

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A. DOUADY

Variétés analytiques banachiques

Séminaire Jean Leray, n° 4 (1964-1965), p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965__4_1_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VARIÉTÉS ANALYTIQUES BANACHIQUES

par

A. DOUADY

1. Applications polynomiales.

Soient E et F deux espaces de Banach^(*). Une application f de E dans F est dite polynomiale homogène de degré n s'il existe une application n -linéaire symétrique $\tilde{f}$ de $E \times \dots \times E$ dans F telle que $f(x) = \tilde{f}(x, \dots, x)$. Dans ce cas $\tilde{f}$ est unique et déterminée par la formule

$$(1) \quad \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \Delta_{x_n} \dots \Delta_{x_1} f(0) ,$$

où on a posé :

$$\Delta_x h(y) = \frac{1}{2} (h(y+x) - h(y-x)) .$$

PROPOSITION 1. Pour une application polynomiale homogène f de E dans F , les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) f est continue ;
 - b) f est continue en 0 ;
 - c) f est bornée sur la boule unité B_E de E ;
 - a) $\tilde{f}$ est continue ;
 - b) $\tilde{f}$ est continue en $(0, \dots, 0)$;
 - c) $\tilde{f}$ est bornée sur $B_E \times \dots \times B_E$.
-

(*) Sur le corps $\underline{\mathbb{R}}$ des réels ou le corps $\underline{\mathbb{C}}$ des complexes.

Les implications $\tilde{c} \Rightarrow \tilde{b} \Rightarrow \tilde{a} \Rightarrow a \Rightarrow b \Rightarrow c$ sont immédiates, montrons que $c \Rightarrow \tilde{c}$. Plus précisément, en posant

$$\|f\| = \sup \|f(B_E)\| \quad \text{et} \quad \|\tilde{f}\| = \sup \|\tilde{f}(B_E \times \dots \times B_E)\| ,$$

on a l'inégalité :

$$(2) \quad \|f\| \leq \|\tilde{f}\| \leq \frac{n^n}{n!} \|f\| .$$

En effet f est bornée par $n^n \|f\|$ sur la boule de rayon n ; soient $x_1, \dots, x_n \in B_E$ on voit par récurrence sur k que $\Delta_{x_k} \dots \Delta_{x_1} f$ est bornée par $n^n f$ sur la boule de rayon $n-k$, et pour $k = n$, on trouve :

$$n! \|\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)\| = \|\Delta_{x_n} \dots \Delta_{x_1} f(0)\| \leq n^n \|f\| .$$

2. Applications analytiques.

Soient E et F deux espaces de Banach, et soit U un ouvert de E . Une application h de U dans F est dite analytique en un point a de U s'il existe une suite (f_n) , où, pour tout n , f_n est une application polynomiale homogène de degré n de E dans F , et un nombre réel $r > 0$ tels que

$$(3) \quad \sum \|f_n\| r^n < \infty$$

et que

$$h(a + x) = \sum f_n(x) \quad \text{pour } x \text{ suffisamment petit.}$$

La borne supérieure R des nombres r vérifiant (3) est appelée rayon de convergence de h en a . On appelle rayon de convergence strict de h en a la borne supérieure $\tilde{R}$ des nombres r vérifiant

$$(\tilde{3}) \quad \sum \|\tilde{f}_n\| r^n < \infty .$$

Il résulte de (1) et de la formule de Stirling donnant une majoration de $\frac{n^n}{n!}$ que R et $\tilde{R}$ sont reliés par les inégalités

$$(4) \quad \frac{R}{e} \leq \tilde{R} \leq R.$$

Exemples

1. Soient E une algèbre de Banach, F un E -module. Si, pour tout n , $f_n(x)$ est de la forme $x^n c_n$, avec $c_n \in F$, on dit que h est E -analytique. Dans ce cas $R = \tilde{R}$; en effet $\|f_n\| = \|\tilde{f}_n\| = \|c_n\|$.

2. Prenons pour E l'espace $\mathcal{C}^1$ des suites sommables, $X = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ muni de la norme $\|X\| = \sum |x_i|$, et pour $f_n(x)$ le produit $x_1 \dots x_n$ des n premières coordonnées. On a $\|f_n\| = \frac{1}{n^n}$, car le maximum de $|f_n|$ pour $\sum |x_i| \leq 1$ est atteint pour $|x_1| = \dots = |x_n| = \frac{1}{n}$. D'autre part,

$$\tilde{f}_n(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{C}(n)} x_{\sigma(1)}^{(1)} \dots x_{\sigma(n)}^{(n)},$$

d'où en prenant pour $x^{(i)}$ l'élément δ^i de Kronecker, $\|\tilde{f}_n\| \geq \frac{1}{n!}$, et l'inégalité (2) montre que $\|\tilde{f}_n\| = \frac{1}{n!}$. Pour la série $h = \sum n! f_n$, on a $\tilde{R} = 1$ et $R = e$.

3. Cas complexe.

PROPOSITION 2. Soient E et F deux espaces de Banach complexes, U un ouvert de E , et h une application de U dans F . Supposons que h soit localement bornée et que, pour toute droite affine complexe $D \subset E$ et toute forme linéaire continue v sur F , $v \circ h$ induise une fonction holomorphe sur $D \cap U$. Alors h est $\mathbb{C}$ -analytique, et si h est bornée sur une boule de centre a et de rayon r contenue dans U , le rayon de convergence R de h en a vérifié $R \geq r$.

Cette proposition est connue dans le cas où E est de dimension finie et $F = \mathbb{C}$; et le développement $h(a+x) = \sum f_n(x)$ est donné par la formule

$$(5) \quad f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(a + e^{i\theta}x) e^{-ni\theta} d\theta \quad \text{pour } \|x\| \leq r.$$

Dans le cas général, définissons $f_n(x)$ pour $\|x\| \leq r$ par la formule (5) (intégrale à valeurs dans l'espace de Banach F). Si $\|h\|$ est majorée par M sur la boule de centre a et de rayon r , on a $\|f_n(x)\| \leq M$ pour $\|x\| \leq r$. Pour montrer que f_n est polynomiale homogène de degré n , il suffit de vérifier que $\tilde{f}_n$ définie par (1) est n -linéaire et que $f_n(x) = \tilde{f}_n(x, \dots, x)$; il suffit même de vérifier ces relations pour la restriction de $v \circ f_n$ à E' pour toute forme linéaire continue v sur F et tout sous-espace E' de dimension finie de E , ce qui nous ramène au cas particulier connu. Il en résulte que la série $\sum f_n$ converge normalement sur toute boule de rayon $r' < r$, et de la relation $v(h(a+x)) = v(\sum f_n(x))$ pour toute forme v , on déduit $h(a+x) = \sum f_n(x)$. Ceci démontre la proposition.

Il résulte de cette proposition que l'ensemble des applications C -analytiques bornées de U dans F est fermé dans l'espace de Banach des applications continues bornées.

Soit h une fonction C -analytique en a , soit R_a son rayon de convergence en a , et supposons que h soit représentée par son développement en tout point de la boule de centre a et de rayon R_a . Alors

(i) h est analytique en tout point b tel que $\|b-a\| < R_a$;

(ii) son rayon de convergence R_b en b vérifie $R_b \geq R_a - \|b-a\|^{(*)}$

(*) La propriété (i) subsiste dans le cas réel, mais sa démonstration est plus délicate. J'ignore si la propriété (ii) subsiste, mais on a l'inégalité

$$\sqrt{R_b} \geq \sqrt{R_a} - \sqrt{\|b-a\|}.$$

Il est immédiat que les rayons de convergence stricts vérifient $\tilde{R}_b \geq \tilde{R}_a - \|b-a\|$ dans les deux cas.

4. Le théorème des fonctions implicites.

THÉORÈME. Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, h une application analytique de U dans F, a un point de U, et $b = h(a)$. On suppose que la partie linéaire du développement de h en a est un isomorphisme (*) de E sur F. Il existe alors un voisinage ouvert V de a dans U et un voisinage ouvert W de b dans F tels que h induise un homéomorphisme de V sur W et que l'application h^{-1} de W sur V soit analytique.

On peut supposer $a = 0$, $b = 0$. Pour tout r , on pose $\|\tilde{h}\|_r = \sum \|f_n\|_r^n$ si $h = \sum f_n$; on a donc $\|\tilde{h}\|_r < \infty$ si $r < \tilde{R}$, où $\tilde{R}$ est le rayon de convergence strict de h en 0. Si g est une application d'un voisinage de 0 dans F à valeurs dans un espace de Banach G, analytique en 0, $g \circ h$ est analytique en 0 et $\|\widetilde{g \circ h}\|_r \leq \tilde{g}_s$, où $s = \|\tilde{h}\|_r$.

Soit f_1 le terme linéaire du développement de h, posons $c = \|f_1^{-1}\|^{-1}$, et soit $k \in]0, 1[$. Posons $\eta(x) = x - f_1^{-1} \circ h(x)$; η est analytique en $0 \in E$, d'ordre ≥ 2 . Il existe un $r > 0$ tel que $\|\tilde{\eta}\|_r \leq kr$. Posons $r' = c(1-k)r$, et soit B' la boule de rayon r' dans F. On définit par récurrence une suite (g_n) d'applications analytiques de B' dans E par

$$g_0(y) = 0 ; g_{n+1}(y) = f_1^{-1}(y) + \eta \circ g_n(y) .$$

On voit par récurrence que $\|\tilde{g}_n\|_{r'} \leq r$ et que $g_{n+1} - g_n$ et $h \circ g_n - 1$ sont d'ordre $> n$. La série g telle que $g - g_n$ soit d'ordre $> n$ pour

(*) D'après le théorème de Banach, il est équivalent de supposer qu'une application linéaire continue de E dans F est bijective ou que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.

tout n vérifie $\|\tilde{g}\|_r \leq r$, et $h \circ g = 1$. L'application analytique h est donc localement inversible à droite, et pour la même raison g est localement inversible à droite. On voit donc que h est localement inversible, et le théorème est démontré.

5. Variétés.

Soit X un ensemble. Une carte de X est une bijection d'une partie de X sur un ouvert d'un espace de Banach. Deux cartes $\varphi_1 : U_1 \rightarrow U'_1$ et $\varphi_2 : U_2 \rightarrow U'_2$ sont dites compatibles si

$$U'_{1,2} = \varphi_1(U_1 \cap U_2) \text{ et } U'_{2,1} = \varphi_2(U_2 \cap U_1)$$

sont ouverts dans U'_1 et U'_2 et si l'application $\gamma_{1,2} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ de $U'_{2,1}$ dans $U'_{1,2}$ (changement de carte) est analytique. Un atlas sur X est une famille de cartes deux à deux compatibles dont les domaines recouvrent X . Deux atlas sur X sont dits équivalents si toute carte de l'un est compatible avec toute carte de l'autre. Une structure de variété (analytique banachique) sur X est une classe d'équivalence d'atlas.

Etant donné une structure de variété sur X , il existe une topologie et une seule, appelée topologie sous jacente, telle que toute carte soit un homéomorphisme défini sur un ouvert de X .

Soient X et Y deux variétés, f une application continue de X dans Y , $\varphi : U \rightarrow U'$ une carte de X , $\psi : V \rightarrow V'$ une carte de Y . Alors

$$U'' = \varphi(U \cap f^{-1}(V))$$

est ouvert dans U' et $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est une application continue de U'' dans V' qu'on appelle l'expression de f dans les cartes données. On dit que f est analytique si son expression dans tout couple de cartes est analytique.

Soit X une variété et $x \in X$. On appelle espace tangent à X en x et on note $T_x X$ le quotient de l'ensemble des couples (φ, t) , où φ est une carte de X représentant un voisinage de x sur un ouvert d'un espace de Banach E telle que $\varphi(x) = 0$, et t un vecteur de E , par la relation d'équivalence $(\varphi, t) \sim (\varphi', t')$ si $t' = \alpha(t)$, où α est la partie linéaire du développement de l'application de changement de carte $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ en 0. C'est de façon naturelle un espace de Banach, i.e. un espace vectoriel topologique normable complet. Soient X et Y deux variétés, f une application analytique de X dans Y , $x \in X$, $y = f(x)$. On définit l'application linéaire tangente à f en x ,

$$T_x f : T_x X \rightarrow T_y Y \quad \text{par} \quad T_x f(u) = v$$

si u est représenté par (φ, t) , et v par $(\psi, \alpha(t))$, où α est la partie linéaire du développement de l'expression de f dans les cartes φ, ψ .

6. Immersions et summersions directes.

Soient E et F deux espaces de Banach, u une application linéaire continue de E dans F . On dit que u est un morphisme strict si u induit un isomorphisme topologique de $E/\text{Ker } u$ sur $\text{Im } u$, ou, ce qui revient au même en vertu du théorème de Banach, si $\text{Im } u$ est fermé. On dira que u est un morphisme direct si u est un morphisme strict et si $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ admettent un supplémentaire topologique (i.e. un supplémentaire fermé) dans E et F respectivement. Contrairement aux conventions générales des catégories, on réserve le nom de monomorphisme aux morphismes stricts injectifs et le nom d'épimorphisme aux morphismes surjectifs (qui sont tous stricts).

Soient X et Y deux variétés, f une application analytique de X dans Y , $x \in X$, $y = f(x)$. On dit que f est une immersion (resp. une immersion directe, resp. une submersion, resp. une submersion directe) en x s'il existe une carte φ de X représentant un voisinage de x sur un ouvert d'un espace de Banach E et une carte ψ de Y représentant un voisinage de y sur un ouvert d'un espace de Banach F telles que l'expression de f dans ces cartes soit induite par un monomorphisme (resp. un monomorphisme direct, resp. un épimorphisme, resp. un épimorphisme direct) de E dans F .

On utilise souvent le Théorème des fonctions implicites sous la forme suivante :

PROPOSITION 3. Soient X et Y deux variétés, f une application analytique de X dans Y , $x \in X$.

- a) Si $T_x f$ est un monomorphisme direct, f est une immersion directe en x .
- b) Si $T_x f$ est un épimorphisme direct, f est une submersion directe en x .

Soient $\varphi: U \rightarrow U' \subset E$ et $\psi: V \rightarrow V' \subset F$ des cartes de X et Y respectivement avec $\varphi(x) = 0$, $\psi(y) = 0$, où $y = f(x)$; notons f' l'expression de f dans ces cartes.

a) Supposons que $T_x f$ soit un monomorphisme direct, et soit G un supplémentaire de $\text{Im } f$ dans F . L'application analytique g de $U' \times G$ dans F définie par $g(x, y) = f(x) + y$ est un isomorphisme local d'après le théorème 1, et $g^{-1} \circ \psi$ est une carte de Y au voisinage de y . L'expression de f dans les cartes φ , $g^{-1} \circ \psi$ est l'injection canonique de E dans $E \oplus G$.

b) Supposons que $T_x f$ soit un épimorphisme direct, soit K son noyau, et soit p une projection de E sur K parallèlement à un supplémentaire. L'application g de U' dans $V' \times K$ définie par $g(x) = (f'(x), p(x))$ est un isomorphisme local d'après le théorème 1 et $g \circ \varphi$ est une carte de X au voisinage de x . L'expression de f dans les cartes $g \circ \varphi, \psi$ est la projection de $F \times K$ sur F . La proposition est démontrée.

7. Un contre-exemple.

Avec les notations de la proposition 3, montrons par un exemple que $T_x f$ peut être un épimorphisme sans que f soit une submersion.

Soit E un espace de Banach et F un sous-espace fermé tel que E ne soit pas isomorphe à $F \oplus E/F$, et notons p l'application canonique de E sur E/F . Définissons l'application analytique f de $\mathbb{C} \times E \times E/F$ dans E/F par $f(t, x, y) = p(x) + ty$. Pour $z = (0, 0, 0)$, on a

$$T_z f(t, x, y) = p(x), \text{ et } \text{Ker } T_z f = \mathbb{C} \oplus F \oplus E/F.$$

Pour $z = (t_0, 0, 0)$, on a

$$T_z f(t, x, y) = p(x) + t_0 y, \text{ et } \text{Ker } T_z f = \mathbb{C} \oplus G,$$

où G est le graphe de $\frac{-1}{t_0} p : E \rightarrow E/F$, donc $\text{Ker } T_z f \approx \mathbb{C} \oplus E$. Les espaces $\mathbb{C} \oplus F \oplus E/F$ et $\mathbb{C} \oplus E$ ne sont pas isomorphes, car des hyperplans de deux espaces isomorphes sont toujours isomorphes. Il en résulte que f n'est pas une submersion, car si f était une submersion, $f^{-1}(0)$ serait une sous-variété V de $\mathbb{C} \times E \times E/F$, et on aurait, en tout point z de V , $T_z V = \text{Ker } T_z f$. Or l'espace tangent à une variété reste constamment isomorphe à lui-même sur une composante connexe.

Reste à montrer qu'il existe un espace de Banach E et un sous-espace fermé F de E tels que $E \not\cong F \oplus E/F$. Prenons pour E l'espace ℓ^1 des suites sommables. Pour tout espace de Banach séparable H , il existe un épimorphisme u de E sur H , et en posant $F = \text{Ker } u$, on a $E/F \cong H$. Mais les sous-espaces vectoriels fermés de ℓ^1 jouissent de propriétés très particulières, par exemple : "toute suite faiblement convergente est convergente" (Théorème d'Orlicz). Si H ne possède pas cette propriété, par exemple si H est un espace de Hilbert séparable, E/F n'est isomorphe à aucun sous-espace fermé de E et $E \not\cong F \oplus E/F$.

8. La variété Grassmannienne d'une espace de Banach.

Soit E un espace de Banach, on appellera sous-espace direct de E tout sous-espace vectoriel fermé admettant un supplémentaire topologique. Nous allons munir l'ensemble $\mathcal{G}(E)$ des sous-espaces directs de E d'une structure de variété analytique banachique. Pour tout couple (F, G) de sous-espaces supplémentaires de E , notons U_G l'ensemble des sous-espaces F' de E admettant G comme supplémentaire ; on définit une bijection $\psi_{F, G}$ de U_G sur l'espace de Banach $\mathcal{L}(E, G)$ des applications linéaires continues de F dans G en associant à $F' \in U_G$ l'application de F dans G ayant pour graphe le sous-espace F' de $E = F \times G$. Les $\psi_{F, G}$ sont des cartes de $\mathcal{G}(E)$ dont les domaines recouvrent $\mathcal{G}(E)$. Pour étudier le changement de cartes, $\gamma = \psi_{F_1, G_1} \circ \psi_{F_0, G_0}^{-1}$, considérons d'abord deux cas particuliers :

- (i) $G_0 = G_1$. Dans ce cas γ est un isomorphisme affine.
- (ii) $F_0 = F_1$. Notons j l'application de F_0 dans G_0 dont le graphe est G_1 , soit $j = \psi_{G_0, F_0}(G_1)$, et i l'isomorphisme de G_0 sur G_1

défini par $i(x) = x + j(x)$. Soit $F \in U_{G_0}$, et $f = \psi_{F_0, G_0}(F)$; F est l'ensemble des $x + f(x)$ pour $x \in F_0$. La décomposition de $X + f(x)$ suivant F_0 et G est $X' + y'$, où $x' = x - j(f(x)) \in F_0$ et $y' = i(f(x)) \in G_1$. Pour que $F \in U_{G_1}$, il faut et il suffit que la projection de F sur F_0 parallèlement à G_1 soit un isomorphisme, c'est-à-dire que $I - j \circ f$ soit inversible. Alors $\gamma(f) = i \circ f \circ (I - j \circ f)^{-1}$. On constate que l'ensemble de définition de γ est ouvert et que $\gamma \circ \gamma$ est analytique.

(iii) Cas général : Si $U_{G_0} \cap U_{G_1} \neq \emptyset$, soit F un supplémentaire commun à G_0 et G_1 . En passant par l'intermédiaire de ψ_{F, G_0} et ψ_{F, G_1} , le changement de carte se décompose en trois facteurs dont deux rentrent dans le cas (i) et un dans le cas (ii).

Les cartes $\psi_{F, G}$ forment un atlas qui munit $\mathcal{F}(E)$ d'une structure de variété. On définit une distance d sur l'ensemble $\hat{\mathcal{F}}(E)$ de tous les sous-espaces vectoriels fermés de E en posant $d(F, F') = \sup(\theta(F, F'), \theta(F', F))$, où

$$\theta(F, F') = \sup_{x \in F, \|x\| \leq 1} \inf_{y \in F', \|y\| \leq 1} \|x - y\|.$$

L'ensemble $\mathcal{F}(E)$ est ouvert dans $\hat{\mathcal{F}}(E)$ et la topologie sous-jacente à la structure de variété coïncide avec la topologie induite par d . En particulier cette topologie est séparée.

9. Applications Ker et Im.

Etant donné trois espaces de Banach E, E', E'' , on notera $\mathcal{Y}(E, E', E'')$ l'ensemble des couples (f, g) de morphismes directs tels que

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ E & \rightarrow & E' & \rightarrow & E'' \end{array}$$

soit une suite exacte. En particulier $\mathcal{P}(0, E, E')$ et $\mathcal{P}(E, E', 0)$ sont respectivement l'ensemble des monomorphismes directs et des épimorphismes directs de E dans E' .

PROPOSITION 4. a) L'ensemble $\mathcal{P}(E, E', 0)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E, E')$ et l'application

$$\text{Ker} : \mathcal{P}(E, E', 0) \rightarrow \mathcal{F}(E)$$

qui à f associe $\text{Ker } f$ est une submersion directe analytique.

b) L'ensemble $\mathcal{P}(0, E, E')$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E, E')$ et l'application

$$\text{Im} : \mathcal{P}(0, E, E') \rightarrow \mathcal{F}(E')$$

est une submersion directe analytique.

c) L'ensemble $\mathcal{P}(E, E', E'')$ est ouvert dans l'ensemble $\mathcal{O}(E, E', E'')$ des couples $(f, g) \in \mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{L}(E', E'')$ tels que $g \circ f = 0$ et est une sous-variété directe localement fermée de $\mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{L}(E', E'')$; l'application

$$\chi : \mathcal{P}(E, E', E'') \rightarrow \mathcal{F}(E) \times \mathcal{F}(E') \times \mathcal{F}(E'')$$

définie par $\chi(f, g) = (\text{Ker } f, \text{Im } f = \text{Ker } g, \text{Im } g)$ est une submersion directe analytique.

a) Soit $f_0 \in \mathcal{P}(E, E', 0)$ un épimorphisme direct de E dans E' , posons $T = \text{Ker } f_0$, et soit S un supplémentaire de T dans E . Soit

$$f = (a, b) : E = T \oplus S \rightarrow E',$$

où $a : T \rightarrow E'$ et $b : S \rightarrow E'$. Pour que $\text{Ker } f \in U_S$, il faut et il suffit que b soit inversible, ce qui a lieu sur un ouvert de $\mathcal{L}(E, E')$ contenant f_0 . Dans ce cas, $\text{Ker } f$ est le graphe de $-b^{-1} \circ a : T \rightarrow S$; l'expression de l'application Ker dans la carte $f = (a, b) \rightarrow (-b^{-1} a, b)$ de $\mathcal{L}(E, E')$,

définie au voisinage de f_0 , et la carte $\psi_{T,S}$ de $\mathcal{L}(E)$ est la projection sur le premier facteur.

b) Soit $f_0 \in \mathcal{Y}(0, E, E')$, posons $T' = \text{Im } f_0$ et soit S' un supplémentaire de T' dans E' . Si $f = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : E \rightarrow T' \oplus S'$, on a $\psi_{T',S'}(\text{Im } f) = b \circ a^{-1}$; or $f = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow (a, b \circ a^{-1})$ est une carte de $\mathcal{L}(E, E')$ au voisinage de f_0 .

c) Soit $(f_0, g_0) \in \mathcal{Y}(E, E', E'')$, posons $(T, T', T'') = (f_0, g_0)$, et soient S, S', S'' des supplémentaires de T, T', T'' . Notons $j : S \rightarrow E$ l'injection canonique et $p : E \rightarrow T$ la projection parallèlement à S ; définissons de même j', j'', p', p'' . Soient

$$f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} : T \oplus S \rightarrow T' \oplus S'$$

et

$$g = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} : T' \oplus S' \rightarrow T'' \oplus S''$$

des applications linéaires continues suffisamment voisines de f, g pour que c et c' soient inversibles. Posons $\alpha = -c^{-1} \circ a = \psi_{T,S}(\text{Ker } p' \circ f)$, $\delta = d \circ c^{-1} = \psi_{T',S'}(\text{Im } f \circ j)$ et $\beta = b - d \circ c^{-1} \circ a$; les conditions suivantes sur f sont équivalentes : (i) $\beta = 0$; (ii) $\text{Im } f = \text{Im } f \circ j$; (iii) $\text{Ker } f = \text{Ker } p' \circ f$. On définit de même α', δ' et β' .

La relation $g \circ f = 0$ entraîne $\text{Im } f \circ j \subset \text{Im } f \subset \text{Ker } g \subset \text{Ker } p'' \circ g$, mais si c et c' sont inversibles, $\text{Im } f \circ j$ et $\text{Ker } p'' \circ g$ appartiennent tous deux à $U_{S'}'$ et l'inclusion entraîne l'égalité. Ceci montre que $\mathcal{Y}(E, E', E'')$ est ouvert dans $\mathcal{D}(E, E', E'')$, et est défini au voisinage de (f_0, g_0) par $\text{Im } f \circ j = \text{Im } f = \text{Ker } g = \text{Ker } p'' \circ g$, soit $\beta = 0$, $\delta = \alpha'$,

$\beta' = 0$. Dans la carte $(f,g) \rightarrow (\alpha, \beta, c, \delta, \alpha', \beta', c', \delta')$, l'ensemble $\mathcal{Y}(E, E', E'')$ est représenté sur un sous-espace direct ; et l'expression de χ dans cette carte et dans la carte $\psi_{T,S} \times \psi_{T',S'} \times \psi_{T'',S''}$ est l'épimorphisme direct

$$(\alpha, c, \delta, c', \delta') \rightarrow (\alpha, \delta, \delta') .$$

La proposition est démontrée.