

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

L. GÅRDING

Distributions invariantes

Séminaire Jean Leray (1961-1962), exp. n° 1, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1961-1962____A1_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DISTRIBUTIONS INVARIANTES

par

L. GÄRDING

1. Soit X une variété et $\Gamma = \{\gamma\}$ un groupe opérant sur X , γx étant de classe $C = C^\infty$ sur X . Une distribution $g(x)$ sur X est dite invariante si $g(\gamma x) = g(x)$ pour tout γ .

Exemples.- 1°) $g(x)$ est une fonction invariante $\Leftrightarrow g = \text{constante}$ sur les orbites Γx de X .

2°) $X = \mathbb{R}^n$, $n > 1$, Γ le groupe d'automorphismes linéaires d'une forme quadratique $G(x) = \sum_{jk} g_{jk} x_j x_k$. Toute distribution invariante ayant pour support l'origine est de la forme $Q(\Delta) \delta(x)$, $Q = \text{polynome}$,

$$\Delta = \sum g^{jk} (\partial / \partial x_j) (\partial / \partial x_k).$$

3°) Même espace, même groupe, $G = \sum x_k^2$, ($\Gamma = \text{le groupe orthogonal}$).

On obtient l'espace P' de toutes les distributions invariantes comme il suit (Schwartz).

Soit I l'intervalle $\xi \geq 0$ et soit $d\gamma$ la mesure de Haar sur Γ ,
 $\int d\gamma = 1$. Alors $f \rightarrow (Mf)(\xi) = \int f(\gamma x) d\gamma$ où $\xi = xx = \sum x_j^2$ est une application continue surjective $C_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(I)$, (indice 0 : support compact); l'adjoint $M' : C'(I) \rightarrow P' \subset C'(\mathbb{R}^n)$ ($C' = \text{les distributions}$) est un isomorphisme

(
 Remarque.- $(Mf)(\xi) = \xi^{1-n/2} \int \delta(\xi - xx) f(x) dx$ à un facteur positif près.

Preuve.- $(Mf)(\xi) = \int f(\gamma y) d\gamma$ où $y = (\sqrt{\xi}, 0, \dots, 0)$ est fonction paire régulière en $\sqrt{\xi}$, donc régulière en ξ . Si $h \in C_0(I)$ et $f(x) = h(xx)$, alors, $Mf = h$. Clair que M' est une application dans P' . Soit $g \in P'$, alors

$$\int g(x)f(x)dx = \int g(x) f(\gamma x)dx = \int g(x) (Nf)(x) d x$$

où

$$(Nf)(x) = \int f(\gamma x) d \gamma .$$

Donc

$$\int g(x) f(x)dx = \int g(x)(Mf)(xx)dx$$

est fonction linéaire continue de $Mf \in C_0(I)$; elle s'écrit $\langle h, Mf \rangle$ où $h \in C^1(I)$.

2. Nous allons généraliser le dernier exemple en remplaçant R^n par un produit $X = R^n \times \dots \times R^n$; m facteurs ; points $x = x_1, \dots, x_m$; $x_k \in R^n$. D'abord, décrivons X/Γ , espace des orbites. Les paramètres de ces orbites sont les polynômes invariants classiques : les produits scalaires

$$(1) \quad \zeta_{jk} = x_j \cdot x_k$$

et, si $m \geq n$, les déterminants

$$(2) \quad \sigma_\alpha = \det (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) ; 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_n \leq m$$

Si

$$\zeta_{\alpha\beta} = \det (\zeta_{\alpha_j \beta_k})$$

alors

$$(3) \quad \sigma_\alpha \sigma_\beta = \zeta_{\alpha\beta} .$$

Il est évident que, ζ étant la matrice (ζ_{jk}) ,

$$(4) \quad \zeta \gg 0, \quad \text{rang } \zeta \leq n.$$

Soit R^N l'espace ayant pour coordonnées ζ_{jk} et σ_α ; soit $I = I^{n,m}$ la partie de cet espace où on a (3) et (4). Vu (3), la projection de I sur l'espace des ζ couvre deux fois la partie de cet espace où $\text{rang } \zeta = n$.

Lemme 2.1. (1) et (2) donnent une application biunivoque $I \longrightarrow X/\Gamma$

Preuve : des calculs classiques.

3. Semi-variété, notion ad hoc provisoire. Soit A une partie d'un R^P (topologie induite) et soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A)$ la famille de toutes les applications

$$(1) \quad U \ni u \longrightarrow x(u) \in A$$

qui appliquent une partie ouverte U d'un R^q (q quelconque) dans A et qui sont de classe C sur U . Notons $x(U)$ l'image de l'application (1).

Définition. On dit que A est une semi-variété si tout $x_0 \in A$ a au moins un voisinage de la forme $x(U)$, $x(u)$ appartenant à $\mathcal{F}$.

Remarque.- Si $x(u)$ est biunivoque et si u est fonction de classe C de q coordonnées de x convenablement choisies, A est une variété près de x_0 ; notre définition est la moitié de la définition d'une variété.

Définition. $C(A) =$ l'ensemble des $f(x)$ sur A telles que $f(x(u)) \in C(U)$ pour tout $x(u) \in \mathcal{F}$.

Exemples. 1°) Dans R , $A : x \geq 0$ est une semi-variété ; $C(A) =$ les fonctions $f(x)$ de classe C pour $x \geq 0$.

Preuve.- On prend $x(u) = u^2$ pour tout x_0 . Les fonctions $f(x)$ définies ci-dessus appartiennent à $C(A)$ par définition. Réciproquement, si $f \in C(A)$ alors $g(u) = f(u^2) \in C(R)$ et $g(u) = g(-u)$. Par conséquent, toutes les dérivées de g d'ordre impair sont nulles pour $u = 0$; on a donc

$$f(x) = \sum_0^n a_k x^k + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

pour tout n , c'est-à-dire $f \in C$ au point $x = 0$.

2°) Vu (2.1) et 2.2), I est une semi-variété.

3°) Soit $f \in C$ dans un voisinage de A dans R^P . Alors la restriction de f à A est dans $C(A)$. En effet : $f(x(u)) \in C(U)$ pour tout $x(u) \in \mathcal{F}$.

Remarque. Soit $E(A)$ la restriction de $C(R^P)$ à A . On a vu que $E(A) \subset C(A)$ et que $E(A) = C(A)$ si $A : x \geq 0$, (plus généralement si A est un intervalle fermé). Si $A = I$ et $m < n$, on peut démontrer que $C(A) = E(A)$ est l'espace de toutes les fonctions de classe C dans le cône fermé (2.4). On ignore si $E(A) = C(A)$ pour toute semivariété A . En tout cas, $E(A)$ est un objet peu maniable (il faut employer des théorèmes de prolongement de type Whitney).

La topologie sur $C(A)$ est la moins fine telle que : $f(x) \rightarrow f(x(u))$ applique continûment $C(A)$ dans $C(U)$ pour tout $x(u) \in \overline{F}$, $C(U)$ ayant la topologie de la convergence uniforme sur des compacts. Topologie sur $C_0(A)$: la limite inductive.

Nous allons voir que $C(I)/\text{Fréchet}$ est un $C(I)/\text{Fréchet}$; on ignore si $C(A)$ l'est dans le cas général ($\overline{F}$ est une famille nombreuse !)

Remarque.- Quand Γ opère sur une semivariété A la notion de distribution invariante a un sens : en effet, $C(A)$ a un dual.

4. Fonctions invariantes. Soit Γ le groupe orthogonal. Soit $T = R^{\ell}$ et soit $P(T \times X)$ l'espace des fonctions $f(t, x) \in C(T \times X)$ qui sont invariantes en x , $f(t, x) = f(t, x)$. Topologie induite. Par le lemme 2.1,

$$P \ni f(t, x) = F(t, \xi, \sigma)$$

définit une fonction F sur $T \times I$.

Lemme 4.1.- $f \rightarrow F$ est un isomorphisme $P(T \times X) \rightarrow C(T \times I)$ et un isomorphisme $P_0(T \times X) \rightarrow C_0(T \times I)$.

Preuve esquissée.- Si $n = 1$, $I = I^{n,m}$ s'identifie avec R^m et le lemme est banal. Récurrence par rapport à n . Soit d'abord t_0, ξ_0, σ_0 , un point de $T \times I$ où $\text{rang } \xi_0 > 0$ et soit $t(u), \xi(u), \sigma(u)$ une paramétrisation (3.2) d'un

voisinage J de t_0, ξ_0, σ_0 , assez petit pour qu'on y ait, par exemple, $\xi_{11} > 0$. Il s'agira de démontrer que si $f(t, x) \in P$ et si

$$F(t, \xi, \sigma) = f(t, x)$$

est la fonction correspondante sur I , alors $F(t(u), \xi(u), \sigma(u)) \in C$. Or, comme $\xi_{11} > 0$, chaque ξ, σ dans $t, \xi, \sigma \in J$ est l'image d'un $x \in X$ tel que

$$x_1 = (\sqrt{\xi_{11}}, 0, \dots, 0)$$

$$x_2 = \left(\frac{\xi_{12}}{\sqrt{\xi_{11}}}, x'_2 \right)$$

.....

$$x_m = \left(\frac{\xi_{1m}}{\sqrt{\xi_{11}}}, x'_m \right)$$

où x'_k = a les coordonnées de x_k sauf la première. Par conséquent

$$f(t, x) = g(t, \sqrt{\xi_{11}}, \frac{\xi_{12}}{\sqrt{\xi_{11}}}, \dots, \frac{\xi_{1n}}{\sqrt{\xi_{11}}}, x')$$

où $g \in C^\infty$ est invariant par rapport au sous groupe de Γ qui laisse fixe la première coordonnée. Les invariants de x' sont

$$\xi'_{jk} = \xi_{jk} - \frac{\xi_{1j} \xi_{1k}}{\xi_{11}}$$

$$\sigma'_\beta = \sigma_{1\beta} / \sqrt{\xi_{11}}.$$

Par conséquent, en appliquant le lemme à $T' \times X'$ où $T' = T \times \mathbb{R}^n$ on voit que

$$F(t(u), \xi(u), \sigma(u)) \in C.$$

Un raisonnement plus délicat s'applique si $\text{rang } \gamma_0 = 0$ (Il emploie ceci : un polynôme invariant de x est un polynôme en γ, σ , résultat classique dans la théorie des invariants). La partie topologique du lemme s'obtient sans difficulté.

5. Distributions invariantes. Soit

$$(Mf)(\gamma, \sigma) = \int f(\gamma x) d\gamma$$

où $f \in C(X)$. Selon le lemme 4.1, M est une application continue $C(X) \rightarrow C(I)$ (et $C_0(X) \rightarrow C_0(I)$). M est aussi surjective : soit $g \in C(I)$; alors

$$f(x) = g(\gamma(x), \sigma(x)) \in C(X)$$

et $Mf = g$ (si $\int d\gamma = 1$). Soit $P'(X)$ l'espace des distributions invariantes sur X et $C'(I)$ le dual de $C_0(I)$.

Théorème. M' est un isomorphisme

$$M' : C'(I) \rightarrow P'(X).$$

Preuve : Vu que M est surjectif, il suffit de prouver que M' est surjectif : soit $g \in P'$ et $f \in C_0(X)$. Alors $\langle g, f \rangle = \int g(x) f(x) dx = \int g(x) f(\gamma x) dx = \langle g, Nf \rangle$ où $(Nf)(x) = \int f(\gamma x) d\gamma$. Or, $Nf \in P_0$ et $Nf(x) = F(\gamma, \sigma) = Mf(\gamma, \sigma)$ est un isomorphisme $P_0 \rightarrow C_0(I)$. Par conséquent, il existe $h \in C'(I)$ tel que

$$\langle g, f \rangle = \langle h, Mf \rangle$$

pour tout $f \in C_0(X)$, c'est-à-dire $g = M'h$.

Remarque. On peut donc identifier les distributions invariantes sur X aux distributions sur I , à condition de définir une distribution sur I comme étant une fonctionnelle linéaire continue sur $C_0(I)$.

6. Groupe de Lorentz. Envisageons d'abord le cône du futur de l'espace de Lorents :

$$X : xx = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \geq 0, \quad x_1 \geq 0,$$

et le groupe de Lorentz restreint : Γ . Alors

$$(1) \quad (Mf)(\rho) = \int_X \rho(\gamma - xx) f(x) dx, \quad \rho \geq 0$$

applique $C_0(X)$ sur un espace H qui consiste en toutes les fonctions $g(\varphi)$ à support compact, de classe C pour $\rho > 0$, ayant près de $\rho = 0$ un développement asymptotique de la forme

$$g(\rho) \sim b_0 + \sum_1^{\infty} (a_j \rho^j \log \frac{1}{\rho} + b_j \rho^j) .$$

L'application adjointe $M' : H' \rightarrow C'(X)$ a pour image l'espace P' des distributions invariantes sur X . (Méthée, thèse ; Gårding et Roos, cours de Varenna).

Les coefficients de $\rho^j \log \frac{1}{\rho}$ du développement de $(Mf)(\rho)$ ont la forme

$$\int Q(\Delta) \delta(x) f(x) dx$$

où Q est un polynome et Δ l'opérateur des ondes. On trouve une étude analogue pour le groupe orthogonal de signature arbitraire dans un article de Tengstrand (Math. Scand. 1960), complétant un article de de Rham.

Remarque.- Γ Etant non compact, on ne peut plus prendre la moyenne sur Γ . Or, pour le groupe orthogonal on a, à des facteurs positifs près,

$$\rho^{\frac{2-n}{2}} \int \delta(\rho - xx) f(x) dx = \int f(\gamma x') d\gamma$$

où $\gamma = x'x'$; on a de même

$$(2) \quad (\rho s - t^2)^{\frac{3-n}{2}} \int \int (\rho - xx) \delta(s - yy) \delta(t - xy) f(x, y) dx dy = \int f(\gamma x', \gamma y') d\gamma$$

où $x'y' = t$
où $x'x' = r$, $y'y' = s$, /et $x, y, \dots \in R^n$, $n \geq 2$, et des formules analogues pour plus que deux vecteurs.

Maintenant prenons pour X le produit de deux cônes du futur, les points de X étant des couples de vecteurs x et y .

Essayons de remplacer (1) par l'analogue de (2) pour l'espace de Lorentz ; définissons M par la formule

$$(Mf)(\rho, \sigma, \tau) = (\tau^2 - \rho\sigma)^{-1/2} \int \delta(\rho - xx) \delta(\sigma - yy) \delta(\tau - xy) f(x, y) dx dy$$

où

$$xy = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4$$

et φ, σ, τ varient dans le cône

$$I: \quad \varphi \geq 0, \quad \sigma \geq 0, \quad \tau^2 \geq \varphi \sigma.$$

Les éléments de Γ étant unimodulaires M est une distribution invariante fonction de φ, σ, τ . Les trois variétés $xx = \varphi$, $yy = \sigma$ et $xy = \tau$ se coupent régulièrement si $\tau^2 > \varphi \sigma$; en ces points Mf est une fonction de classe C . Une étude complète des Mf reste à faire mais on peut dire ceci : introduisons des variables nouvelles définies par un rayon

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\varphi + \sigma)^2 + 4(\tau^2 - \varphi \sigma)} + \varphi + \sigma \right)$$

qui est positif sauf si $\varphi = \sigma = \tau = 0$, et deux variables angulaires θ et α telles que

$$0 \leq \alpha \leq \min \left(\theta, \frac{\pi}{2} - \theta \right),$$

définies par

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \sqrt{(\mu + \sigma)/(\mu + \varphi)} = \sqrt{(\lambda - \varphi)(\lambda - \sigma)} \\ \mu &= \lambda \operatorname{tg}^2 \alpha \end{aligned}$$

où

$$\mu = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\varphi + \sigma)^2 + 4(\tau^2 - \varphi \sigma)} - \varphi - \sigma \right).$$

Alors, $M^*f(\lambda, \theta, \alpha) = (Mf)(\varphi, \sigma, \tau)$ est fonction régulière pour $\lambda > 0$ et pour $\lambda = 0$ on a un développement asymptotique

$$(3) \quad M^*f \sim (N_0 f)(\theta, \alpha) + \sum_1^{\infty} \left[(N_j f)(\theta, \alpha) + \log \frac{1}{\lambda} (L_j f)(\theta, \alpha) \right] \lambda^j$$

où les coefficients sont des fonctions régulières de θ et α . Pour θ et α

fixées, ils sont évidemment des distributions invariantes. Le support d'un N_j est la sous-variété de X où

$$xx = yy = xy = 0 ,$$

c'est-à-dire où x et y sont des vecteurs de longueur nulle proportionnels. Le support d'un L_j est le point $x = y = 0$.

En faisant varier $f \in C_0(X)$ on obtient un espace $H_0 = M^*C_0(X)$ qui consiste en toutes les fonctions en λ, θ, α de classe C pour $\lambda > 0$, nulles pour λ grand, qui pour $\lambda = 0$ ont un développement (3) où les coefficients sont des fonctions régulières en θ, α ; ils ne sont pas arbitraires, il reste à les étudier. De toute façon si l'on munit H_0 de la topologie la moins fine rendant $f \rightarrow M^*f$ continu, on peut affirmer :

Théorème. Toute distribution invariante sur X s'écrit sous la forme $\langle h, M^*f \rangle$ où h appartient au dual H' de H_0 .

Principales étapes de la preuve.- Il est évident que $\langle h, M^*f \rangle = \langle g, f \rangle$ donne une distribution invariante g . Réciproquement, soit $g(x,y) \in C'(X)$ invariant. Alors, elle est a fortiori invariante pour le sous-groupe de Γ qui laisse x_1 fixe. Par conséquent, vu un résultat précédent,

$$g(x,y) = g^*(x_1, y_1, x_2x_2 + \dots, y_2y_2 + \dots, x_2y_2 + \dots)$$

où $g^*(x_1, y_1, r, s, t)$ est une distribution sur le produit de R^2 par la semivariété $r \geq 0, s \geq 0, rs \geq t^2$. En faisant un changement de variables : $\rho = x_1^2 - r$, $\sigma = y_1^2 - s$, $\tau = x_1y_1 - t$ de classe C on voit donc que

$$g(x,y) = G(x_1, y_1, xx, yy, xy)$$

où G est une distribution sur la semivariété

$$(4) \quad (x_1^2 - \rho)(y_1^2 - \sigma) \geq (x_1y_1 - \tau)^2, \quad \tau^2 \geq \rho\sigma.$$

En utilisant les transformations infinitésimales de Γ^{-1} on peut démontrer que l'invariance de g par rapport à Γ^{-1} équivaut aux équations suivantes :

$$(5) \quad \begin{aligned} ((x_1^2 - \varphi) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 y_1 - \tau) \frac{\partial}{\partial y_1}) G &= 0 \\ ((x_1 y_1 - \tau) \frac{\partial}{\partial x_1} + (y_1^2 - \sigma) \frac{\partial}{\partial y_1}) G &= 0 \end{aligned}$$

pour G . En un point où l'on a la première inégalité (4) avec $>$, ces équations disent que G ne dépend pas de x_1 et de y_1 . On peut étendre ce résultat à tous les points où $\varphi + \sigma + \tau > 0$. Une étude approfondie de (5) permet de démontrer que tout g invariant à support $xx = yy = xy = 0$ s'écrit sous la forme donnée par le théorème où le support de h est contenu dans $\lambda = 0$, c'est-à-dire (h, M^*f) est une somme finie.

$$\sum \langle A_j, N_j f \rangle + \sum \langle B_j, L_j f \rangle,$$

les A_j et B_j étant des distributions en Θ et α .

7. Anatomie des distributions invariantes. Le numéro 6 montre que si les orbites de X sous l'action de Γ^{-1} sont compliquées, on peut avoir une situation compliquée. D'autre part pour le groupe orthogonal les orbites sont compliquées, mais la situation est simple. En utilisant les transformations infinitésimales de Γ^{-1} on peut se placer dans la situation suivante dans une variété X : étant données un certain nombre d'opérations différentielles du premier ordre, $Z_1, \dots, Z_\ell$ qui forment un système complet (le crochet $[Z_j, Z_k]$ est combinaison linéaire des Z) on cherche les distributions $f(x)$ qui satisfont à $Z_1 f = \dots = Z_\ell f = 0$. Vu le théorème de Frobenius, ce problème est simple au voisinage d'un point où la dimension du module engendré par les Z est constante. Pour les autres points on n'a aucun résultat général.