SÉMINAIRE JEAN LERAY.
SUR LES ÉQUATIONS AUX
DÉRIVÉES PARTIELLES

A. DOUADY

Le théorème des voisinages privilégiés

Séminaire Jean Leray, n° 4 (1964-1965), p. 33-47
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965___4_33_0>

LE THÉORÈME DES VOISINAGES PRIVILÉGIÉS

par

A. DOUADY

Dans tout cet exposé, K désigne un compact de $\underline{\underline{C}}^n$ de la forme $K_1 \times \dots \times K_n$, $K_i \subset \underline{\underline{C}}$.

1. Rappel sur les faisceaux analytiques cohérents.

Notons $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes à valeurs dans $\underline{\underline{C}}$ sur $\underline{\underline{C}}^n$. Nous supposerons connu le résultat suivant :

PROPOSITION 1. *On a* $H^q(K, \mathcal{O}) = 0$ *pour* $q > 0$.

Nous reviendrons d'ailleurs sur ce résultat au prochain exposé.

COROLLAIRE 1. *Si* $\mathcal{F}$ *est un faisceau analytique cohérent admettant une résolution finie sur* K (i.e. *une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{L}_p \xrightarrow{d_p} \dots \xrightarrow{d_1} \mathcal{L}_o \to \mathcal{F} \to 0 \quad \text{avec } \mathcal{L}_i \approx \mathcal{O}^{r_i})$$

on a $H^q(K, \mathcal{F}) = 0$ *pour* $q > 0$ *et la suite*

$$0 \to \mathcal{L}_p(K) \to \dots \to \mathcal{L}_o(K) \to \mathcal{F}(K) \to 0$$

est exacte.

Démonstration. D'après la proposition, $H^q(K, \mathcal{L}_i) = 0$ pour $q > 0$. Posons $\mathcal{F}_i = \operatorname{Im} d_i$. La suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{F}_{i+1} \to \mathcal{L}_i \to \mathcal{F}_i \to 0$$

donne

$$H^q(K, \mathcal{F}_i) \approx H^{q+1}(K, \mathcal{F}_{i+1})$$

pour $q > 0$,

d'où

$$H^q(K, \mathcal{F}) \approx H^{q+p+1}(K, \mathcal{F}_{p+1}) = 0 .$$

La deuxième assertion en découle.

COROLLAIRE 2. <u>Soient</u> $\mathcal{F}'$ <u>et</u> $\mathcal{F}''$ <u>deux faisceaux analytiques cohérents admettant des résolutions finies</u> $\mathcal{L}'_*$ <u>et</u> $\mathcal{L}''_*$ <u>sur</u> K .

(a) <u>Pour tout homomorphisme</u> f <u>de</u> $\mathcal{F}'$ <u>dans</u> $\mathcal{F}''$, <u>il existe un homomorphisme de</u> $\mathcal{L}'_*$ <u>dans</u> $\mathcal{L}''_*$ <u>au dessus de</u> f , <u>unique à homotopie (algébrique) près</u>.

(b) <u>Pour toute suite exacte</u> $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$, <u>il existe une résolution finie</u> $\mathcal{L}_*$ <u>de</u> F <u>telle que</u> $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}'_i \oplus \mathcal{L}''_i$ <u>et que</u>

$$d_i : \mathcal{L}_i \to \mathcal{L}_{i-1}$$

<u>soit de la forme</u>

$$\begin{pmatrix} d'_i & u \\ 0 & d''_i \end{pmatrix} .$$

Compte tenu du corollaire 1, la démonstration est analogue à celle de deux théorèmes classiques d'algèbre homologique (Godement, Théorie des faisceaux, Ch.1, Théorèmes 5.1.1 et 5.1.2).

2. <u>Espaces</u> $B(K,F)$.

Si F est un espace de Banach, on notera $\mathcal{O}(K,F)$ l'espace vectoriel des fonctions analytiques au voisinage de K à valeurs dans F , $\mathcal{C}(K,F)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies sur K à valeurs dans F , et $B(K,F)$ l'adhérence de l'image de $\mathcal{O}(K,F)$ dans $\mathcal{C}(K,F)$.

On notera $B(K)$ l'algèbre de Banach $B(K,\underline{\underline{C}})$.

Si K est convexe d'intérieur non vide, $B(K,F)$ est l'espace des fonctions continues sur K, analytiques sur $\mathring{K}$, à valeurs dans F.

PROPOSITION 2. On a $B(K,F) = B(K) \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$.

<u>Démonstration</u>. Rappelons que la norme ε sur un produit tensoriel $E \otimes F$ d'espaces de Banach est la norme induite par celle de $\mathcal{L}(F^*,E)$, où $F^* = \mathcal{L}(F,\underline{\underline{C}})$, au moyen de l'injection de Kronecker $E \otimes F \to \mathcal{L}(F^*,E)$.
On peut identifier $B(K) \otimes F$ au sous espace vectoriel de $B(K,F)$ formé des fonctions f prenant leurs valeurs dans un sous-espace vectoriel de F de dimension finie. La norme induite sur $B(K) \otimes F$ par celle de $B(K,F)$ est

$$\|f\| = \sup_{x \in K} \|f(x)\| = \sup_{x \in K,\ u \in F^*} |u(f(x))| = \|f\| \quad ,$$

et $B(K) \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$ s'identifie à un sous-espace fermé de $B(K,F)$. Reste à montrer que $B(K) \otimes F$ est dense dans $B(K,F)$, soit que toute fonction $f \in \mathcal{O}(K,F)$ peut s'approcher uniformément sur K par des fonctions prenant leurs valeurs dans des sous-espaces vectoriels de F de dimension finie. Ceci peut se faire en représentant f par une intégrale de Cauchy et en approchant celle-c par des sommes de Riemann. Ceci démontre la proposition.

PROPOSITION 3 <u>Si</u> $K = K' \times K''$, <u>où</u> $K' \subset \underline{\underline{C}}^{n'}$, $K'' \subset \underline{\underline{C}}^{n''}$, $n' + n'' = n$, <u>on a</u> $B(K) = B(K',B(K''))$.

<u>Démonstration</u>. On a des applications naturelles

$$\mathcal{O}(K) \to \mathcal{O}(K',B(K'')) \to B(K',B(K''))$$

et la norme induite sur $\mathcal{O}(K)$ par celle de $B(K',B(K''))$ coïncide avec cell de $B(K)$, et $B(K)$ s'identifie à un sous-espace fermé de $B(K',B(K''))$.
Mais $\mathcal{O}(K)$ contient $\mathcal{O}(K') \otimes \mathcal{O}(K'')$, qui est dense dans $B(K',B(K''))$ d'après la proposition 2. Ceci démontre la proposition.

3. Voisinages privilégiés.

Si $\mathcal{L}$ est un faisceau analytique libre de type fini sur K, on notera $B(K,\mathcal{L})$ le $B(K)$-module libre $B(K) \otimes_{\mathcal{O}(K)} \mathcal{L}(K)$. La topologie obtenue sur $B(K,\mathcal{L})$ en l'identifiant à $B(K)^r$ au moyen d'une base ne dépend pas du choix de la base et en fait un espace de Banach.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent admettant une résolution finie sur K, on posera $B(K,\mathcal{F}) = B(K) \otimes_{\mathcal{O}(K)} \mathcal{F}(K)$. La topologie (non nécessairement séparée) obtenue sur $B(K,\mathcal{F})$ en en prenant une résolution

$$0 \to \dots \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

et en identifiant $B(K,\mathcal{F})$ à $\operatorname{Coker}(B(K,\mathcal{L}_1) \to B(K,\mathcal{L}_0))$ ne dépend pas du choix de la résolution. Cela résulte du corollaire 2, (a), de la proposition 1.

DÉFINITION. <u>Soit</u> $\mathcal{F}$ <u>un faisceau analytique cohérent sur</u> K. <u>On dira que</u> K <u>est</u> $\mathcal{F}$<u>-privilégié s'il existe une résolution</u>

$$0 \to \mathcal{L}_n \to \dots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0 \quad (*)$$

<u>de</u> $\mathcal{F}$ <u>sur</u> K <u>telle que</u>

$$0 \to B(K,\mathcal{L}_n) \to \dots \to B(K,\mathcal{L}_1) \to B(K,\mathcal{L}_0)$$

<u>soit une suite exacte directe</u>.

PROPOSITION 4. <u>Soit</u> $\mathcal{F}$ <u>un faisceau analytique cohérent sur</u> K <u>tel que</u> K <u>soit</u> $\mathcal{F}$<u>-privilégié</u>. <u>Pour toute résolution</u>

$$0 \to \mathcal{L}'_p \to \dots \to \mathcal{L}'_0 \to \mathcal{F} \to 0 ,$$

(*) Le théorème d'existence des voisinages privilégiés contient donc le théorème des syzygies.

de $\mathcal{F}$ sur K , $0 \to B(K, \mathcal{L}'_p) \to \dots \to B(K, \mathcal{L}'_0)$ est une suite exacte directe.

Démonstration. La propriété " $0 \to B(K, \mathcal{L}'_p) \to \dots \to B(K, \mathcal{L}'_0)$ est une suite exacte directe " est équivalente à la suivante : " $B(K, \mathcal{F})$ est séparé et

$$0 \to B(K, \mathcal{L}'_p) \to \dots \to B(K, \mathcal{L}'_0) \to B(K, \mathcal{F}) \to 0$$

admet un opérateur d'homotopie continu". Il résulte du corollaire 2, (a), de la proposition 1, que si cette propriété est vraie pour une résolution finie de $\mathcal{F}$, elle l'est pour toutes, ce qui démontre la propriété.

DÉFINITION. Soit x un point de K et $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur K. On dira que K est un voisinage $\mathcal{F}$-privilégié de x si :

(a) K est un voisinage de x ;

(b) K est $\mathcal{F}$-privilégié ;

(c) l'application naturelle $B(K, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}_x$ est injective.

PROPOSITION 5. Soit $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux analytiques cohérents sur K .

(a) Si K est $\mathcal{F}'$-privilégié et $\mathcal{F}''$-privilégié, K est $\mathcal{F}$-privilégié et

$$0 \to B(K, \mathcal{F}') \to B(K, \mathcal{F}) \to B(K, \mathcal{F}'') \to 0$$

est une suite exacte directe ;

(b) Si K est un voisinage $\mathcal{F}'$-privilégié et $\mathcal{F}''$-privilégié de x , K est un voisinage $\mathcal{F}$-privilégié de x .

Démonstration. (a) Soient $\mathcal{L}'_*$ et $\mathcal{L}''_*$ des résolutions de longueur n de $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ respectivement, et soit $\mathcal{L}_*$ une résolution de $\mathcal{F}$ satisfaisant aux conditions du corollaire 2, (b), de la proposition 1. On a une suite exacte de complexes $0 \to B(K, \mathcal{L}'_*) \to B(K, \mathcal{L}_*) \to B(K, \mathcal{L}''_*) \to 0$. Les deux extrêmes étant acycliques en degré > 0, il en est de même de celui du milieu. On vérifie par récurrence descendante sur i que si S'_i et S''_i sont des supplémentaires de $\operatorname{Im} d'_{i+1}$ et $\operatorname{Im} d''_{i+1}$, alors $S_i = S'_i \oplus S''_i$ est un supplémentaire de $\operatorname{Im} d_{i+1}$, ce qui montre que les d_i sont directs. Enfin S_0, S'_0 et S''_0 s'identifient respectivement à $B(K,\mathcal{F})$, $B(K,\mathcal{F}')$ et $B(K,\mathcal{F}'')$.

(b) Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B(K,\mathcal{F}') & \to & B(K,\mathcal{F}) & \to & B(K,\mathcal{F}'') & \to & 0 \\ & & \varepsilon' \Big| & & \varepsilon \Big| & & \varepsilon'' \Big| & & \\ 0 & \to & \mathcal{F}'_x & \to & \mathcal{F}_x & \to & \mathcal{F}''_x & \to & 0 \end{array},$$

si ε' et ε'' sont injectives, il en est de même de ε.

PROPOSITION 6. Soit $K = K' \times K''$, où $K' \subset \underline{\underline{C}}^{n'}$, $K'' \subset \underline{\underline{C}}^{n''}$, $n' + n'' = n$. Soient $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ des faisceaux analytiques cohérents sur K' et K'' respectivement. Considérons sur K le faisceau analytique cohérent

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}' \boxtimes_{\mathcal{O}'} \mathcal{O} \boxtimes_{\mathcal{O}''} \mathcal{F}'',$$

où $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ sont les faisceaux de fonctions holomorphes sur $\underline{\underline{C}}^{n'}$ et $\underline{\underline{C}}^{n''}$ respectivement.

(a) Si K' est $\mathcal{F}'$-privilégié et si K'' est $\mathcal{F}''$-privilégié, K est $\mathcal{F}$-privilégié et $B(K,\mathcal{F}) = B(K',\mathcal{F}') \hat{\otimes}_{\varepsilon} B(K'',\mathcal{F}'')$.

(b) Si K' et K'' sont des voisinages privilégiés de x' et x'' respectivement, K est un voisinage privilégié de $x = (x',x'')$.

<u>Démonstration</u>. (a) Soient $\mathcal{L}'_*$ et $\mathcal{L}''_*$ des résolutions de longueur n' de $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ respectivement ; $\mathcal{L}_* = \mathcal{L}'_* \boxtimes_{\mathcal{O}'} \mathcal{O} \boxtimes_{\mathcal{O}''} \mathcal{L}''_*$ est une résolution de longueur n de $\mathcal{F}$ et $B(K, \mathcal{L}_*) = B(K', \mathcal{L}'_*) \hat{\boxtimes}_\varepsilon B(K'', \mathcal{L}''_*)$. Il suffit donc de vérifier que si L'_* et L''_* sont des complexes directs d'espaces de Banach, $L_* = L'_* \hat{\boxtimes}_\varepsilon L''_*$ est un complexe direct et $H(L_*) = H(L'_*) \hat{\boxtimes}_\varepsilon H(L''_*)$. Or ceci résulte du fait que tout complexe direct est somme directe de complexes de la forme

$$\ldots \to 0 \to E_i \xrightarrow{\approx} E_{i-1} \to 0 \to \ldots$$

ou

$$\ldots \to 0 \to E_i \to 0 \to \ldots .$$

Nous n'utiliserons la partie (b) que dans le cas trivial où $\mathcal{F}' = \mathcal{O}'/m'$, m' désignant l'idéal maximal du point x'. Indiquons cependant la démonstration : notons F'_k la fibre en x' de $\mathcal{F}'/m'^{k+1}\mathcal{F}'$, espace vectoriel de dimension finie sur $\underline{\underline{C}}$; soient $p'_k : B(K', \mathcal{F}') \to F'_k$ l'application canonique et

$$p_k = p'_k \hat{\boxtimes}_\varepsilon I_{B(K'';\mathcal{F}'')} : B(K,F) \to F'_k \boxtimes B(K'',F'') .$$

Si $f \in B(K, \mathcal{F})$ et $f_x = 0$, on a $(p_k(f))_{x''} = 0$, donc $p_k(f) = 0$ pour tout k , et $f \in \bigcap_k \operatorname{Ker} p_k$. Quand on a des espaces de Banach B', B'', $B = B' \hat{\boxtimes}_\varepsilon B''$, F , et une application linéaire $p' : B' \to F$, on a, en posant

$$p = p' \hat{\boxtimes}_\varepsilon I_{B''} , \quad \operatorname{Ker} p \subset (\operatorname{Ker} p') \hat{\boxtimes}_\varepsilon B'' ,$$

comme on le voit en plongeant $B' \hat{\otimes}_\varepsilon B''$ dans $L(B''^*, B')$.

On a donc ici :

$$\bigcap_k \operatorname{Ker} p_k \subset (\bigcap_k \operatorname{Ker} p'_k) \boxtimes_\varepsilon B(K'', \mathcal{F}'') ;$$

or $\bigcap_k \operatorname{Ker} p'_k = 0$ en vertu de l'hypothèse sur K' et du Théorème de Krull-Artin-Rees qui assure que l'application $\mathcal{F}'_x \to \varprojlim F'_k$ est injective. Il en résulte que $f = 0$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. Soient $K = K' \times K''$ et x' un point intérieur à K' ; notons m' l'idéal de $\mathcal{O}'$ formé des fonctions nulles en x'. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur K tel que $m'\mathcal{F} = 0$; notons $\mathcal{F}_0$ le faisceau induit par $\mathcal{F}$ sur K'' au moyen de l'injection $i_{x'}$ de K'' dans K.

(a) Si K'' est $\mathcal{F}_0$-privilégié, K est $\mathcal{F}$-privilégié ;

(b) Si K'' est un voisinage $\mathcal{F}_0$-privilégié de x'', K est un voisinage $\mathcal{F}$-privilégié de $x = (x', x'')$.

Démonstration. On a

$$\mathcal{F} = C_{x'} \boxtimes_{\mathcal{O}'} \mathcal{O} \boxtimes_{\mathcal{O}''} \mathcal{F}_0 ,$$

où $C_{x'} = \mathcal{O}'/m'$. Le corollaire résulte donc de la proposition et du fait que K' est un voisinage $C_{x'}$-privilégié de x'. Grâce à la proposition, il suffit de vérifier ce fait quand $n' = 1$. Dans ce cas, le principe du maximum montre qu'on a une suite exacte directe

$$0 \to B(K') \xrightarrow{\zeta} (B(K') \to \underline{\underline{C}} \to 0 ,$$

où ζ est la fonction définie sur $\underline{\underline{C}}$ par $\zeta(y) = y - x'$.

4. Platitude et privilège.

Soit $n = n' + n''$. On identifie $\underline{\underline{C}}^n$ à $\underline{\underline{C}}^{n'} \times \underline{\underline{C}}^{n''}$; pour $x' \in \underline{\underline{C}}^{n'}$, on note $i_{x'}$ l'injection $y \mapsto (x', y)$ de $\underline{\underline{C}}^{n''}$ dans $\underline{\underline{C}}^n$; on note $\mathcal{O}, \mathcal{O}', \mathcal{O}''$ les faisceaux de fonctions holomorphes sur $\underline{\underline{C}}^n$, $\underline{\underline{C}}^{n'}$, $\underline{\underline{C}}^{n''}$.

PROPOSITION 7. <u>Soient</u> U <u>un ouvert de</u> $\underline{\underline{C}}^n$, $\mathcal{F}$ <u>un faisceau analytique cohérent sur</u> U, <u>et</u> $x = (x', x'')$ <u>un point de</u> U. <u>On suppose que</u> $\mathcal{F}_x$ <u>est un module plat sur</u> $\mathcal{O}_{x'}$. <u>Notons</u> $\mathcal{F}_o$ <u>le faisceau analytique cohérent sur</u> $U'' = i_{x'}^{-1}(U)$ <u>défini par</u> $\mathcal{F}_o = \mathcal{O}'' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}$. <u>Alors il existe un voisinage</u> U''_1 <u>de</u> x'' <u>dans</u> U'' <u>tel que</u> :

(a) <u>Si</u> $K'' \subset U''_1$ <u>est</u> $\mathcal{F}_o$<u>-privilégié et</u> $x'' \in K''$, <u>il existe un voisinage</u> U'_1 <u>de</u> x' <u>dans</u> $\underline{\underline{C}}^{n'}$ <u>tel que, pour tout</u> $K' \subset U'_1$, $K = K' \times K''$ <u>soit</u> $\mathcal{F}$<u>-privilégié</u> ;

(b) <u>Si</u> K'' <u>est un voisinage</u> $\mathcal{F}_o$<u>-privilégié de</u> x'' <u>dans</u> U''_1, <u>il existe un voisinage</u> U'_1 <u>de</u> x' <u>dans</u> $\underline{\underline{C}}^{n'}$ <u>tel que, si</u> K' <u>est l'adhérence d'un ouvert connexe de</u> U'_1 <u>contenant</u> x', $K = K' \times K''$ <u>soit un voisinage</u> $\mathcal{F}$<u>-privilégié de</u> x.

<u>Démonstration</u>. Posons $F = \mathcal{F}_x$, et $F_o = \mathcal{F}_{o x''}$. Soit

$$L^o_* = (0 \to L^o_{n''} \to \dots \to L^o_o \to F_o \to 0)$$

une résolution $\mathcal{O}''_{x''}$-libre de F_o. Il existe une résolution $\mathcal{O}_x$-libre L_* de F telle que

$$L^o_* = \mathcal{O}''_{x''} \otimes_{\mathcal{O}_x} L_* = \underline{\underline{C}} \otimes_{\mathcal{O}'_{x'}} L_* .$$

On peut en effet supposer $L^o_i = \mathcal{O}''^{\,r_i}_{x''}$ et poser $L_i = \mathcal{O}^{r_i}_x$; posons $K^o_i = \operatorname{Ker} d^o_i$. On va, par récurrence sur i, construire $d_i : L_i \to L_{i-1}$, montrer que $K_i = \operatorname{Ker} d_i$ est $\mathcal{O}'_{x'}$-plat et que

$$K^o_i = \underline{\underline{C}} \otimes_{\mathcal{O}'_{x'}} K_i .$$

Supposons qu'on ait construit d_i et montré ces propriétés pour K_i ; on peut construire $d_{i+1} : L_{i+1} \to K_i$ de façon que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & K_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ L^o_{i+1} & \xrightarrow{d^o_{i+1}} & K^o_i \end{array}$$ soit commutatif.

Comme $\mathcal{O}_x$ est noethérien, $K_i \subset L_i$ est de type fini et le lemme de Nakayama montre que $\operatorname{Im} d_{i+1} = K_i$. La suite exacte

$$0 \to K_{i+1} \to L_{i+1} \to K_i \to 0 ,$$

où K_i et L_{i+1} sont $\mathcal{O}'_{x'}$-plats, montre que K_{i+1} est $\mathcal{O}'_{x'}$-plat et que $K^o_{i+1} = \underline{\underline{C}} \otimes_{\mathcal{O}'_{x'}} K_i$. Le départ de la récurrence se fait de façon analogue.

(a) La résolution L_* de F ainsi construite peut s'étendre en une résolution $\mathcal{L}_*$ du faisceau $\mathcal{F}$ sur un voisinage $U' \times U''_1$ de x dans U. Notons $B(K'', \mathcal{L}_i)$ le fibré trivial sur U' de fibre $B(K'', \mathcal{L}^o_i)$. Le morphisme de faisceaux $d_i : \mathcal{L}_i \to \mathcal{L}_{i-1}$ définit un morphisme analytique de fibrés vectoriels, que nous noterons encore $d_i : B(K'', \mathcal{L}_i) \to B(K'', \mathcal{L}_{i-1})$ par $d_i(y') = d_i \otimes_{\mathcal{O}'_{y'}} I_{\underline{\underline{C}}}$ pour $y' \in U'$. On obtient ainsi un complexe $B(K'', \mathcal{L}_*)$ de fibrés analytiques sur U'. Ce complexe est direct et acyclique en degrés > 0 au point x'. D'après la proposition 4 du premier exposé cette propriété a encore lieu aux points voisins, et on peut trouver un voisinage U'_1 de x' dans U' et pour chaque i des sous-fibrés triviaux S_i et T_i de $B(K'', \mathcal{L}_i)$ sur U'_1 tels que $B(K'', \mathcal{L}_i) = S_i \oplus T_i$ et que d_i induise un isomorphisme de S_i sur T_{i-1} et soit nul sur T_i. On a alors, si $K' \subset U'_1$

$$B(K, \mathcal{L}_i) = B(K', B(K'', \mathcal{L}_i)) = B(K', S_i) \oplus B(K', T_i) ,$$

et $$d_i : B(K,\mathscr{L}_i) \to B(K,\mathscr{L}_{i-1})$$
induit un isomorphisme de $B(K',S_i)$ sur $B(K',T_{i-1})$ et est nul sur $B(K',T_i)$.
Le complexe $B(K,\mathscr{L}_*)$ est donc direct et acyclique en degrés > 0, ce qui démontre la partie (a).

Remarques

1) Posons

$$B(K'',\mathscr{F}) = \operatorname{Coker} d_1 : B(K'',\mathscr{L}_1) \to B(K'',\mathscr{L}_0) ;$$

c'est un fibré analytique trivial sur U'_1 de fibre $B(K'',\mathscr{F}_0)$ et on a : $B(K,\mathscr{F}) = B(K',B(K'',\mathscr{F}))$.

2) Dans le cas où $\mathscr{F}$ admet une résolution

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{h} \mathcal{O} \to \mathscr{F} \to 0 ,$$

posons $n' = n-1$ et $n'' = 1$. Si $h_0 : \mathcal{O}'' \to \mathcal{O}''$ n'est pas nul en x'', $\mathscr{F}_x$ est $\mathcal{O}'_{x'}$-plat et tout $K'' \subset U''$ tel que la frontière de K'' ne contienne aucun zéro de h_0 est $\mathscr{F}_0$-privilégié. Si p est le nombre de zéros (avec leur multiplicité) de h_0 intérieurs à K'', on peut prendre pour S_0 l'espace vectoriel des polynômes de degré $< p$. On retrouve le théorème de préparation sous la forme

$$B(K) = h(B(K)) \oplus B(K',S_0) .$$

(b) Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME. Soit A un anneau artinien local, m son idéal maximal, E et F deux A-modules plats, $f : E \to F$ un homomorphisme. Si

$$I \otimes f : A/m \otimes_A E \to A/m \otimes_A F$$

est injectif, f est injectif.

Ce lemme est une conséquence de [BOURBAKI, Alg. Comm. Ch.2, § 3, Prop. 5].

Posons $A_k = \mathcal{O}'_{x'}/m'^{k+1}$. Le A_k-module J_k des jets à l'ordre k en x' de sections du fibré $B(K'',\mathcal{F})$ est isomorphe à $A_k \otimes_{\mathbb{C}} B(K'',\mathcal{F}_o)$, donc libre. En vertu du lemme et de l'hypothèse sur K'', l'application canonique

$$J_k \to A_k \otimes_{\mathcal{O}'_{x'}} \mathcal{F}_x$$

est injective. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B(K,\mathcal{F}) = B(K',B(K'',\mathcal{F})) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\Theta"'] & \mathcal{F}_x \arrow[d] \\ \varprojlim J_k \arrow[r, "\hat{\rho}"] & \varprojlim A_k \otimes_{\mathcal{O}'} \mathcal{F}_x \end{tikzcd}$$

$\hat{\rho}$ est injective par passage à la limite projective, et Θ aussi à cause de l'hypothèse sur K'. Il en résulte que ρ est injective, ce qui achève de démontrer la proposition.

Remarques

1) En utilisant les théorèmes A et B, on peut démontrer la proposition avec $U''_1 = U''$ à condition que $\mathcal{F}$ y soit $\mathcal{O}'$-plat. L'hypothèse $x'' \in K''$ n'est là que pour assurer l'existence de L^o_*, elle peut être supprimée à condition d'utiliser le théorèmes des syzygies.

2) Dans les conditions de la partie (a) de la proposition, K'' est $\mathcal{F}(y')$-privilégié pour tout $y' \in U'_1$, en notant $\mathcal{F}(y')$ le faisceau analytique cohérent sur $i_{y'}^{-1}(U)$ défini comme $\mathcal{F}_o$. Cependant, dans les conditions de la partie (b), il n'existe pas nécessairement pour tout y' suffisamment voisin de x' un point $y'' \in K''$ tel que K'' soit un voisinage $\mathcal{F}(y')$-privilègié de y''.

5. Le théorème d'existence.

THÉORÈME 1. *Soient* U *un ouvert de* $\underline{\underline{C}}^n$ *et* $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ *des faisceaux analytiques cohérents sur* U . *Pour tout* $x \in U$, *il existe un* $K \subset U$ *qui soit un voisinage* $\mathcal{F}_i$*-privilégié de* x *pour* $1 \leqslant i \leqslant k$.

Démonstration par récurrence sur n. Le théorème est trivial pour $n = 0$. Supposons le théorème démontré pour n-1 et identifions $\underline{\underline{C}}^n$ à $\underline{\underline{C}} \times \underline{\underline{C}}^{n-1}$. Le point $x = (x',x'') \in U$ étant fixé, définissons la fonction ζ sur U par $\zeta(y',y'') = y' - x'$. Posons $\mathcal{F}_{ij} = \operatorname{Ker} \zeta^j I : \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_i$. Comme $\mathcal{O}_x$ est noethérien, il existe un j_o tel que $\mathcal{F}_{ij,x} = \mathcal{F}_{ij_o,x}$ pour $j \geqslant j_o$. Posons $\mathcal{F}''_i = \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{ij_o}$; l'endomorphisme ζI de $\mathcal{F}''_{i,x}$ est injectif, et $\mathcal{F}''_{i,x}$, considéré comme $\mathcal{O}'_{x'}$-module, est sans torsion, donc plat car l'anneau $\mathcal{O}'_{x'}$ est principal. Posons $\mathcal{F}'_{ij} = \mathcal{F}_{ij}/\mathcal{F}_{i,j-1}$ pour $j \leqslant j_o$ et $\mathcal{F}''_{io} = \mathcal{O}'' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}''_i$. Par hypothèse de récurrence, il existe un $K \subset U'' = i^{-1}_{x'}(U)$ qui soit un voisinage privilégié de x" pour les $\mathcal{F}'_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant j_o$, et pour les $\mathcal{F}''_{io}$. Si K' est un voisinage suffisamment petit de x' dans $\underline{\underline{C}}$ qui soit l'adhérence d'un ouvert connexe, $K = K' \times K''$ est un voisinage $\mathcal{F}''_i$-privilégié de x d'après la proposition 7 et $\mathcal{F}'_{ij}$-privilégié d'après le corollaire de la proposition 6. Ceci entraîne par applications répétées de la proposition 5 que K est un voisinage $\mathcal{F}_i$-privilégié de x , ce qui démontre le théorème.

Remarque

La démonstration donne le résultat suivant : *soient* U *un ouvert de* $\underline{\underline{C}}^n$, *et* $\mathcal{F}$ *un faisceau analytique cohérent sur* U , *alors*

$$(\forall\ x = (x_1,\ldots,x_n) \in U) \begin{pmatrix} \exists U_n \\ \text{vois.}x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \forall K_n \subset\subset U_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exists U_{n-1} \\ \text{vois.}x_{n-1} \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} \exists U_1 \\ \text{vois.}x_1 \end{pmatrix} (\forall K_1 \subset\subset U_1)\ K = K_1 \times \ldots \times K_n \ \underline{\text{est un voisinage } \mathcal{F}\text{-privilégié de}}\ x$$

($K_i \subset\subset U_i$ signifie ici que $K_i \subset U_i$ et que K_i est l'adhérence d'un ouvert connexe contenant x_i).

6. <u>Application : Espaces analytiques de dimension finie</u>.

Les notations sont celles de l'exposé précédent.

PROPOSITION 8. <u>Soient</u> U <u>un ouvert de</u> $\underline{\underline{C}}^n$, $\mathcal{F}$ <u>un espace de Banach et</u> $f : U \to F$ <u>une application analytique</u>. <u>Pour tout</u> $x \in U$, <u>il existe un voisinage</u> U' <u>de</u> x <u>dans</u> U , <u>un</u> $p \in \underline{\underline{N}}$ <u>et une application linéaire continue</u> v <u>de</u> F <u>dans</u> $\underline{\underline{C}}^p$ <u>tels que</u> $\mu(U',F,f) = \mu(U', \underline{\underline{C}}^p, v \circ f)$.

<u>Démonstration</u>. Soit J l'idéal de $\mathcal{O}_x$ engendré par les $u \circ f$, $u \in \mathcal{L}(F,\underline{\underline{C}})$. Comme $\mathcal{O}_x$ est noethérien, J est engendré par une famille finie $v_1 \circ f ,\ldots, v_p \circ f$. Soit $\mathcal{J}$ le faisceau d'idéaux engendré par les $g_i = v_i \circ f$, et soit K un voisinage $\mathcal{O}/\mathcal{J}$-privilégié de x . L'homomorphisme $g : \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}$ défini par les g_i donne un homomorphisme direct

$$g : B(K)^p \to B(K) ;$$

posons $T_o = g(B(K)^p)$. Montrons que

$$f \in [\operatorname{Im} g \mathbin{\hat{\otimes}} I : B(K)^p \mathbin{\hat{\otimes}}_\varepsilon F \to B(K) \mathbin{\hat{\otimes}}_\varepsilon F] = T_o \mathbin{\hat{\otimes}}_\varepsilon F .$$

Il suffit pour cela de voir que pour tout $u \in \mathcal{L}(F,\underline{\underline{C}})$, $u \circ f \in T_o$, mais ceci découle de l'hypothèse faite sur K .

Il en résulte qu'on peut mettre f sous la forme $\lambda.g$, avec

$$\lambda \in B(K,F)^p = B(K, \mathcal{L}(\underline{\underline{C}}^p, F)) .$$

On a donc $f \in \mathcal{N}(g_{U'}, F)$ en notant U' l'intérieur de K , et $\mu(U', \underline{\underline{C}}^p, g)$ est un sous-espace analytique de $\mu(U', F, f)$. Comme l'inclusion opposée est évidente, la proposition est démontrée.