive.

COROLLAIRE 3. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_{S \times U}$ -module. Si $\mathcal{F}|_{s_0 \times K'}$ et $\mathcal{F}|_{s_0 \times K''}$ sont libres de type fini, il en est de même de $\mathcal{F}|_{s_0 \times K}$.

Démonstration. On peut supposer K' et K'' non vides ; comme K est connexe, il en est de même de K''' , donc $\mathcal{F}|_{s_0 \times K'}$ et $\mathcal{F}|_{s_0 \times K''}$ ont même rang r . En écrivant $\mathcal{O}$ pour $\mathcal{O}_{S \times U}$, le groupe des automorphismes de $\mathcal{O}^r|_{s_0 \times K}$ s'identifie à $H^0(s_0 \times K, GL(\mathbb{C}, n))$, et de même pour K' , K'' , K''' . Soient g' et g'' des isomorphismes de $\mathcal{O}^r$ sur $\mathcal{F}$ au-dessus de K' et K'' respectivement. D'après le corollaire 2, l'automorphisme $h = g''^{-1} \circ g'$ de $\mathcal{O}^r|_{s_0 \times K''}$ se met sous la forme

$$f''|_{s_0 \times K''} \circ f'|_{s_0 \times K''}^{-1},$$

où f' et f'' sont des automorphismes de $\mathcal{O}^r|_{s_0 \times K'}$ et $\mathcal{O}^r|_{s_0 \times K''}$ respectivement. Les isomorphismes $g' \circ f'$ et $g'' \circ f''$ de $\mathcal{O}^r$ sur $\mathcal{F}$ définis au-dessus de $s_0 \times K'$ et $s_0 \times K''$ respectivement coïncident sur $s_0 \times K'''$, donc se recollent en un isomorphisme de $\mathcal{O}^r|_{s_0 \times K}$ sur $\mathcal{F}|_{s_0 \times K}$, ce qui démontre le corollaire 3.

3. Les théorèmes A et B.

THÉORÈME 2. Soit $K \subset U$ un compact convexe de la forme $K_1 \times \dots \times K_n$, $K_i \subset \mathbb{C}$, et soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_{S \times U}$ -module. On suppose que pour tout point

$x \in K$, le faisceau $\mathcal{F}$ admet une résolution finie sur un voisinage de x .

(A) Le faisceau $\mathcal{F}$ admet une résolution finie sur K ;

(B) On a $H^q(K, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q > 0$.

Considérons d'abord un cas particulier :

LEMME. Soient K'_1 et K''_1 deux compacts convexes de $\mathbb{C}$ tels que $K_1 = K'_1 \cup K''_1$. Posons $K' = K'_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$, définissons de même K'' . Si le faisceau $\mathcal{F}$ admet une résolution finie de longueur $\leq p$ sur K' et sur K'' , il admet aussi une résolution finie de longueur $\leq p$ sur K .

Démonstration par récurrence sur p . Pour $p = 0$, le lemme se réduit au corollaire 3 de la proposition 2. Soit $p \geq 1$, et supposons le lemme démontré pour $p-1$. Soient $\mathcal{L}'_*$ et $\mathcal{L}''_*$ des résolutions de $\mathcal{F}$ au-dessus de K' et K'' respectivement. D'après le corollaire 2 du théorème 1, il existe des homomorphismes $f: \mathcal{L}'_* \rightarrow \mathcal{L}''_*$ et $g: \mathcal{L}''_* \rightarrow \mathcal{L}'_*$ au-dessus de $I_{\mathcal{F}}$ définis sur $K''' = K' \cap K''$. Au-dessus de K''' , on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0 & & (\varepsilon', 0) \\
 \uparrow \tilde{g} \approx & \searrow & \\
 \mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0 & \xrightarrow{(\varepsilon', \varepsilon'')} & \mathcal{F} \\
 \downarrow \tilde{f} \approx & \nearrow & \\
 \mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0 & & (0, \varepsilon'')
 \end{array}$$

où $\tilde{f} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ f_0 & I \end{pmatrix}$ et $\tilde{g} = \begin{pmatrix} I & g_0 \\ \cup & I \end{pmatrix}$. On peut étendre $\mathcal{L}'_0$ et $\mathcal{L}''_0$ en

des faisceaux libres sur K , que nous noterons encore $\mathcal{L}'_0$ et $\mathcal{L}''_0$. Soient $\mathcal{L}_0$ le faisceau localement libre sur K obtenu en recollant $\mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0$ à $|\mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0|_{K''}$ au moyen de $\tilde{f} \circ \tilde{g}^{-1}$ et $\varepsilon: \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{F}$ l'homomorphisme surjectif obtenu en recollant $(\varepsilon', 0)$ et $(0, \varepsilon'')$. Il résulte du corollaire 3 de la proposition 2 que $\mathcal{L}_0$ est libre. Posons $\mathcal{F}_1 = \text{Ker } \varepsilon$; on a

$$\mathcal{F}_1|_{K'} \approx \mathcal{F}'_1 \oplus \mathcal{L}'' \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_1|_{K''} \approx \mathcal{L}' \oplus \mathcal{F}''_1,$$

où $\mathcal{F}'_1 = \text{Ker } \varepsilon'$ et $\mathcal{F}''_1 = \text{Ker } \varepsilon''$. Le faisceau $\mathcal{F}_1$ admet donc une résolution de longueur $\leq p-1$ sur K' et sur K'' , et il résulte de l'hypothèse de récurrence qu'il admet une résolution de longueur $\leq p-1$ sur K . On obtient ainsi une résolution de longueur $\leq p$ de $\mathcal{F}$ sur K , ce qui démontre le lemme.

Démonstration du théorème

Soit $\mathcal{W} = (W_\alpha)$ un recouvrement ouvert de K tel que $\mathcal{F}$ admette une résolution finie sur chacun des W_α . Identifions $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$, et soit $\varepsilon > 0$ tel que la trace sur K de tout cube de côté ε de $\mathbb{R}^{2n}$ soit contenue dans l'un des W_α . Montrons, par récurrence sur m , que si $H = K \cap (C \times \mathbb{R}^m)$, où $C \subset \mathbb{R}^{2n-m}$ est un cube de côté ε , le faisceau $\mathcal{F}$ admet une résolution finie sur H . Cette propriété est vraie pour $m = 0$, car alors $H \cap C$ est contenu dans l'un des W_α . Supposons la propriété vraie pour $m-1$, on peut mettre H sous la forme $H_1 \cup \dots \cup H_k$, où $H_i = K \cap (C_i \times \mathbb{R}^{m-1})$,

$$C_i = C \times [b + (i-1)\varepsilon, b + i\varepsilon] \subset \mathbb{R}^{2n-m+1}$$

est un cube de côté ε . Le lemme montre par récurrence sur i que $\mathcal{F}$ admet une résolution finie sur $H_1 \cup \dots \cup H_i$, donc sur H . Faisant $m = 2n$, on obtient (A). Le corollaire 1 du théorème 1 donne (B) et le théorème est démontré.