

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

DANIEL STERNHEIMER

Propriété multiplicative de l'indice analytique. Opérateurs de Calderon-Zygmund à symbole continu. Produits tensoriels

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 2 (1963-1964), exp. n° 22, p. 1-23

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_2_A7_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉ MULTIPLICATIVE DE L'INDICE ANALYTIQUE.

OPÉRATEURS DE CALDERON-ZYGMUND À SYMBOLE CONTINU. PRODUITS TENSORIELS

par Daniel STERNHEIMER

Introduction.

Dans l'exposé n° 14, on a vu que l'indice analytique i_a est une fonction additive sur $K(B(X), S(X))$. Le but de cet exposé est de montrer une propriété multiplicative, à savoir que si

$$d_\nu \in K(B(X_\nu), S(X_\nu)) \quad (\nu = 1, 2),$$

en notant encore $d_1 \otimes d_2$ l'image canonique de cet élément de

$$K(B(X_1), S(X_1)) \otimes K(B(X_2), S(X_2))$$

dans $K(B(X), S(X))$, où $X = X_1 \times X_2$, on a :

$$(1) \quad i_a(d_1 \otimes d_2) = i_a(d_1) i_a(d_2).$$

On a vu (exposé n° 15) qu'en posant

$$\underline{E} = \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_2 \oplus \underline{F}_1 \otimes \underline{F}_2, \quad \underline{F} = \underline{F}_1 \otimes \underline{E}_2 \oplus \underline{E}_1 \otimes \underline{F}_2,$$

et

$$\sigma = \sigma_1 \# \sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_1 \otimes I_{\underline{E}_2} & - I_{\underline{F}_1} \otimes \sigma_2^* \\ I_{\underline{E}_1} \otimes \sigma_2 & \sigma_1^* \otimes I_{\underline{F}_2} \end{pmatrix}$$

on pouvait représenter $d_1 \otimes d_2$ dans $K(B(X), S(X))$ par $d(\underline{E}_B, \underline{F}_B, \sigma)$.

On sait que $i_a(d_\nu) = i_a(\sigma_\nu) = i_a(D_\nu)$ où D_ν est un opérateur de Calderon-Zygmund ρ -elliptique, de ρ -symbole σ_ν (quel que soit son choix dans le " ρ -relèvement" de σ_ν , et quel que soit le choix de ρ , degré d'homogénéité de σ_ν sur $T^*(X_\nu)$). Afin de démontrer (1), il nous faut, pour calculer l'indice analytique en revenant à sa définition, "relever" $\sigma = \sigma_1 \# \sigma_2$ en un opérateur D , dont on calculera l'indice. Or $\sigma_\rho(D_\nu)$ est C^∞ en dehors de la section nulle de $T^*(X_\nu)$, donc $\sigma_\rho(D_\nu) \otimes I_{\underline{E}_{3-\nu}}$ est C^∞ au-dessus de $T^*(X_\nu \times X_{3-\nu}) - T^*(X_{3-\nu})$,

mais ne le sera au-dessus de $T^*(X)$ que si σ_ν l'est au-dessus de $T^*(X_\nu)$ tout entier. Cependant, si $\rho > 0$ ou si σ_ν est de la forme $\alpha(x_\nu) I_{E_\nu}$, on peut prolonger σ_ν à tout $B(X_\nu)$ en une section continue, et alors $\sigma_\nu \otimes I_{E_{3-\nu}}$ sera continu au-dessus de $B(X)$. Comme i_a est indépendant de ρ (exposé n° 14), on pourra trouver D sous la forme $D_1 \# D_2$ (même matrice), pourvu que l'on puisse exhiber un opérateur ayant un symbole continu donné par le produit tensoriel de deux symboles C^∞ , et qu'on ait une théorie des opérateurs de Calderon-Zygmund à symbole continu.

1. Opérateurs de Calderon-Zygmund à symbole continu.

1.1 Définitions. - Soient X une variété C^∞ compacte de dimension n , $E, F, \dots$ des fibrés C^∞ à fibre vectorielle complexe (de dimension finie) sur X ; on note par $\underline{E}, \underline{F}, \dots$ leurs images réciproques au-dessus de $T^*(X)$. Les espaces $H^S(X; E)$ sont hilbertisables. On hilbertise $H^0(X; E)$ par le choix d'une mesure (C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue) sur X et d'une structure hermitienne sur E . On hilbertise alors $H^S(X; E)$ par transport de structure, à l'aide des isomorphismes

$$G_S(X; E) = H^S(X; E) \rightarrow H^0(X; E)$$

construits à l'exposé n° 13 (on pourrait aussi hilbertiser directement $H^S(X; E)$ à l'aide d'une partition de l'unité $\sum \alpha_i^2 = 1$ subordonnée à un recouvrement fini de X en ouverts de coordonnées et de trivialité $\{u_i\}$ par la relation

$$(T_1 | T_2)_s = \sum_i (\widetilde{\alpha_i T_1} | \widetilde{\alpha_i T_2})_s$$

où le $\sim$ désigne l'image sur $\underline{R}^n$; mais ceci est moins commode pour la suite, et est d'ailleurs un cas particulier de ce qui précède). On supposera même X munie d'une métrique riemannienne C^∞ , ce qui permet de construire $B(X), S(X)$. On peut alors identifier E avec $\overline{E}^* \otimes_X \Omega$ où

$$\Omega = \left(\bigwedge^n T^*(X) \right)_t \approx \underline{\mathbb{C}} \times X$$

(t = tordu, par les deux orientations possibles de l'espace). E_B et E_S désigneront les images réciproques de E au-dessus de $B(X)$ et $S(X)$ respectivement.

On notera $\Gamma_\infty(X; E, F; \rho)$ au lieu de $\Gamma(X; E, F; \rho)$ comme précédemment, pour les opérateurs de Calderon-Zygmund ("op. de C.-Zyg." ou "op. C^∞ -Z.") à sym-

bole dans $\mathcal{E}(T^*(X) ; \mathcal{E}(\underline{E}, \underline{F}) ; \rho)$.

DÉFINITION 1. - $\Gamma_o(X ; E, F ; s, t) = \overline{\Gamma_\infty(X ; E, F ; s - t)}$, l'adhérence étant prise dans $\mathcal{E}(H^s(X ; E), H^t(X ; F))$, muni de sa topologie d'espace banachisable (ou de Banach).

Cette définition ne dépend pas des structures choisies sur X, E, F . On le notera parfois $\Gamma_o^{s,t}(X ; E, F)$, ou $\Gamma_o^{s,t}(E, F)$, ou encore $\Gamma_o^{s,t}$ lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible. C'est un sous-espace fermé, celui des opérateurs de Calderon-Zygmund à symbole continu ("op. C^0 -Z.") ; cette dénomination sera justifiée plus loin.

DÉFINITION 2. - $K(X ; E, F ; s, t) =$ espace des opérateurs compacts de $\mathcal{E}(H^s(X ; E), H^t(X ; F))$.

On notera parfois ce sous-espace fermé $K^{s,t}(X ; E, F)$, ou $K^{s,t}(E, F)$, ou $K^{s,t}$.

Remarque. - L'espace $\bigcap_s \mathcal{E}(H^s(X ; E), H^{-\rho}(X ; F))$ n'étant pas (muni de la topologie de la limite projective) banachisable, il y aurait de grosses difficultés à utiliser la fermeture $\Gamma_o(X ; E, F ; \rho)$ de $\Gamma_\infty(X ; E, F ; \rho)$ dans cet espace, ainsi que

$$K(X ; E, F ; \rho) = \bigcap_s K(X ; E, F, s, s - \rho) \supset \mathcal{A}(X ; E, F ; \rho).$$

PROPOSITION 1. - $K(X ; E, F ; s, t) \subset \Gamma_o(X ; E, F ; s, t)$.

En effet, $\mathcal{A}(X ; E, F ; s - t) \subset K(X ; E, F ; s, t)$, car X est compacte. D'autre part, si $k \in K^{s,t}$, on peut l'approcher (dans $\mathcal{E}(H^s, H^t)$) par des opérateurs de rang fini, et chaque opérateur de rang fini R est approchable par des améliorants (à $\varepsilon \|R\|$ près), en approchant une base orthonormée de $\text{Im } R$, de dimension l , dans H^t à ε/l près, par des éléments de $\mathcal{Q}$, de norme 1 dans H^t .
Donc

$$\overline{\mathcal{A}(X ; E, F ; s - t)} \supset K(X ; E, F ; s, t)$$

(l'adhérence est prise dans $\mathcal{E}(H^s, H^t)$).

Remarque. - Cette dernière relation est encore valable dans $\mathbb{R}^n$, où $\Gamma_o^{s,t}$ est engendré (comme sous-espace fermé de $\mathcal{E}(H^s, H^t)$) par les $(\alpha)(\beta)$ et les améliorants (d'ordre $s - t$, degré d'homogénéité des β). Dans le cas de X variété compacte, $\Gamma_o^{s,t}$ est engendré par les $(\alpha)(\beta)_{\text{loc}}$ (β "locaux") et $K^{s,t}$ (ou $\mathcal{A}(X ; E, F ; s - t)$).

1.2 Propriétés des opérateurs C^0 -Z.

1° Composition. - Soient $A \in \Gamma_0(X; E, G; s, u)$ et $B \in \Gamma_0(X; G, F; u, t)$. Alors $B \circ A$ opère $H^s(X; E) \rightarrow H^t(X; F)$ et $B \circ A \in \Gamma_0(X; E, F; s, t)$. On le déduit de cette propriété pour les op. C^∞ -Z. par passage à la limite.

2° Transposition. Adjonction. - Soit $A \in \Gamma_0^{s,t}(E, F)$. Alors

$${}^tA \in \Gamma_0^{-t,-s}(F^* \otimes_X \Omega, E^* \otimes_X \Omega)$$

et

$$A^* \in \Gamma_0^{-t,-s}(\overline{F}^* \otimes_X \Omega, \overline{E}^* \otimes_X \Omega)$$

(espace que l'on peut identifier à $\Gamma_0^{-t,-s}(F, E)$). On obtient ce résultat par passage à la limite (les applications $A \rightsquigarrow {}^tA$ et $A \rightsquigarrow A^*$ étant continues).

3° Adjonction hilbertienne. - Si $A \in \Gamma_0^{s,t}(E, F)$, on peut définir son adjoint hilbertien $A^+ \in \mathcal{L}(H^t(F), H^s(E))$ à l'aide du produit scalaire. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} H^t(F) & \xrightarrow[\sim]{G_t(F)} & H^0(F) & \xrightarrow[\sim]{(\omega)_F} & H^0(\overline{F}^* \otimes_X \Omega) & \xrightarrow{G_t(F)^*} & H^{-t}(\overline{F}^* \otimes_X \Omega) \\ A^+ \downarrow & & & & & & \downarrow A^* \\ H^s(E) & \xleftarrow[\sim]{G_{-s}(E)} & H^0(E) & \xleftarrow[\sim]{(\omega)_E^{-1}} & H^0(\overline{E}^* \otimes_X \Omega) & \xleftarrow[\sim]{G_{-s}(E)^*} & H^{-s}(\overline{E}^* \otimes_X \Omega) \end{array}$$

où $(\omega)_E$ et $(\omega)_E^{-1}$ sont (respectivement) définies par $f \rightsquigarrow fw$ et $fw \rightsquigarrow f$ ($f \in H^0(X; E) = H^0(E)$), ω étant la C^∞ -forme partout différente de zéro, de degré maximum, à l'aide de laquelle on définit la structure hilbertienne de $H^0(E)$, la dualité et l'antidualité entre $H^0(E)$, et $H^0(E^* \otimes_X \Omega)$ et $H^0(\overline{E}^* \otimes_X \Omega)$ (respectivement), donc aussi entre H^s et H^{-s} ; on a

$$(g | f)_0 \text{ (produit scalaire)} = (g, fw) \text{ (antidualité)} = \int_X \langle g, \overline{f} \rangle \omega.$$

Les $G_{-s}(E)$ (et $G_t(F)$) étant ceux qui définissent les structures hilbertiennes sur les H^s , le diagramme ci-dessus est commutatif. Or les $G_{-s}(E)$, ... sont des op. C^∞ -Z., ainsi que les $(\omega)_E^{-1}$ et $(\omega)_F$, et on vient de voir que

$$A^* \in \Gamma_0(X; \overline{F}^* \otimes_X \Omega, \overline{E}^* \otimes_X \Omega; -t, -s).$$

D'après la propriété de composition des op. C^0 -Z., on a $A^+ \in \Gamma_0(X; F, E; t, s)$. Remarquons que si $A = (\alpha)$, $A^+ = (\overline{\alpha})$, et de même pour les " (β) locaux".

1.3 Le $(0, 0)$ -symbole pour $\Gamma_0(X; E, F; 0, 0)$. - On le définira à l'aide du :

LEMME. - Le 0-symbole σ_0 est une application continue de norme ≤ 1 :

$$\mathcal{L}(H^0(E), H^0(F)) \supset \Gamma_\infty(X; E, F; 0) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E, F)) .$$

$\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E, F))$ désigne l'espace des sections continues du fibré $\mathcal{L}_S(E, F)$, image réciproque de $\mathcal{L}(E, F)$ par l'application $S(X) \rightarrow X$, muni de la topologie de la convergence uniforme.

Soit en effet $A \in \Gamma_\infty(X; E, F; 0)$. On sait (exposé n° 13) que

$$\forall (x, \xi) \in T^*_\bullet(X), \exists \{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}, \psi_j \in H^0(X; E), 0 \leq c < \|\psi_j\|_0 \leq C,$$

telle que $\sigma_0(A)(x, \xi)\psi_j - A\psi_j \rightarrow 0$ fortement dans $H^0(X; F)$ pour $j \rightarrow \infty$, i. e.

$$\|\psi_j\|_0 (\|\sigma_0(A)(x, \xi)\| - \varepsilon_j) \leq \|A\psi_j\|_0 \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H^0, H^0)} \|\psi_j\|_0,$$

la norme de $\sigma_0(A)(x, \xi)$ étant prise dans $(\mathcal{L}_S(E, F))_{(x, \xi)}$ (norme de matrice), où $\varepsilon_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

Donc

$$\|\sigma_0(A)(x, \xi)\| \leq \|A\|_0, \quad \forall (x, \xi) \in T^*_\bullet(X).$$

Donc $\|\sigma_0(A)\| \leq \|A\|_0$, la norme du 1er membre étant prise dans $\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E, F))$; c'est

$$\max_{(x, \xi) \in S(X)} \|\sigma_0(A)(x, \xi)\|;$$

la norme du 2e membre est prise dans $\mathcal{L}(H^0(E), H^0(F))$.

Ainsi, $\|\sigma_0\| \leq 1$ comme opérateur $\mathcal{L}(H^0, H^0) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E, F))$ défini sur $\Gamma_\infty(X; E, F; 0)$. On peut donc prolonger par continuité σ_0 en une application $\sigma_{0,0}$ de norme ≤ 1 de $\Gamma_0(X; E, F; 0, 0)$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E, F))$. Son noyau, qui était $\alpha(X; E, F; 0)$, contient donc $K(E, F; 0, 0) = \overline{\alpha(E, F; 0)}$. Si $A = \lim A_n$ dans $\mathcal{L}(H^0(E), H^0(F))$, $A_n \in \Gamma_\infty(E, F; 0)$, on aura donc :

$$\sigma_{0,0}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_0(A_n)$$

dans $\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E, F))$.

Propriétés du $(0, 0)$ -symbole. - Par passage à la limite, on aura pour $\Gamma_0^{0,0}$:

$$\sigma_{o,o}({}^t A) = {}^{tv}\sigma_{o,o}(A) \quad (\text{où } v \text{ indique le changement de } \xi \text{ en } -\xi).$$

$$\sigma_{o,o}(A^*) = \sigma_{o,o}(A)^* \quad \text{et} \quad \sigma_{o,o}(B \circ A) = \sigma_{o,o}(B) \circ \sigma_{o,o}(A)$$

si A et $B \in \Gamma_o^{o,o}$ (les fibrés n'étant pas nécessairement les mêmes).

De plus,

$$\sigma_{o,o}(A^+) = (\sigma_{o,o}(A))^*.$$

En effet, $A^+ = (\omega)_E^{-1} A^* (\omega)_F$, si $A \in \Gamma_o^{o,o}(E, F)$. Or $(\omega)_F$ est un op. C^0 -Z. de symbole $\omega_\rho = \omega \underline{I}_F$, et $(\omega)_E^{-1} = (\omega)_E^*$ en est un autre, de symbole

$$\omega^{-1} \underline{I}_{\underline{E}^* \otimes \Omega} = \omega^{-1} \underline{I}_{\underline{E}}.$$

D'où

$$\sigma_{o,o}(A^+) = \sigma_{o,o}(A^*) = \sigma_{o,o}(A)^*.$$

1.4. PROPOSITION 2. - $\Gamma_o/K(X; E, E; 0, 0)$ est isomorphe isométriquement à $C(\mathcal{L}_S(E, E))$ des sections continues de $\mathcal{L}_S(E, E)$, ainsi qu'à l'algèbre $C(\mathcal{L}_S(\underline{E}, \underline{E}; 0))$ des sections prolongées en fonctions 0-homogènes à $\mathcal{L}(\underline{E}, \underline{E})$ au-dessus de $T^*(X)$.

$\Gamma_o(X; E, E; 0, 0)$ est une sous-algèbre involutive fermée (l'involution étant définie par l'adjonction hilbertienne) de $\mathcal{L}(H^0(X; E))$, donc est une C^* -algèbre (cf. par exemple RICKART [1]). $K(X; E, E; 0, 0)$ est un idéal bilatère fermé de cette C^* -algèbre, donc $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$ est aussi une C^* -algèbre.

1° Cas E "scalaire" trivial, $E = X \times \mathbb{C}$. - Alors $C(\mathcal{L}_S(E, E)) = C(S(X))$ est une C^* -algèbre commutative, de même que $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$.

Remarquons que $\sigma_{o,o}$ induit une application $\dot{\sigma}_{o,o}$ de norme ≤ 1 de $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$ dans $C(\mathcal{L}_S(E, E))$ par $\dot{\sigma}_{o,o}(\dot{A}) = \sigma_{o,o}(A)$ si A est un représentant de $\dot{A} \in \Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$. La norme est ≤ 1 , car on a :

$$\|\dot{\sigma}_{o,o}(\dot{A})\| = \|\sigma_{o,o}(A)\| \leq \inf_{A \in \dot{A}} \|A\| = \|\dot{A}\|,$$

la norme de $\dot{A}$ étant prise dans $\mathcal{L}(H^0)/K^{o,o}$. Ceci vaut dans le cas général.

Ici, nous avons le diagramme (commutatif)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_o^{o,o} & & \\ \downarrow \text{proj} & \searrow \sigma_{o,o} & \\ \Gamma_o^{o,o}/K^{o,o} & \xrightarrow{\dot{\sigma}_{o,o}} & C(S(X)) \end{array}$$

Montrons que $\sigma_{o,o}$ (ou, ce qui revient au même, $\dot{\sigma}_{o,o}$) est bijective.

$\forall x \in X$, $(x, \xi) \in S(X)$, l'application $\dot{A} \rightsquigarrow \dot{\sigma}_{o,o}(\dot{A})(x, \xi)$ est un caractère continu de $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$.

Soit inversement χ un caractère continu quelconque de cette C^* -algèbre. χ est un caractère sur tous les $(\dot{\alpha})$, $\alpha \in S(X)$, donc il existe un $x \in X$ tel que $\chi((\dot{\alpha})) = \alpha(x)$ ((α) n'est jamais compact). Soit un ouvert de coordonnées autour de x , dans lequel $T_x^*(X)$ (pour tout x' dans cet ouvert) est représenté par (x', ξ) ; considérons une fonction $\beta(\xi) \in \mathcal{C}(T_x^*(X))$ définie dans un voisinage de x contenu dans l'ouvert de coordonnées considéré; il lui correspond un op. C^∞ -Z. (β) (c'est un " (β) local"), et χ est un caractère sur les $(\dot{\beta})$ ((β) n'est jamais compact), donc $\exists \xi$ tel que $\chi((\dot{\beta})) = \beta(\xi)$, avec $(x, \xi) \in S(X)$.

Soient maintenant $A \in \Gamma_o^{o,o}$ quelconque, $\varphi(x')$ une fonction sur X , C^∞ , $\varphi(x) = 1$ (ainsi qu'autour de x), $\varphi(x') = 0$ en dehors d'un voisinage de x inclus dans l'ouvert de coordonnées. On peut écrire :

$$A = (\varphi) A (\varphi) + (A - (\varphi) A (\varphi)) .$$

Donc

$$\sigma_{o,o}(A) = \varphi \sigma_{o,o}(A) \varphi + \sigma_{o,o}(A - (\varphi) A (\varphi)) .$$

D'où, pour le $(x, \xi) \in S(X)$ trouvé :

$$\dot{\sigma}_{o,o}(\dot{A})(x, \xi) = \sigma_{o,o}((\varphi) A (\varphi))(x, \xi) .$$

Notons $\dot{\sigma}_{o,o}(x, \xi)$, l'application $\dot{A} \rightsquigarrow \dot{\sigma}_{o,o}(\dot{A})(x, \xi)$.

$\chi - \dot{\sigma}_{o,o}(x, \xi)$ coïncide avec 0 sur les $(\dot{\alpha})$, sur les $(\dot{\beta})$ locaux (autour de x), et sur $\dot{K}^{o,o} = \{0\}$, donc l'application est nulle (on peut se localiser autour de x , d'après le calcul qui précède, et alors $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$ est engendré par les $(\alpha)(\beta)_{loc} = (\dot{\alpha})(\dot{\beta})_{loc}$). Tous les caractères de $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$ sont donc de la forme $\dot{\sigma}_{o,o}(x, \xi)$.

On a ainsi un homomorphisme de norme ≤ 1 :

$$\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o} \rightarrow \mathcal{C}(S(X)) , \quad S(X) \text{ espace des caractères.}$$

D'après le théorème de Gel'fand (cf. [1]), c'est un isomorphisme (d'où la bijectivité), et une isométrie, car $\Gamma_o^{o,o}/K^{o,o}$ est muni de sa norme de C^* -algèbre (commutative).

2° Cas E trivial, $E = X \times \underline{\mathbb{C}}^m$. - On passe du cas scalaire au cas considéré en

tensorisant les algèbres en question par $\mathcal{L}(\underline{C}^m, \underline{C}^m)$, ce qui conserve noyau et image ; $\dot{\sigma}_{0,0}$ est donc un isomorphisme de C^* -algèbre, donc une isométrie.

3° Cas E non trivial. - Soit une partition de l'unité (finie)

$$\sum \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \in \mathcal{O}(X),$$

subordonnée à un recouvrement de X par des ouverts $\{U_i\}$ tels que $\forall i, j$ tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $U_i \cup U_j$ soit contenu dans un ouvert de coordonnées et de trivialité (il est clair que de tels ouverts existent). On a :

$$A = \sum_{i,j} (\alpha_i) A (\alpha_j), \quad \forall A \in \Gamma_{0,0}^{0,0}(X; E, E);$$

on "localise" ainsi A .

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E, E))$ quelconque. On a $f = \sum_i \alpha_i f$. Au-dessus de U_i , E est trivial, et l'on est dans un ouvert de coordonnées ; on peut donc trouver un (et un seul) $\dot{A}_i \in \Gamma_{0,0}^{0,0}/K^{0,0}$, tel que $\dot{\sigma}_{0,0}(\dot{A}_i) = \alpha_i f$, d'où la surjectivité du $(0, 0)$ -symbole, car on peut relever f en $\sum_i \dot{A}_i \in \Gamma_{0,0}^{0,0}/K^{0,0}$. Si de plus $f = 0$, comme $\dot{\sigma}_{0,0}$ est un isomorphisme dans le cas trivial, tout $((\alpha_i) A (\alpha_j))'$ est nul, donc $\dot{A} = 0$.

Donc $\dot{\sigma}_{0,0}$ est un isomorphisme (algébrique) de $\Gamma_{0,0}^{0,0}/K^{0,0}$ sur $\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E, E))$, de norme ≤ 1 ; c'est donc aussi un isomorphisme topologique (théorème de Banach) et une isométrie, puisqu'il existe une seule norme de C^* -algèbre.

1.5. Le (s, t) -symbole pour $\Gamma_0(X; E, F; s, t)$. - On a les isomorphismes topologiques $G_s(X; E) \in \Gamma_\infty(X; E, E, s)$, de C^∞ -symboles $|\xi|^s I_{E \sim X}$ en $(x, \xi) \in T^*(X)$ par exemple ; de plus, on a défini

$$(f | g)_s = (G_s f | G_s g)_0 \text{ pour } f, g \in H^s(X; E) \text{ (donc } G_s^+ = G_{-s} = G_s^{-1} \text{)}.$$

On a donc

$$\Gamma_{0,t}^{s,t} = G_{-t}(F) \circ \Gamma_0^{0,0}(E, F) \circ G_s(E), \quad K^{s,t} = G_{-t}(F) \circ K^{0,0}(E, F) \circ G_s(F),$$

$$\Gamma_0^{0,0} = G_t(F) \circ \Gamma_0^{s,t}(E, F) \circ G_{-s}(E), \quad K^{0,0} = G_t(F) \circ K^{s,t}(E, F) \circ G_{-s}(E),$$

et de même

$$\Gamma_\infty^{s-t}(E, F) = G_{-t}(F) \circ \Gamma_\infty^0(E, F) \circ G_s(E)$$

$$\Gamma_\infty^0(E, F) = G_t(F) \circ \Gamma_\infty^0(E, F) \circ G_{-s}(E)$$

car $G_\rho(X; E)$ est un isomorphisme $H^s(X; E) \rightarrow H^{s-\rho}(X; E)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

DEFINITION 3. - Soit $A \in \Gamma_0(X; E, F; s, t)$. On définit son (s, t) -symbole

$$\sigma_{s,t}(A) = \sigma_{0,0}(G_t(F) A G_{-s}(E)).$$

Si $A = \lim A_n$ dans $\mathcal{L}(H^s(E), H^t(F))$, $A_n \in \Gamma_\infty(X; E, F; s-t)$, on aura

$$\begin{aligned} \sigma_{0,0}(G_t(F) A G_{-s}(E)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_0(G_t A_n G_{-s}) \text{ dans } \mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E, F)) \\ &= \lim \sigma_{s-t}(A_n) \text{ dans } \mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E, F)), \end{aligned}$$

On voit ainsi que $\sigma_{s,t}$ peut s'obtenir aussi par prolongement par continuité de σ_{s-t} (défini pour Γ_∞^{s-t}) à $\Gamma_0^{s,t}$, et coïncide avec σ_{s-t} sur Γ_∞^{s-t} . Il est donc indépendant du choix particulier des G_s .

Les G_s nous donnent une bijection, qui est un isomorphisme d'espaces (de Banach) dans le cas général, et de C^* -algèbres si $E = F$, $s = t$, entre $\Gamma_0(X; E, F; s, t)$ et $\Gamma_0(X; E, F; 0, 0)$ ainsi qu'entre $K(X; E, F; s, t)$ et $K(X; E, F; 0, 0)$ (par $G_{-t}(F) \circ \square \circ G_s(E)$), donc, par passage au quotient, entre $\Gamma_0^{s,t}/K^{s,t}$ et $\Gamma_0^{0,0}/K^{0,0}$.

On a ainsi, par composition, un isomorphisme $\dot{\sigma}_{s,t}$ entre $\Gamma_0^{s,t}/K^{s,t}$ et $\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E, F))$, qui coïncide avec $\dot{\sigma}_{s-t}$ sur $\Gamma_\infty^{s-t}/\mathcal{A}(s-t)$, où

$$\mathcal{A}(s-t) = \mathcal{A}(X; E, F; s-t).$$

Homogénéité du (s, t) -symbole. - Notons $\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E, F); \rho)$ les sections continues du fibré $\mathcal{L}_S(E, F)$ prolongées en fonctions homogènes de degré ρ (en ξ) sur $T^*(X)$.

Soit $A \in \Gamma_0(X; E, F; s, t)$; $A = \lim A_n$ dans $\mathcal{L}(H^s, H^t)$, où $A_n \in \Gamma_\infty^{s-t}$. Alors

$$\sigma_{s,t}(A) \in \mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E, F); s-t),$$

car $\sigma_{s-t}(A_n) \in \mathcal{E}(\mathcal{L}_S(E, F); s-t)$. Or

$$\mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E, F); \rho) \approx \mathcal{C}(\mathcal{L}_S(E, F); \rho'),$$

l'isomorphisme étant donné, par exemple, par $f(x, \xi) \rightsquigarrow |\xi|^{\rho'-\rho} f(x, \xi)$.

D'où :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_o^{s,t} & \xrightarrow{\text{proj}} & \Gamma_o^{s,t}/K^{s,t} \xrightarrow{\approx} \Gamma_o^{o,o}/K^{o,o} \xrightarrow[\approx]{\dot{\sigma}_{o,o}} C(\mathcal{L}_*(\underline{E}, \underline{F}) ; 0) \\ & & \searrow \dot{\sigma}_{s,t} \qquad \qquad \qquad \downarrow \approx \\ & & C(\mathcal{L}_*(\underline{E}, \underline{F}) ; s-t) , \end{array}$$

ce diagramme étant commutatif, et $\dot{\sigma}_{s,t}$ étant un isomorphisme topologique.

Propriétés du (s, t) -symbole. - On les obtient par passage à la limite :

(a) Si $A \in \Gamma_o(X ; E, G ; s, u)$ et $B \in \Gamma_o(X ; G, F ; u, t)$, on a

$$\sigma_{s,t}(B \circ A) = \sigma_{u,t}(B) \circ \sigma_{s,u}(A) .$$

(b) $\sigma_{-t,-s}({}^t A) = {}^{tv}_{\sigma_{s,t}}(A)$ et $\sigma_{-t,-s}(A^*) = \sigma_{s,t}(A)^*$

(c) $\sigma_{t,s}(A^+) \begin{cases} = \sigma_{s,t}(A)^* & \text{sur } S(X) \\ = \sigma_{-2s}(G_{-2s}(E)) \sigma_{s,t}(A)^* \sigma_{2t}(G_{2t}(F)) & \text{sur } T^*(X) \text{ (il y a un facteur } |\xi|^{2t-2s} \text{)} . \end{cases}$

1.6. Égalité des normes.

THÉOREME 1. - L'application $\dot{\sigma}_{s,t} = \frac{\Gamma_o^{s,t}}{K^{s,t}}(X ; E, F) \rightarrow C(\mathcal{L}_*(\underline{E}, \underline{F}) ; s-t)$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach, et de C^* -algèbres, si $E = F$, et $s = t$.

1° $\Gamma_o^{s,s}(X ; E, E)$ est une C^* -algèbre, avec l'adjonction hilbertienne, ainsi que $\Gamma_o^{s,s}/K^{s,s}$ (car $K^{s,s}$ est un idéal bilatère fermé). Or il existe une seule norme de C^* -algèbre, et c'est celle dont est munie $\Gamma_o^{s,s}/K^{s,s} \subset \frac{\mathcal{L}(H^s(X ; E))}{K^{s,s}}$.
D'où l'isométrie du $(s, s)(E, E)$ -symbole :

$$\|\dot{\sigma}_{s,s}(\dot{A})\| = \|\dot{A}\|_{\mathcal{L}(H^s)/K^{s,s}}$$

la norme du premier membre étant calculée dans $C(\mathcal{L}_s(E, E))$ (et ce sera, par définition, celle du terme correspondant dans $C(\mathcal{L}_*(\underline{E}, \underline{E}) ; 0)$).

2° LEMME. - Soit $A \in \Gamma_o^{s,t}(E, F)$, $\dot{A} \in \Gamma_o^{s,t}/K^{s,t}$. Alors

$$\frac{\|\dot{A}\|_{\mathcal{L}(H^s(E), H^t(F))}}{K^{s,t}(E,F)} = \frac{\|\sqrt{A^+ A}\|_{\mathcal{L}(H^s(E))}}{K^{s,s}} \quad \text{et} \quad \sigma_{s,s}(\sqrt{A^+ A}) = \sqrt{\sigma_{t,s}(A^+) \sigma_{s,t}(A)}$$

En effet, on a

$$A : H^S(X ; E) \rightarrow H^t(X ; F) , \quad A^+ : H^t(X ; F) \rightarrow H^S(X ; E) ,$$

d'où

$$\sqrt{A^+ A} : H^S(X ; E) \rightarrow H^S(X ; E)$$

(pour f et $g \in H^S(X ; E)$, $(Af | Ag)_t = (A^+ A f | g)_S = (\sqrt{A^+ A} f | \sqrt{A^+ A} g)_S$; cf. RIESZ et NAGY, Analyse fonctionnelle [2]). On en déduit qu'il existe des isométries partielles (isométries sur un sous-espace fermé, 0 sur son orthogonal)

$$u : H^S(X ; E) \rightarrow H^t(X ; F) \text{ et } v = u^+ : H^t \rightarrow H^S$$

telles que $A = u \sqrt{A^+ A}$ et $\sqrt{A^+ A} = v A$.

On a

$$\|\dot{u}\| = \inf_{k \in K^{S,t}} \|u + k\| \leq \|u\| = 1 ,$$

et de même $\|\dot{v}\| \leq \|v\| = 1$.

D'où

$$\|\dot{A}\| \leq \|\sqrt{A^+ A}\| \leq \|\dot{A}\| , \quad \text{i. e. } \|\sqrt{A^+ A}\| = \|\dot{A}\| .$$

De plus, $A^+ A = \sqrt{A^+ A} \circ \sqrt{A^+ A}$, donc

$$\sigma_{S,S}(A^+ A) = (\sigma_{S,S}(\sqrt{A^+ A}))^2$$

(ponctuellement sur X) et

$$\sigma_{S,S}(\sqrt{A^+ A}) = \sqrt{\sigma_{S,S}(A^+ A)} = \sqrt{\sigma_{t,S}(A^+)} \sigma_{S,t}(A) ,$$

d'où le lemme.

On en déduit

$$\begin{aligned} \|\dot{A}\| &= \|\sqrt{A^+ A}\| = \|\sqrt{\sigma_{S,t}(A)^* \sigma_{S,t}(A)}\|_{C(\mathcal{L}_S(E,E))} = \|\sigma_{S,t}(A)\|_{C(\mathcal{L}_S(E,F))} \cdot \\ &= \|\sigma_{S,t}(A)\|_{C(\mathcal{L}_S(E,F); s-t)} . \end{aligned}$$

D'où le théorème annoncé.

1.7. Opérateurs de Calderon-Zygmund "C⁰-elliptiques" .

DÉFINITION 4. - Un opérateur de C⁰-Z. est dit "C⁰-elliptiques" si son symbole est inversible dans $C(\mathcal{L}_S(E, F))$.

THÉOREME 2. - $A \in \Gamma_0(X; E, F; s, t)$ est C^0 -elliptique si et seulement si $\exists A' \in \Gamma_0(X; F, E; t, s)$ tel que

$$A'A = I_E + C, \quad C \in K(X; E, E; s, s)$$

$$AA' = I_F + D, \quad D \in K(X; F, F; t, t).$$

La démonstration est analogue au cas des op. C^∞ -Z.-elliptiques (on prend pour A' un relèvement quelconque de $(\sigma_{s,t}(A))^{-1}$).

Remarque. - Il est en général faux qu'un opérateur C^0 -elliptique soit hypoelliptique (car C et D sont seulement compacts). Mais on verra plus loin que si $A \in \bigcap_s \Gamma_0^{s, s-\rho}$ et est C^0 -elliptique, de même $(s, s-\rho)$ -symbole $\forall s \in \mathbb{R}$, on aura $AT \in \mathcal{O}(X; F) \implies T \in \mathcal{O}(X; E)$ (c'est une propriété d'hypoellipticité globale; cf. théorème 5).

Il résulte du théorème 2 et de l'exposé n° 12 que tout opérateur C^0 -elliptique possède un indice, et même qu'un op. C^0 -Z. possède un indice si et seulement s'il est C^0 -elliptique. L'indice en question est calculé comme indice d'un opérateur $H^s(X; E) \rightarrow H^t(X; F)$; comme on peut ajouter à cet opérateur un opérateur (compact) de $K^{s,t}$ sans changer son indice (exposé n° 12), l'indice ne dépend que du symbole $\sigma_{s,t}$ de l'opérateur (mais attention, si l'on a

$$A \in \Gamma_0^{s,t}(X; E, F) \cap \Gamma_0^{s',t'}(X; E, F), \text{ avec } \sigma_{s,t}(A) \neq \sigma_{s',t'}(A) \text{ sur } S(X),$$

ce qui est a priori possible, les indices de $A_s: H^s \rightarrow H^t$ et $A_{s'}: H^{s'} \rightarrow H^{t'}$ peuvent être différents. Nous ignorons si cette circonstance peut se produire).

THÉOREME 3. - L'indice analytique (des opérateurs de C.-Z. C^0 -elliptiques) est une fonction additive sur $K(B(X), S(X))$.

Même démonstration qu'à l'exposé 14. Il nous faut pour cela savoir que, pour les C^0 -symboles, comme pour les C^∞ -symboles, deux symboles homotopes donnent le même indice i_a . Dans le cas C^∞ , on le montrait par relèvement θ de symboles homotopes en opérateurs homotopes de H^s dans $H^{s-\rho}$. Pour les C^0 -symboles, il n'y a pas de relèvement θ (voir page 22-15). Mais c'est ici encore plus simple. Si un symbole σ' est assez voisin du symbole σ , les opérateurs A_s et A'_s correspondants vérifient

$$\|A'_s - A_s\| = \max \|\sigma' - \sigma\| \quad (\text{voir théorème 1}),$$

donc $A'_s - A_s$ est la somme d'un petit opérateur et d'un opérateur compact, donc

A'_S et A_S ont même indice ; alors si un symbole varie continûment dans $C(\text{Iso}_S(X)(E, F))$, l'indice reste constant, d'où le résultat cherché.

2. Produit tensoriel de "relèvements canoniques".

Soient donnés deux symboles

$$\sigma_\nu \in \mathcal{E}(X_\nu, T^*(X_\nu) ; \mathcal{L}(E_\nu, F_\nu) ; \rho_\nu) \quad (\nu = 1, 2) .$$

Si $\rho_\nu > 0$, ou si $\rho_\nu = 0$, σ_ν étant une fonction sur X_ν seul (un "a"), on peut prolonger (par 0 dans le premier cas, par la valeur commune sur les sphères cotangentes dans le second cas) σ_ν à tout $T^*(X_\nu)$, donc en particulier à $B(X_\nu)$, en une section continue, appartenant à $C(\mathcal{L}(E_\nu, F_\nu) ; \rho_\nu)$.

On a alors

$$\sigma_1 \otimes \sigma_2 \in C(\mathcal{L}_{B(X)}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2) ; \rho_1 + \rho_2) ,$$

donc en particulier

$$\sigma_1 \otimes \sigma_2 \in C(\mathcal{L}_{S(X)}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2) ; \rho_1 + \rho_2)$$

où $X = X_1 \times X_2$, ce qui n'est pas le cas si les ordres ρ_ν ne sont pas comme ci-dessus.

Considérons une partition de l'unité $\{\varphi_i^\nu(x_\nu)\}_{i \in I_\nu}$ subordonnée à un recouvrement $\{U_i^\nu\}$ de X_ν par des ouverts tels que toutes les fois que $U_i^\nu \cap U_k^\nu \neq \emptyset$, $U_i^\nu \cup U_k^\nu$ est contenu dans un ouvert de coordonnées et de trivialité pour tous les fibrés considérés ($i, k \in I_\nu$, ensemble fini d'indices, car X_ν est compacte). Désignons par $\sim$ la "descente sur $\underline{R}^n$ " et par $\curvearrowright$ la "remontée sur X_ν ". On peut alors considérer le relèvement "canonique" de

$$\sigma_\nu : \theta_\nu(\sigma_\nu) = \sum_{i,k} \overbrace{\theta(\varphi_i^\nu \sigma_\nu)(\widetilde{\varphi_k^\nu})}^{\quad},$$

où θ désigne le relèvement canonique sur $\underline{R}^n$ (exposé n° 9) ; on "remonte" sur la variété un opérateur à bisupport compact dans $U_i \cup U_k$.

Les $\{\varphi_i^1(x_1) \varphi_i^2(x_2)\}$ forment une partition de l'unité sur $X_1 \times X_2$, subordonnée à $\{U_i^1 \times U_i^2\}$, et on a

$$\sigma_1 \otimes \sigma_2 = \sum_{i,i'} \varphi_i^1 \sigma_1 \otimes \varphi_{i'}^2 \sigma_2 .$$

On peut donc considérer

$$\theta_1(\sigma_1) \otimes \theta_2(\sigma_2) = \sum_{i,i',k,k'} \overbrace{\theta(\varphi_i^1 \sigma_1) \otimes \theta(\varphi_{i'}^2 \sigma_2) (\varphi_k^1 \varphi_{k'}^2)}$$

opérateur agissant (avec $\mathcal{K} = \mathcal{O} = \mathcal{E}$, ou $\mathcal{K} = \mathcal{O}' = \mathcal{E}'$, car X_1 et X_2 sont compactes) :

$$\mathcal{K}(X_1, E_1) \otimes \mathcal{K}(X_2, E_2) \rightarrow \mathcal{K}(X_1, F_1) \otimes \mathcal{K}(X_2, F_2)$$

donc prolongeable par continuité au produit tensoriel complété $\hat{\otimes}$ (muni de la topologie ε , ou π , ou encore au produit ε de ces espaces ; cf. [3], SCHWARTZ, Distributions à valeurs vectorielles) en un opérateur $(X = X_1 \times X_2)$

$$\theta_1(\sigma_1) \hat{\otimes} \theta_2(\sigma_2) : \mathcal{K}(X, E_1 \otimes E_2) \rightarrow \mathcal{K}(X, F_1 \otimes F_2).$$

On aimerait bien que ce prolongement $\theta_1(\sigma_1) \hat{\otimes} \theta_2(\sigma_2)$, que l'on peut d'ailleurs considérer pour tout couple d'opérateurs de C^∞ -Z., soit encore un opérateur de Calderon-Zygmund ; malheureusement, les espaces H^s ne sont pas factorisables (tout au plus a-t-on des isomorphismes entre H^k et $\bigcap_{0 \leq l+m \leq k} H_1^l \hat{\otimes} H_2^m$, et entre H^{-k} et $\bigoplus_{l+m \leq k} H_1^{-l} \hat{\otimes} H_2^{-m}$, où $k, l, m \in \mathbb{N}$, $\hat{\otimes}$ désignant la complétion de l'espace préhilbertien obtenu avec $(f_1 \otimes f_2 \mid g_1 \otimes g_2) = (f_1 \mid g_1)(f_2 \mid g_2)$; cf. [4]), et on ne peut pas dire a priori que le produit tensoriel de deux opérateurs C^∞ -Z. est de type analogue. Cependant :

THÉOREME 4. - Si $\sigma_\nu \in \mathcal{E}(X_\nu, T_\bullet^*(X_\nu) ; \mathcal{E}(E_\nu, F_\nu) ; \rho_\nu)$ avec $\rho_\nu > 0$, ou $\rho_\nu = 0$ si σ_ν est fonction sur X_ν seulement, on a :

$$\theta_1(\sigma_1) \hat{\otimes} \theta_2(\sigma_2) \in \bigcap_{s-t=\rho_1+\rho_2} \Gamma_0(X_1 \times X_2 ; E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2 ; s, t)$$

et $\forall s, t \in \mathbb{R}$ avec $s - t = \rho_1 + \rho_2$:

$$\sigma_{s,t}(\theta_1(\sigma_1) \hat{\otimes} \theta_2(\sigma_2)) = \sigma_1 \otimes \sigma_2.$$

Avec les partitions de l'unité considérées plus haut, il suffit de démontrer le théorème localement, auquel cas (les fibrés étant alors triviaux, au-dessus d'ouverts de trivialité) on se ramène au cas scalaire (par tensorisation avec les espaces de matrices convenables). On doit donc démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - Soient $\theta_\nu(\sigma_\nu) \in \Gamma_\infty(\mathbb{R}^{n_\nu} ; \rho_\nu)$, de ρ_ν -symbole σ_ν ($\rho_\nu > 0$; ou $\rho_\nu = 0$, σ_ν étant un $\alpha(x_\nu)$). Alors

$$\theta_1(\sigma_1) \theta_2(\sigma_2) \in \bigcap_{s-t=\rho_1+\rho_2} \Gamma_0(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} ; s, t)$$

et son (s, t) -symbole continu est $\sigma_1 \sigma_2$.

Soient d'abord $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, et $\sigma_\nu = \alpha_\nu \beta_\nu$. Alors

$$\theta_1(\sigma_1) \theta_2(\sigma_2) = (\alpha_1 \alpha_2)(\beta_1 \beta_2);$$

la fonction $\beta_1 \beta_2$ est homogène d'ordre ≥ 0 , et partout continue; donc $\theta_1(\sigma_1) \theta_2(\sigma_2)$ est un op. C.-Z. C^0 de symbole $\sigma_1 \sigma_2$ d'après le lemme suivant, où $\beta(\xi) = \beta(\xi_1, \xi_2) = \beta_1(\xi_1) \beta_2(\xi_2)$, $\ell = n_1 + n_2$:

LEMME. - Soit $(\beta_n) \in \Gamma_\infty(\mathbb{R}^\ell; \rho)$ de symbole $\beta_n(\xi)$. Soit $S^{\ell-1}$ la sphère uni-
té de $(\mathbb{R}^\ell)^*$, et supposons que $\beta_n \rightarrow \beta$ dans $C(S^{\ell-1})$.

Alors $(\beta) = \mathfrak{S}\beta \star \in \Gamma_0(\mathbb{R}^\ell; \rho) = \bigcap_{s-t=\rho} \Gamma_0(\mathbb{R}^\ell; s, t)$, et son $(s, s-\rho)$ -sym-
bole continu, $\forall s$, est $\beta(\xi)$.

A l'aide de ce lemme, on peut prolonger θ aux β continus en $\theta(\beta) = (\beta)$; ce n'est pas le cas pour les α continus. La multiplication par $\alpha(x) \in C(\mathbb{R}^\ell)$, même à support compact, n'est pas un opérateur sur H^s pour $s > 0$: on sait seulement qu'au symbole $\alpha(x)$ à support compact, et continu, correspond

$$(1 + |\xi|^2)^{-s/2} (\alpha(x)) (|\xi|^s),$$

mais ce relèvement dépend de s , et n'est pas le prolongement du θ défini pour les symboles C^∞ .

On a en effet

$$\beta(\xi) = |\xi|^\rho \overset{\circ}{\beta}(\xi'), \quad \xi' \in S^{\ell-1},$$

et de même pour β_n ; or $\beta_n \rightarrow \beta$ dans $C(S^{\ell-1})$, donc

$$\sup_{S^{\ell-1}} |\overset{\circ}{\beta}_n(\xi') - \overset{\circ}{\beta}(\xi')| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'où

$$\forall f \in H^s, \quad \|(\beta_n)f - (\beta)f\|_{s-\rho} \leq \sup_{S^{\ell-1}} |\overset{\circ}{\beta}_n - \overset{\circ}{\beta}| \|f\|_s.$$

Donc $(\beta_n) \rightarrow (\beta)$ dans $\mathcal{L}(H^s, H^{s-\rho})$ et a pour tout $s \in \mathbb{R}$. Donc $(\beta) \in \Gamma_0(\mathbb{R}^\ell; s, t-\rho)$. Or $\sigma_\rho((\beta_n)) = \beta_n$, et $\beta_n \rightarrow \beta$ dans $C(S^{\ell-1})$, donc $\sigma_{s, s-\rho}((\beta)) = \beta$ pour tout s .

Ceci démontre le lemme, donc la proposition 3, pour σ_1 et σ_2 décomposés. Passons au cas général.

Soient

$$\alpha_\nu(x_\nu) \in \mathcal{S}(\underline{\mathbb{R}}^{n_\nu}) , \quad \beta_\nu \in \mathcal{E}((\underline{\mathbb{R}}^{n_\nu})^* - \{0\} ; \rho_\nu) \quad \text{où } \rho_\nu > 0 ,$$

i. e. $\beta_\nu \in \mathcal{C}((\underline{\mathbb{R}}^{n_\nu})^* ; \rho_\nu)$ également. Posons $\rho = \rho_1 + \rho_2$.

On a une application continue :

$$\mathcal{S}(\underline{\mathbb{R}}^{n_1}) \times \mathcal{E}((\underline{\mathbb{R}}^{n_1})^* - \{0\} ; \rho_1) \times \mathcal{S}(\underline{\mathbb{R}}^{n_2}) \times \mathcal{E}((\underline{\mathbb{R}}^{n_2})^* - \{0\} ; \rho_2) \rightarrow \bigcap_s \Gamma_o(\underline{\mathbb{R}}^{n_1+n_2} ; s, s-\rho)$$

$$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \rightsquigarrow (\alpha_1 \alpha_2)(\beta_1 \beta_2) = \theta_1(\alpha_1 \beta_1) \theta_2(\alpha_2 \beta_2) ;$$

l'espace d'arrivée est muni de la topologie de $\bigcap_s \mathcal{E}(H^s, H^{s-\rho})$ (limite projective). La continuité est évidente (il suffit d'ailleurs de vérifier la continuité séparée).

Cette application passe au produit tensoriel complété $\hat{\otimes}$ (π ou ε) :

$$\mathcal{S}(\underline{\mathbb{R}}^{n_1} \times ((\underline{\mathbb{R}}^{n_1})^* - \{0\}) ; \rho_1) \times \mathcal{S}(\underline{\mathbb{R}}^{n_2} \times ((\underline{\mathbb{R}}^{n_2})^* - \{0\}) ; \rho_2) \rightarrow \bigcap_s \Gamma_o(\underline{\mathbb{R}}^{n_1+n_2} ; s, s-\rho)$$

$$(\sigma_1, \sigma_2) \rightsquigarrow \theta_1(\sigma_1) \theta_2(\sigma_2) .$$

donc $\theta_1(\sigma_1) \theta_2(\sigma_2)$ est un opérateur C^0 -Z., et ce pour tout s .

De plus, le $(s, s-\rho)$ -symbole de $(\alpha_1 \alpha_2)(\beta_1 \beta_2)$ était $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2$. D'après la continuité de ce symbole (comme application $\Gamma_o^{s, s-\rho} \rightarrow \mathcal{C}(\underline{\mathbb{R}}^n \times S^{n-1} ; \rho)$), et sa linéarité, le $(s, s-\rho)$ -symbole de $\theta_1(\sigma_1) \theta_2(\sigma_2)$ est $\sigma_1 \sigma_2$, et ce pour tout s .

3. Produit tensoriel et indice analytique.

Soit donc $d_\nu = d(E_{\nu_B}, F_{\nu_B}, \sigma_\nu)$. On peut considérer $d_1 \otimes d_2$ comme représenté par $d(E_B, F_B, \sigma)$ (cf. page 22-01).

Prenons les σ_ν définissant les d_ν ρ -homogènes (le même ρ) avec $\rho > 0$ (on peut prendre $\rho = 0$ si ce sont des "a"), ce qui est toujours possible (changer le degré d'homogénéité des σ_ν ne change pas le d_ν correspondant). On a alors

$$\sigma_1 \# \sigma_2 = \sigma \in \mathcal{C}(\mathcal{E}_{B(X)}(E, F) ; \rho) \quad \text{où } X = X_1 \times X_2 .$$

LEMME. - Supposons σ_ν inversible, i. e. $\sigma_\nu \in \mathcal{E}(T^*(X_\nu) ; \text{Iso}_{S(X_\nu)}(E_\nu, F_\nu) ; \rho)$, avec $\rho > 0$ ($\rho = 0$ si c'est un α inversible). Alors

$$\sigma_1 \# \sigma_2 \in \mathcal{C}(\text{Iso}_{S(X)}(E, F) ; \rho) .$$

COROLLAIRE. - Si $\theta_\nu(\sigma_\nu)$ est un opérateur C^∞ -Z. ρ -elliptique ($\rho > 0$ ou $\rho = 0$ si c'est un α) de ρ -symbole σ_ν , alors $\theta_1(\sigma_1) \# \theta_2(\sigma_2)$ est C^0 -elliptique $\in \Gamma_0^{s, s-\rho}(X; E, F)$, $\forall s$, de $(s, s-\rho)$ -symbole $\sigma_1 \# \sigma_2$, $\forall s$.

En effet (ici, comme p. 22-01, on note I_E pour $\sigma_0(I_E)$) :

$$(\sigma_1 \# \sigma_2)^* (\sigma_1 \# \sigma_2) = \begin{pmatrix} \sigma_1^* \sigma_1 \otimes I_{E_2} + I_{E_1} \otimes \sigma_2^* \sigma_2 & 0 \\ 0 & I_{F_1} \otimes \sigma_2 \sigma_2^* + \sigma_1 \sigma_1^* \otimes I_{F_2} \end{pmatrix}$$

est donc un opérateur hermitien partout ≥ 0 , et > 0 en tout point où un au moins des σ_ν est un isomorphisme, i. e. sur $T^*(X)$, et donc est homotope à l'identité sur $S(X)$; donc σ est C^0 -inversible. La formule donnant σ (opération "bidule" : $\sigma_1 \# \sigma_2$) montre son homogénéité, de degré ρ . Le corollaire découle du lemme et du théorème 4.

Par conséquent, en posant $D_\nu = \theta_\nu(\sigma_\nu)$, $D = D_1 \# D_2$ est inversible modulo les compacts (car C^0 -elliptique), donc possède un indice comme opérateur

$$H^s(X; E) \rightarrow H^{s-\rho}(X; F), \quad \forall s.$$

Or son $(s, s-\rho)$ -symbole est le même pour tout s , donc l'indice de l'opérateur

$$D = D_1 \# D_2 = \begin{pmatrix} D_1 \hat{\otimes} I_{E_2} & - I_{F_1} \hat{\otimes} D_2^* \\ I_{E_1} \hat{\otimes} D_2 & D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2} \end{pmatrix}$$

(défini sur $\mathcal{O}'(X; E)$) est le même sur tout $H^s(X; E)$ (on suppose ici identifiées les sections de E_ν et celles de $\bar{E}^* \otimes_X \Omega$). Nous allons le calculer.

THÉOREME 5. - Soit A un opérateur : $H^s(X; E) \rightarrow H^{s-\rho}(X; F)$, $\forall s$ (donc agissant $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$, $\mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}'$), supposé à indice. Notons A_s sa restriction à $H^s(X; E)$. Si $i_a(A_s)$ est indépendant de s , on a :

- (i) $\text{Ker } A_s \subset \mathcal{O}(X; E)$;
- (ii) $AT \in H^{s-\rho}(X; F) \implies T \in H^s(X; E)$ ("hypoellipticité globale")
- (iii) $i_a(A_s) = i_a(A_0) = \dim \text{Ker } A - \dim \text{Ker } A^*$.

COROLLAIRE. - Soit $A \in \bigcap_s \Gamma_0(X; E, F; s, s - \rho)$, avec $\sigma_{s, s-\rho}(A) = \sigma_{(\rho)}(A)$, indépendant de s , A étant C^0 -elliptique (à indice), $\forall s$. Alors $i_a(A_s)$ est indépendant de s (il ne dépend que de $\sigma_{(\rho)}(A)$), donc

$$\text{Ker } A \subset \mathcal{O}, \quad \text{Ker } A^* \subset \mathcal{O}(X; F),$$

$$i_a(A_s) = i_a(A_{\mathcal{O}}) = i_a(A_{\mathcal{O}}) = \dim \text{Ker } A - \dim \text{Ker } A^*$$

et de plus (hypoellipticité globale des op. C^0 -Z.-elliptiques)

$$AT \in \mathcal{O} \Rightarrow T \in \mathcal{O}.$$

Ceci est vrai en particulier pour $A = A_1 \# A_2$ où A_1 et A_2 sont C^∞ -elliptiques, d'ordre (le même) ≥ 0 (nul, seulement si ce sont des (α)).

Démontrons ce théorème 5.

LEMME 1. - Soient $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ deux espaces vectoriels topologiques, $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_0$, avec injection continue dense. Soit $K \subset \mathcal{E}_0$ un sous-espace fermé de codimension n finie. Alors $K \cap \mathcal{E}_1$ est un sous-espace fermé, de codimension n dans $\mathcal{E}_1$.

En effet, K est défini par l'annulation de $e'_1, \dots, e'_n \in \mathcal{E}'_0 \subset \mathcal{E}'_1$, linéairement indépendantes, et $K \cap \mathcal{E}_1$ est encore défini dans $\mathcal{E}_1$ par leur annulation, et elles sont encore indépendantes dans $\mathcal{E}'_1$ ($\mathcal{E}_1$ est dense dans $\mathcal{E}_0$).

PROPOSITION 4. - Soient $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ quatre espaces vectoriels topologiques, et le diagramme suivant, où les u_ν sont des applications linéaires continues à indice ($\nu = 0, 1$), $\text{Im } u_\nu$ étant fermée dans $\mathcal{F}_\nu$, les injections étant denses et $u_0|_{\mathcal{E}_1} = u_1$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{u_1} & \mathcal{F}_1 \\ \downarrow \cap & & \cap \downarrow \\ \mathcal{E}_0 & \xrightarrow{u_0} & \mathcal{F}_0 \end{array}$$

Alors

$$(i) \quad \dim \text{Ker } u_1 \leq \dim \text{Ker } u_0$$

$$(ii) \quad \dim \text{Coker } u_1 \geq \dim \text{Coker } u_0$$

donc $i_a(u_1) \leq i_a(u_0)$, et si $i_a(u_0) = i_a(u_1)$, on a

$$(iii) \quad \text{Ker } u_1 = \text{Ker } u_0$$

et l'application $\text{Coker } u_1 \rightarrow \text{Coker } u_0$ est bijective.

(i) est évidente, car $\text{Ker } u_1 \subseteq \text{Ker } u_0$. Par le lemme 1,

$$\text{codim}_{\mathfrak{F}_1}(\text{Im } u_0 \cap \mathfrak{F}_1) = \text{codim}_{\mathfrak{F}_0}(\text{Im } u_0).$$

Or $\mathfrak{F}_1 \supset \text{Im } u_1 \subset \text{Im } u_0 \subset \mathfrak{F}_0$, donc $\text{Im } u_0 \cap \mathfrak{F}_1 \supset \text{Im } u_1$. D'où

$$\dim \text{Coker } u_0 = \text{codim}_{\mathfrak{F}_0}(\text{Im } u_0) = \text{codim}_{\mathfrak{F}_1}(\text{Im } u_0 \cap \mathfrak{F}_1) \leq \text{codim}_{\mathfrak{F}_1}(\text{Im } u_1) = \dim \text{Coker } u_1.$$

Si $i_a(u_0) = i_a(u_1)$, on devra avoir

$$\begin{cases} \dim \text{Ker } u_0 = \dim \text{Ker } u_1 < \infty \\ \dim \text{Coker } u_0 = \dim \text{Coker } u_1 < \infty. \end{cases}$$

Or $\text{Ker } u_1 \subset \text{Ker } u_0$ ($\subset \mathfrak{E}_0$) et les deux ont même dimension finie, donc

$$\text{Ker } u_0 = \text{Ker } u_1 \subset \mathfrak{E}_1,$$

et de même $\text{Im } u_1 = \text{Im } u_0 \cap \mathfrak{F}_1$ (même codimension finie dans $\mathfrak{F}_1$; et ils sont tous les deux fermés).

De plus, soit $f_1 = u_0 e_0$, $f_1 \in \mathfrak{F}_1$, $e_0 \in \mathfrak{E}_0$, i. e. $f_1 \in \text{Im } u_0 \cap \mathfrak{F}_1 = \text{Im } u_1$. Alors il existe $e_1 \in \mathfrak{E}_1$ tel que $f_1 = u_1 e_1$. Or $u_0(e_1 - e_0) = 0$, donc

$$e_1 - e_0 \in \text{Ker } u_0 \subset \mathfrak{F}_1,$$

i. e. $e_0 \in \mathfrak{E}_1$. Donc $u_0(\mathfrak{E}_0) \cap \mathfrak{F}_1 = u_1(\mathfrak{E}_1)$. (C'est une propriété d'hypoellipticité).

Donc l'application

$$\text{Coker } u_1 = \frac{\mathfrak{F}_1}{\text{Im } u_1} \rightarrow \frac{\mathfrak{F}_0}{\text{Im } u_0} = \text{Coker } u_0,$$

définie par

$$\{f_1 + \text{Im } u_1\} \rightsquigarrow \{f_1 + \text{Im } u_0\},$$

est injective ($u_0^{-1}(\mathfrak{F}_1) \subset \mathfrak{E}_1$), et donc bijective (car ces espaces ont même dimension finie).

Démonstration du théorème 5. - A_s étant à indice, et H^s Hilbert (donc Fréchet), $\text{Im } A_s$ est fermée (exposé 12). On a le diagramme ($t \leq s$) :

$$\begin{array}{ccc} H^s(X; E) & \xrightarrow{A_s} & H^{s-\rho}(X; F) \\ \cap \downarrow & & \cap \downarrow \\ H^t(X; E) & \xrightarrow{A_t} & H^{t-\rho}(X; F) \end{array} \quad \text{et } A_s \text{ et } A_t \text{ ont même indice.}$$

Donc $\forall t \leq s$,

$$\text{Ker } A_t = \text{Ker } A_s \subset H^s(X; E)$$

et par conséquent, comme $\mathcal{O} = \bigcap H^s$, $\mathcal{O}' = \bigcup H^s$:

$$\text{Ker } A_t \subset \mathcal{O}(X; E),$$

et de plus, si $A_t T \in H^{s-\rho}$ ($T \in H^t$ a priori, ce qui est toujours vrai pour un certain t assez "petit", car X est compacte), $T \in H^s$. Donc $AT \in \mathcal{O} \Rightarrow T \in \mathcal{O}$, car alors

$$T \in \mathcal{O}' \Rightarrow T \in H^t \Rightarrow A_t T \in H^{s-\rho}, \quad \forall s \geq t \Rightarrow T \in H^s, \quad \forall s \geq t.$$

On en déduit que $A(\mathcal{O}) = \bigcap_s A(H^s)$ est fermé dans $\mathcal{O}$, donc A est encore un homomorphisme de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$. Mais les mêmes résultats sont valables pour A^* . Alors

$$i_a(A_{\mathcal{O}}) = \dim \text{Ker } A_{\mathcal{O}} - \dim \text{Ker } A_{\mathcal{O}}^* = \dim \text{Ker } A_s - \dim \text{Ker } A_{-s+\rho}^* = i_a(A_s)$$

pour tout s . De même, $\text{Im } A(\mathcal{O}')$ est fermée dans $\mathcal{O}'$ d'après le théorème de Banach sur les homomorphismes de Fréchet, donc on a encore

$$i_a(A_{\mathcal{O}'}) = \dim \text{Ker } A - \dim \text{Ker } A^* = i_a(A_s)$$

pour tout s .

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant chercher $\text{Ker } D$ et $\text{Ker } D^*$, dans H^s , donc dans $\mathcal{O}$, pour $D = D_1 \# D_2$, D_1 et D_2 C^∞ -elliptiques, de même ordre ≥ 0 ($= 0$ seulement si ce sont des (α)), "relèvements canoniques" de σ_1 et σ_2 (respectivement), ceci afin d'assurer que D est C^0 -elliptique sur la variété produit.

Soient $(f, g) \in \text{Ker } D$, $f \in \mathcal{O}(X; E_1 \otimes E_2)$, $g \in \mathcal{O}(X; F_1 \otimes F_2)$. On a

$$\begin{cases} (D_1 \hat{\otimes} I_{E_2})f - (I_{F_1} \hat{\otimes} D_2^*)g = 0 \\ (I_{E_1} \hat{\otimes} D_2)f + (D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2})g = 0 \end{cases}$$

Or $(D_1 \hat{\otimes} I_{E_2}) \circ (I_{E_1} \hat{\otimes} D_2) = D_1 \hat{\otimes} D_2 = (I_{E_1} \hat{\otimes} D_2) \circ (D_1 \hat{\otimes} I_{E_2})$. Donc (on compose avec $I_{F_1} \hat{\otimes} D_2$ et $D_1 \hat{\otimes} I_{F_2}$, puis on retranche):

$$(D_1 D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2} + I_{F_1} \hat{\otimes} D_2 D_2^*)g = 0$$

et de même (on compose avec $D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2}$ et $I_{F_1} \hat{\otimes} D_2$, puis on ajoute):

$$(D_1^* D_1 \hat{\otimes} I_{E_2} + I_{E_1} \hat{\otimes} D_2^* D_2) f = 0 .$$

Comme on sait a priori que f et g sont dans les $\mathcal{O}$ correspondants, on peut multiplier "scalairement" (avec la forme sesquilinéaire exprimant l'antidualité entre $\mathcal{O}(X; E)$ et $\mathcal{O}'(X; E)$, ou entre H^0 et H^{-0}) par g et f (respectivement) les égalités obtenues, d'où

$$0 = (D_1 D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2} g, g) + (I_{F_1} \hat{\otimes} D_2 D_2^* g, g) ;$$

or on a

$$0 = \|D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2} g\|_{L^2(X, F_1 \otimes F_2)}^2 = (D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2} g, D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2} g) = (D_1 D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2} g, g)$$

(la dernière égalité est vraie sur les éléments décomposables, donc sur tous par passage à la limite), et de même pour les autres termes.

La possibilité de prendre un produit scalaire pour $g \in \mathcal{O}$, nous assure donc que si la somme de deux opérateurs hermitiens ≥ 0 est nulle sur g , chacun d'eux l'est :

$$(D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2}) g = 0, \quad (I_{F_1} \hat{\otimes} D_2^*) g = 0 .$$

On en déduit

$$g \in \text{Ker}(D_1^* \hat{\otimes} I_{F_2}) \cap \text{Ker}(I_{F_1} \hat{\otimes} D_2^*) \subset \mathcal{O}(X; F_1 \otimes F_2) .$$

De même

$$f \in \text{Ker}(D_1 \hat{\otimes} I_{E_2}) \cap \text{Ker}(I_{E_1} \hat{\otimes} D_2) \subset \mathcal{O}(X; E_1 \otimes E_2) .$$

Or :

LEMME 2. - Soient $\mathcal{E}_\nu$ ($\nu = 1, 2$) deux espaces localement convexes séparés, et $A_\nu \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\nu, \mathcal{E}_\nu)$. On a alors $A_1 \in I_2$ et $I_1 \in A_2$ sur $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, (prolongeant $A_1 \otimes I_2$ et $I_1 \otimes A_2$ définis sur $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$) où I_ν dénote l'identité sur $\mathcal{E}_\nu$, et on a :

$$\text{Ker}(A_1 \in I_2) \cap \text{Ker}(I_1 \in A_2) = (\text{Ker } A_1) \otimes (\text{Ker } A_2)$$

(pour le produit $\otimes$, voir SCHWARTZ [3], chap. I).

En effet, tout $\eta \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ peut être considéré comme un élément de $\mathcal{L}_\varepsilon((\mathcal{E}_2')_{\mathcal{C}}; \mathcal{E}_1)$ par

$$\eta(e'_1, e'_2) = \langle \eta(e'_2), e'_1 \rangle, \quad \forall e'_1 \in \mathcal{E}'_1, e'_2 \in \mathcal{E}'_2.$$

Donc

$$(A_1 \in I_2)g = 0 \iff \forall e'_2, (A_1 \in I_2)g(e'_2) = 0,$$

$$\text{i. e. } A_1(g(e'_2)) = 0.$$

Donc

$$g \in \text{Ker}(A_1 \in I_2) \implies g \in (\text{Ker } A_1) \in \mathcal{E}_2.$$

Si de plus $g \in \text{Ker}(I_1 \in A_2)$, on a

$$(I_1 \in A_2)g = 0.$$

D'où, de même,

$$g \in (\text{Ker } A_1) \in (\text{Ker } A_2).$$

L'inclusion inverse est évidente. Pour $\mathcal{O}(X_\nu; E_\nu)$ et $\mathcal{O}'(X_\nu; E_\nu)$ (qui sont complets et ont la propriété d'approximation, de sorte que $\varepsilon = \bigotimes_{\mathbb{C}}^*$), comme par hypoellipticité

$$\begin{cases} \text{Ker } D_\nu \subset \mathcal{O}(X_\nu; E_\nu) \\ \text{Ker } D_\nu^* \subset \mathcal{O}(X_\nu; F_\nu) \end{cases}$$

on aura (que l'on calcule les noyaux dans $\mathcal{O}'$ ou dans $\mathcal{O}$, ce qui revient au même, et quel que soit le $\hat{\otimes}$, π ou ε , considéré) :

$$\text{Ker } D = \text{Ker } D_1 \hat{\otimes} \text{Ker } D_2 \oplus \text{Ker } D_1^* \hat{\otimes} \text{Ker } D_2^* \subset \mathcal{O}(X; E)$$

et de même :

$$\text{Ker } D^* = \text{Ker } D_1^* \hat{\otimes} \text{Ker } D_2 \oplus \text{Ker } D_1 \hat{\otimes} \text{Ker } D_2^* \subset \mathcal{O}(X; F).$$

Notons $\mu = \dim \text{Ker}$. On a

$$\dim(\text{Ker } D_1 \hat{\otimes} \text{Ker } D_2) = \mu(D_1) \mu(D_2).$$

Alors

$$\begin{aligned} i_a(D) &= \mu(D) - \mu(D^*) = \mu(D_1) \mu(D_2) + \mu(D_1^*) \mu(D_2^*) - \mu(D_1^*) \mu(D_2) - \mu(D_1) \mu(D_2^*) \\ &= i_a(D_1) i_a(D_2). \end{aligned}$$

Or $\sigma_\rho(D_\nu) = \sigma_\nu$, et $\sigma_{(\rho)}(D) = \sigma_1 \sigma_2$. Donc :

$$i_a(d_1 \otimes d_2) = i_a(d_1) i_a(d_2).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] RICKART (Charles E.). - General theory of Banach algebras. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1960 (The University Series in higher Mathematics).
 - [2] RIESZ (F.) et NAGY (B. Sz.). - Leçons d'analyse fonctionnelle. 3e éd. - Budapest, Académie de Hongrie, 1955.
 - [3] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 1-141 et t. 8, 1958, p. 1-209.
 - [4] Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, I. A. S., 1963/64.
-