Hans Lewy

Sur les équations atypiques

Séminaire Jean Leray (1962-1963), p. 177-180
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1962-1963____177_0>

SUR LES ÉQUATIONS ATYPIQUES

par

Hans LEWY

Pfaff et Cauchy ont créé la théorie d'existence et unicité pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre, toutes les variables étant supposées réelles. Que peut-on dire quand les variables indépendantes sont réelles mais les fonctions à déterminer et les équations sont complexes ? Il semble que le problème du cas linéaire à coefficients complexes

$$(1) \qquad \sum_{1}^{n} A_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \frac{\partial u}{\partial \alpha_j} = 0$$

mérite l'attention de l'Analyste, puisqu'il est si simple de le formuler. Supposons le cas général : $n > 2$, $A_j \in C^\infty$, mais non nécessairement analytique; l'opérateur $A = \sum A_j \frac{\partial}{\partial \alpha_j}$, son conjugué complexe $\bar{A}$, et le commutateur $P = A\bar{A} - \bar{A}A$ (qui est encore du premier ordre) linéairement indépendants, c'est-à-dire qu'il existe pas de relation linéaire à coefficients fonctions de α et non tous nuls.

Problème non-résolu à présent : Existe-t-il une solution u locale de (1) et différente d'une constante ?

Admettons maintenant que $x(\alpha)$, $y(\alpha)$,... soient des solutions de (1) au sens local. On note que toute fonction holomorphe $F(x,y,\ldots)$ en est une autre, puisqu'on a $AF = F_x Ax + F_y Ay + \ldots = 0$. La question se pose si toute solution u peut s'obtenir de la sorte à partir d'une liste appropriée de $n-1$ solutions $x(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $y,\ldots$ Ici la réponse est négative. Mais on a le théorème suivant [1] :

Soient $n = 3$; $A, \bar{A}, P$ linéairement indépendants, $x(\alpha)\ y(\alpha) \in C^2(a)$ et $Ax = Ay = 0$ dans l'ouvert <u>a</u> de l'espace des α et

$$\operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} x_{\alpha_1} & x_{\alpha_2} & x_{\alpha_3} \\ y_{\alpha_1} & y_{\alpha_2} & y_{\alpha_3} \end{matrix} \right\| = 2$$

de sorte que $x(\alpha)$, $y(\alpha)$ appliquent <u>a</u> (ou une portion ouverte <u>a</u>' suffisamment petite de <u>a</u>) topologiquement sur une surface S de l'espace E^4 des x, y à 4 dimensions réelles. Alors il existe un ouvert ω de E^4 tel que toute solution $u \in C'$ de (1) dans <u>a</u>' peut être envisagée comme la valeur aux limites sur S d'une fonction $F(x,y)$, holomorphe dans ω .

Soulignons que ω ne dépend pas de u . Prenons par exemple une fonction quelconque $G(x,y)$ holomorphe sur un ouvert Ω de E^4 dont la fermeture $\tilde{\Omega}$ contient S, et telle que $G \in C'(\Omega \cup S)$. Alors nécessairement $AG = 0$ sur S et le théorème affirme que G se prolonge analytiquement dans tout Ω .

Remarquons que l'indépendance linéaire de $A, \bar{A}, P$ n'est qu'une forme intrinsèque de la pseudoconvexité forte (inégalité) de S.

On peut imaginer une extension du théorème dans plusieurs directions.

1. Considérons une portion S^{2n-1} d'une hypersurface de dimension $(2n - 1)$ dans l'espace E^{2n} de n variables complexes $x_1, x_2, \dots, x_n$, pseudoconvexe au sens fort. Alors l'analogue vaut. Nous avons affaire avec $(n - 1)$ équation <u>simultanées</u> du type (1) qui expriment la nullité de toutes les combinaisons linéaires de

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_1}, \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_n}$$

qu'on peut former sur S , ne connaissant de u que ses valeurs sur S .

2. On considère une seule équation (1) . Conjecture : Posons $n = 4$. Soient $x,y,z(\alpha)$ trois solutions C^2 de (1) telles que

$$\text{rang} \left\| \begin{matrix} x_{\alpha_1} & x_{\alpha_2} & x_{\alpha_3} & x_{\alpha_4} \\ y_{\alpha_1} & y_{\alpha_2} & y_{\alpha_3} & y_{\alpha_4} \\ z_{\alpha_1} & z_{\alpha_2} & z_{\alpha_3} & z_{\alpha_4} \end{matrix} \right\| = 3$$

dans un ouvert $\underline{a}$ des α . Supposons que $\Lambda, \bar{\Lambda}, P, \Lambda P - P\Lambda$ soient linéairement indépendants dans $\underline{a}$. Alors il existe un ouvert $\underline{a}' \subset \underline{a}$ et un ouvert fixe ω de E^6 tel que toute solution $u \in C'$ de (1) dans $\underline{a}'$ peut être envisagée comme valeur aux limites sur S d'une $F(x,y,z)$ holomorphe et C' dans ω , où

$$S = \left\{ x,y,z \quad x = x(\alpha),\ y = y(\alpha), z = z(\alpha),\ \alpha \in a' \right\} .$$

Nous n'avons que des exemples [2] d'un tel phénomène, par lequelun ensemble (local) de 4 dimensions réelles S^4 engendre un ouvert d'holomorphie de l'espace E^6 , ou, plus généralement, un S^{n+1} engendre un ouvert ω de l'espace E^{2n} de sorte que la continuité C' sur S^{n+1} des valeurs aux limites d'une fonction holomorphe F entraîne l'holomorphie de F dans ω .

BIBLOGRAPHIE

[1] On the local character of the solutions of an atypical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables. Ann. Math. vol 64, n° 3(1956) pp. 514-522.

[2] On hulls of holomorphy, Comm. Pure Appl. Math. vol. 13 n°4, pp. 587-591 (1960).